Matemática Discreta

Pedro Hokama

Fontes

- Gomide, Anamaria; Stolfi, Jorge. Elementos de Matematica Discreta para Computação.
- Rosen, Kenneth H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th Edition, 2019.

Relações

Relações

Uma **relação binária** (ou simplesmente uma **relação**) $\mathcal{R}$ **de** um conjunto A **para** um conjunto B é um sub-conjunto de $A \times B$. Em outras palavras, é um conjunto de pares ordenados (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$.

Em geral usa-se a notação $a\mathcal{R}b$ para dizer que $(a, b) \in \mathcal{R}$ e $a\not\mathcal{R}b$ para dizer que $(a, b) \notin \mathcal{R}$. Se $(a, b) \in \mathcal{R}$ dizemos que a **está relacionado com** b pela relação $\mathcal{R}$.

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$. Então $\mathcal{R} = \{(1, 4), (2, 5), (3, 5), (3, 6)\}$ é uma relação de A para B. Neste exemplo, temos $2\mathcal{R}5$ e $3\mathcal{R}5$, mas $2\not\mathcal{R}4$ e $5\not\mathcal{R}2$.

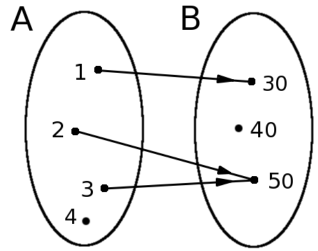


Diagrama da relação $\mathcal{R} = \{(1, 30), (2, 50), (3, 50)\}$ do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ para o conjunto $B = \{30, 40, 50\}$.

- O conjunto de pares $\left\{(x, \sqrt{x}) : x \in \mathbb{N}\right\}$ é um exemplo de uma relação de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{R}$.
- Se R é uma relação de A para A, dizemos que $\mathcal{R}$ é uma relação **em** A ou **sobre** A.
- Observe que os sinais de comparação da álgebra ("$<$", "$\leq$", etc.) são relações binárias definidas sobre os números reais.
- Observe também que "$\in$" é uma relação binária entre o conjunto $\mathcal{U}$ de todos os elementos, e o conjunto $\mathbb{P}(\mathcal{U})$ de todos os conjuntos; e que "$\subseteq$" é uma relação binária definida sobre o conjunto $\mathbb{P}(\mathcal{U})$.

Domínio

O **domínio** de uma relação $\mathcal{R}$, denotado por $\mathrm{Dom}(\mathcal{R})$, é o conjunto de todos os primeiros elementos dos pares ordenados que estão em $\mathcal{R}$. Isto é:

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) = \{\, a : (\exists b)\,(a, b) \in \mathcal{R}\,\}$$

Imagem

A **imagem** ou **contra-domínio** de uma relação $\mathcal{R}$, denotado por $\mathrm{Img}(\mathcal{R})$, é o conjunto de todos os segundos elementos dos pares ordenados que estão em $\mathcal{R}$. Isto é:

$$\mathrm{Img}(\mathcal{R}) = \{\, b : (\exists a)\,(a, b) \in \mathcal{R}\,\}$$

Observe que um conjunto de pares ordenados $\mathcal{R}$ é uma relação de A para B se, e somente se, $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) \subseteq A$ e $\mathrm{Img}(\mathcal{R}) \subseteq B$.

Exemplo: Seja $\mathcal{R}$ a relação $\{(1, 4), (2, 5), (3, 5), (3, 6)\}$. Temos que $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) = \{1, 2, 3\}$ e $\mathrm{Img}(\mathcal{R}) = \{4, 5, 6\}$.

Exemplo: Seja $\mathcal{R}$ a relação $\left\{ (x, x^2) : x \in \mathbb{Z} \right\}$. Observe que $\mathrm{Dom}(\mathcal{R})$ é o conjunto de todos os inteiros $\mathbb{Z}$, mas $\mathrm{Img}(\mathcal{R})$ é o conjunto dos quadrados perfeitos $\{0, 1, 4, 9, \ldots\}$.

Exemplo: Seja A o conjunto dos presidentes do Brasil, de 1889 a 2010. Seja $\mathcal{R}$ a relação sobre A tal que $a\mathcal{R}b$ se e somente se o presidente b foi o sucessor de a. Assim, por exemplo, temos que ‘Figueiredo’ $\mathcal{R}$ ‘Tancredo’ e ‘Fernando Henrique’ $\mathcal{R}$ ‘Lula’, mas ‘Lula’ $\not\mathcal{R}$ ‘Fernando Henrique’. Observe que o domínio desta relação são todos os presidentes menos Lula (que terminou o mandato em 2010), e a imagem são todos os presidentes menos Floriano Peixoto.

Restrição de relações

- Seja $\mathcal{R}$ uma relação, e sejam A' e B' conjuntos quaiquer. A **restrição de $\mathcal{R}$ a A' e B'** é o conjunto de pares de $(a, b) \in \mathcal{R}$ tais que $a \in A'$ e $b \in B'$; ou seja, $\mathcal{R} \cap A' \times B'$.
- A **restrição de $\mathcal{R}$ a A'** é geralmente entendida como $\mathcal{R} \cap A' \times A'$.

Exemplo: Seja $\mathcal{R}$ a relação dos inteiros positivos $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ para os inteiros, tal que $x\mathcal{R}y$ se e somente se x é divisor de y. A restrição de $\mathcal{R}$ aos conjuntos $U = \{0, 2, 3, 5, 6\}$ e $V = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ é o conjunto de pares

$$\{(2,0),(2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(3,0),(3,3)\\ (3,6),(3,9),(5,0),(5,5),(6,0),(6,6)\}$$

A restrição de $\mathcal{R}$ ao conjunto U é

$$\{(2,0),(2,2),(2,6),(3,0),(3,3),\\ (3,6),(5,0),(5,5),(6,0),(6,6)\}$$

Relações de identidade

Para qualquer conjunto A, a relação **identidade sobre** A, denotada por $\mathcal{I}_A$, é definida por

$$\mathcal{I}_A = \{(x,x) : x \in A\}$$

Esta relação nada mais é que a relação de igualdade "$=$", restrita ao conjunto A.

Exemplo: Se $A = \{1,2,3\}$ então $\mathcal{I}_A = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$.

Relação inversa

- Seja $\mathcal{R}$ uma relação do conjunto A para o conjunto B.
- A **relação inversa** denotada por $\mathcal{R}^{-1}$, é a relação do conjunto B para o conjunto A definida da seguinte forma:

$$\mathcal{R}^{-1} = \{\,(x,y) : (y,x) \in \mathcal{R}\,\}$$

- Ou seja, $\mathcal{R}^{-1}$ é a relação tal que $a\mathcal{R}^{-1}b$ se e somente se $b\mathcal{R}a$, para quaisquer a e b.
- Note que $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}^{-1}) = \mathrm{Img}(\mathcal{R})$ e $\mathrm{Img}(\mathcal{R}^{-1}) = \mathrm{Dom}(\mathcal{R})$.

Imagem e imagem inversa de conjuntos sob uma relação

Sejam $\mathcal{R}$ uma relação de um conjunto A para um conjunto B, e X um conjunto qualquer.
A **imagem de X** sob $\mathcal{R}$ é o conjunto

$$\{\,b : (\exists a \in X)\,(a,b) \in \mathcal{R}\,\}$$

A **imagem inversa** de X sob $\mathcal{R}$ é o conjunto

$$\{\,a : (\exists b \in X)\,(a,b) \in \mathcal{R}\,\}$$

A **imagem de X** sob $\mathcal{R}$ é o conjunto

$$\{\, b : (\exists a \in X)\,(a,b) \in \mathcal{R} \,\}$$

A **imagem inversa** de X sob $\mathcal{R}$ é o conjunto

$$\{\, a : (\exists b \in X)\,(a,b) \in \mathcal{R} \,\}$$

Observe que a imagem inversa de X sob $\mathcal{R}$ é a imagem de X sob a relação inversa $\mathcal{R}^{-1}$. A imagem de X sob $\mathcal{R}$ costuma ser indicada por $\mathcal{R}(X)$. A imagem inversa então pode ser indicada por $\mathcal{R}^{-1}(X)$.

Composição de relações

Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ duas relações. A **composição de $\mathcal{R}$ com $\mathcal{S}$** é a relação denotada por $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, e definida da seguinte forma:

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(a,c) : (\exists b)\,(a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,c) \in \mathcal{S}\}$$

Exemplo: Considere as relações

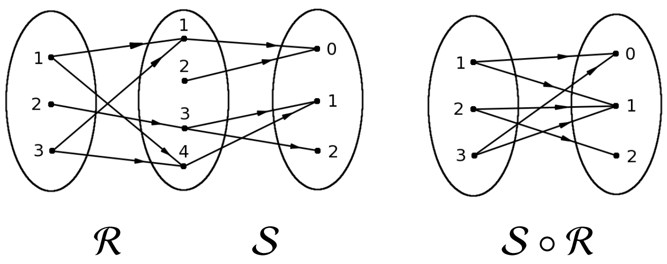
$$\mathcal{R} = \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$$
$$\mathcal{S} = \{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$

A composição delas é

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(1,0),(1,1),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1)\}$$

Observe que

- $(1,0) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ porque $(1,1) \in \mathcal{R}$ e $(1,0) \in \mathcal{S}$,
- $(1,1) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ porque $(1,4) \in \mathcal{R}$ e $(4,1) \in \mathcal{S}$,
- $(2,1) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ porque $(2,3) \in \mathcal{R}$ e $(3,1) \in \mathcal{S}$,
- $(2,2) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ porque $(2,3) \in \mathcal{R}$ e $(3,2) \in \mathcal{S}$,
- $(3,0) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ porque $(3,1) \in \mathcal{R}$ e $(1,0) \in \mathcal{S}$,
- $(3,1) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ porque $(3,4) \in \mathcal{R}$ e $(4,1) \in \mathcal{S}$.



Exemplo:

- Seja $\mathcal{R}$ a relação de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ definida por $x\mathcal{R}y \leftrightarrow x = y + 1$.
- Seja $\mathcal{S}$ a relação de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ definida por $y\mathcal{S}z \leftrightarrow y = 2z$.
- A composição $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ é a relação de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ definida por

$$x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z \leftrightarrow (\exists y \in \mathbb{Z})\, x = y + 1 \wedge y = 2z$$

- Ou seja, $x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z \leftrightarrow x = 2z + 1$.
- Observe que $(5, 2) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, porque $(5, 4) \in \mathcal{R}$ e $(4, 2) \in \mathcal{S}$.
- Observe também que $(6, 2) \notin \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, porque o único elemento relacionado com 6 por $\mathcal{R}$ é 5, mas $(5, 2) \notin \mathcal{S}$.
- e $(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})$?

- Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ as mesmas relações.
  - Seja $\mathcal{R}$ a relação de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ definida por $x\mathcal{R}y \leftrightarrow x = y + 1$.
  - Seja $\mathcal{S}$ a relação de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ definida por $y\mathcal{S}z \leftrightarrow y = 2z$.
- A composição $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ é a relação de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ definida por

$$x(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})z \leftrightarrow (\exists y \in \mathbb{Z})\, x = 2y \wedge y = z + 1$$

- Ou seja, $x(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})z \leftrightarrow x = 2z + 2$.
- Observe que $(5, 2) \notin \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$, mas $(6, 2) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$.
- Podemos observar então que $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} \neq \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$, ou seja, a composição de relações não é comutativa.

- Observe que, para quaisquer relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$, temos

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathcal{R})$$

- e

$$\mathrm{Img}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) \subseteq \mathrm{Img}(\mathcal{S})$$

Exercício: Seja $\mathcal{R}$ o conjunto de todos os pares (x, x^2) onde x é um número inteiro. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto de todos os pares $(3y, y)$ onde y é um número natural. Descreva as relações $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ e $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

Notação alternativa

- A notação $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ para composição de $\mathcal{R}$ com $\mathcal{S}$ é muito comum, especialmente para funções.
- Em algumas áreas da matemática, entretanto, a composição de uma relação $\mathcal{R}$ com uma relação $\mathcal{S}$ é denotada pela justaposição $\mathcal{R}\mathcal{S}$.
- Observe que, nesta notação, a ordem das relações é oposta à da notação tradicional.

Composição com identidade

Observe que, para qualquer relação $\mathcal{R}$ de um conjunto A para um conjunto B, as composiçãos $\mathcal{I}_B \circ \mathcal{R}$ e $\mathcal{R} \circ \mathcal{I}_A$ são sempre a própria relação $\mathcal{R}$.

Composição com a relação inversa

Exemplo: Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja $\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$, uma relação sobre A. Lembramos que a relação inversa $\mathcal{R}^{-1}$ é $\{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$, e que $\mathcal{I}_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$. Então:

- $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1)\}$.
- $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} = \{(2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 2)\}$.
- $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \{(1, 3)\}$.
- $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}^{-1} = \{(3, 1)\}$.

Observamos que neste exemplo $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$ é diferente de $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$, e ambas são diferentes da identidade $\mathcal{I}_A$.

Inversa da composição

Pode-se verificar que, para quaisquer relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$,

$$(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}$$

Ou seja, a **inversa da composição é a composição das inversas, na ordem inversa**.

Exemplo:

- Sejam as relações

$$\mathcal{R} = \{(1,20),(1,30),(2,40),(3,20)\}$$

$$\mathcal{S} = \{(20,200),(20,300),(40,200)\}$$

- Observe que
  - $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(1,200),(1,300),(2,200),(3,200),(3,300)\}$.
  - $\mathcal{R}^{-1} = \{(20,1),(30,1),(40,2),(20,3)\}$.
  - $\mathcal{S}^{-1} = \{(200,20),(300,20),(200,40)\}$.
  - $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1} = \{(200,1),(300,1),(200,3),(200,2),(300,3)\}$.
  - $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1} = \{(200,1),(300,1),(200,3),(300,3),(200,2)\}$.

Composição e inclusão

Para quaisquer relações $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$, se $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$ e $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_2$, então $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{S}_2$.

Potências de uma relação

Seja $\mathcal{R}$ uma relação. A **potência** $\mathcal{R}^n$, $n = 1, 2, \cdots$ é definida como:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^1 &= \mathcal{R} \\ \mathcal{R}^{n+1} &= \mathcal{R}^n \circ \mathcal{R} \end{aligned}$$

Teorema: Para quaisquer relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$, e qualquer inteiro $n \geq 1$, se $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ então $\mathcal{R}^n \subseteq \mathcal{S}^n$.

Tipos de relações

Seja $\mathcal{R}$ uma relação sobre um conjunto A.

- $\mathcal{R}$ é **reflexiva** sobre A se, e somente se, para todo $a \in A$ o par (a, a) está em $\mathcal{R}$.
- $\mathcal{R}$ é **irreflexiva** se, e somente se, ela não possui nenhum par da forma (a, a).
- $\mathcal{R}$ é **simétrica** se, e somente se, $(\forall a, b \in A)\ a\mathcal{R}b \rightarrow b\mathcal{R}a$. Ou seja, se um par (a, b) está em $\mathcal{R}$ então o par (b, a) também está em $\mathcal{R}$.

- $\mathcal{R}$ é **anti-simétrica** se, e somente se, $(\forall a, b \in A)\,(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}a) \rightarrow a = b$. Ou seja, para quaisquer elementos distintos a e b em A, no máximo um dos pares (a, b) e (b, a) está em $\mathcal{R}$.
- $\mathcal{R}$ é **transitiva** se, e somente se, $(\forall a, b, c \in A)\,(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \rightarrow a\mathcal{R}c$. Ou seja, se dois pares (a, b) e (b, c) estão em $\mathcal{R}$ então o par (a, c) também está em $\mathcal{R}$.

- Note que dizer que $\mathcal{R}$ é reflexiva sobre A equivale a dizer que $\mathcal{I}_A \subseteq \mathcal{R}$;
- dizer que $\mathcal{R}$ é irreflexiva equivale a dizer que $\mathcal{R} \cap \mathcal{I}_A = \emptyset$.
- Observe que há relações que não são nem reflexivas e nem irreflexivas, como por exemplo a relação $\mathcal{R}_1 = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2)(3, 1)\}$ sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$.
- Porém, se o conjunto A não é vazio, uma relação não pode ser ao mesmo tempo reflexiva sobre A e irreflexiva.

- Observe também que os termos simétrica e anti-simétrica não são opostos: qualquer relação de identidade, por exemplo, é ao mesmo tempo simétrica e anti-simétrica.
- Além disso, há relações que não são nem simétricas nem anti-simétricas. Por exemplo, a relação $\mathcal{R}_1 = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2)(3, 1)\}$ sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ não é simétrica, pois ela tem o par $(3, 1)$ mas não tem o par $(1, 3)$; e nem anti-simétrica, pois ela tem os dois pares $(2, 1)$ e $(1, 2)$.

- Finalmente, observe que uma relação pode satisfazer qualquer uma das propriedades por vacuidade, se não existirem elementos em A que satisfaçam as condições no lado esquerdo do conectivo '$\rightarrow$'.
- Por exemplo, a relação $\mathcal{R}_3 = \{(1, 2)\}$ é transitiva, porque não existem a, b e c tais que $(a\mathcal{R}_3 b) \wedge (b\mathcal{R}_3 c)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_1 =& \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),\\
& (3,3),(3,4),(4,1),(4,4)\}.\\
\mathcal{R}_2 =& \{(1,1),(1,2),(2,1)\}.\\
\mathcal{R}_3 =& \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),\\
& (3,3),(4,1),(1,4),(4,4)\}.\\
\mathcal{R}_4 =& \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}.\\
\mathcal{R}_5 =& \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),\\
& (2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}.\\
\mathcal{R}_6 =& \{(3,4)\}.
\end{aligned}$$

- São reflexivas sobre A: $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_3$ e $\mathcal{R}_5$.
- São irreflexivas sobre A: $\mathcal{R}_4$ e $\mathcal{R}_6$.
- São simétricas: $\mathcal{R}_2$ e $\mathcal{R}_3$.
- São anti-simétricas: $\mathcal{R}_4$, $\mathcal{R}_5$ e $\mathcal{R}_6$.
- São transitivas: $\mathcal{R}_4$, $\mathcal{R}_5$ e $\mathcal{R}_6$.

Composição e transitividade

Teorema: Uma relação $\mathcal{R}$ é transitiva se, e somente se $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$.

Prova: Seja $\mathcal{R}$ uma relação sobre um conjunto A. Vamos primeiro provar que, se $\mathcal{R}$ é transitiva, então $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$. Seja $(a,b) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$. Pela definição de composição de relações, temos que $(\exists x)\,(a,x) \in \mathcal{R} \wedge (x,b) \in \mathcal{R}$. Como $\mathcal{R}$ é transitiva, concluimos que $(a,b) \in \mathcal{R}$. Logo $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$.

Vamos provar agora que, se $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$, então $\mathcal{R}$ é transitiva. Sejam a, b, c três elementos de A. Se $(a,b) \in \mathcal{R}$ e $(b,c) \in \mathcal{R}$, então, pela definição de composição, temos que $(a,c) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$. Como $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$, então $(a,c) \in \mathcal{R}$. Logo $\mathcal{R}$ é transitiva. $\square$

Representação de relações usando matrizes

Uma **matriz booleana** é uma matriz cujos elementos são valores lógicos, **F** ou **V**. Ao escrever tais matrizes, é conveniente usar 0 e 1, respectivamente, para indicar esses valores.

Sejam $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ conjuntos finitos com $|A| = m$, $|B| = n$ e $\mathcal{R}$ uma relação de A para B. Uma maneira de representar esta relação é através de uma matriz booleana M de m linhas e n colunas definida da seguinte maneira:

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } a_i \mathcal{R} b_j \\ 0 & \text{se } a_i \not\mathcal{R} b_j \end{cases}$$

Exemplo: Seja $\mathcal{R}$ a relação $\{(20,20),(30,20),(30,30)\}$. Se escolhermos $A = \{10,20,30,40\}$ e $B = \{10,20,30\}$, listados nessa ordem, a matriz da relação será

$$M = \begin{array}{c|ccc} & 10 & 20 & 30 \\ \hline 10 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 1 & 0 \\ 30 & 0 & 1 & 1 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Observe que a matriz M depende da escolha dos conjuntos A e B, e também da ordem em que listamos seus elementos.

- A composição de relações também pode ser entendida em termos de matrizes.
- Sejam $\mathcal{R}$ uma relação de $A = \{a_1, a_2, \ldots a_m\}$ para $B = \{b_1, b_2, \ldots b_n\}$
- $\mathcal{S}$ uma relação de $B = \{b_1, b_2, \ldots b_n\}$ para $C = \left\{c_1, c_2, \ldots c_p\right\}$
- $\mathcal{R}$ está representado por uma matriz $M(m \times n)$ e $\mathcal{S}$ está representado por uma matriz $N(n \times p)$.

Pela definição, a matriz P que representa a composição $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ é tal que $P_{i,j} = 1$ se e somente se existe um inteiro $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $M_{i,k} = 1$ e $N_{k,j} = 1$. Ou seja,

$$P_{i,j} = (M_{i,1} \wedge N_{1,j}) \vee (M_{i,2} \wedge N_{2,j}) \vee \cdots \vee (M_{i,n} \wedge N_{n,j})$$

$$P_{i,j} = \bigvee_{k=1}^{n} M_{i,k} \wedge N_{k,j}.$$

Sejam $A = \{10, 20, 30, 40\}$, $B = \{20, 40, 60\}$, e $C = \{35, 55, 75, 95\}$. Sejam

$$\mathcal{R} = \{(10, 20), (10, 60), (20, 40), (40, 60)\}$$

$$\mathcal{S} = \{(20, 35), (20, 55), (40, 55), (40, 75), (60, 95)\}$$

As matrizes booleanas que representam $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ são

$$M = \left(\begin{array}{c|ccc} & 20 & 40 & 60 \\ \hline 10 & 1 & 0 & 1 \\ 20 & 0 & 1 & 0 \\ 30 & 0 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) N = \left(\begin{array}{c|cccc} & 35 & 55 & 75 & 95 \\ \hline 20 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$MN = ?$$

$$M = \left(\begin{array}{c|ccc} & 20 & 40 & 60 \\ \hline 10 & 1 & 0 & 1 \\ 20 & 0 & 1 & 0 \\ 30 & 0 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) N = \left(\begin{array}{c|cccc} & 35 & 55 & 75 & 95 \\ \hline 20 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$MN = \left(\begin{array}{c|cccc} & 35 & 55 & 75 & 95 \\ \hline 10 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 20 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 30 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Operações com relações usando matrizes

União de relações. Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ duas relações de um conjunto A para um conjunto B, com matrizes booleanas M e N, respectivamente.A matriz booleana P que representa a união $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ é tal que $P_{i,j} = 1$ se, e somente se, $M_{i,j} = 1$ ou $N_{i,j} = 1$. Ou seja, $P_{i,j} = M_{i,j} \vee N_{i,j}$. Podemos denotar essa matriz por $M \vee N$.

Intersecção de relações. Analogamente, a matriz Q que representa a interseção $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ é tal que $Q_{i,j} = 1$ se e somente se $M_{i,j} = 1$ e $N_{i,j} = 1$; ou seja $Q_{i,j} = M_{i,j} \wedge N_{i,j}$. Podemos denotar essa matriz por $M \wedge N$.

Sejam $A = \{10, 20, 30, 40\}$ e $B = \{20, 40, 60\}$, e sejam

$$\mathcal{R} = \{(10, 20), (10, 60), (20, 40), (40, 60)\}$$

$$\mathcal{S} = \{(10, 20), (20, 60), (30, 40), (40, 20)\}$$

As matrizes booleanas que representam $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ e $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ são

$$M = \left(\begin{array}{c|ccc} & 20 & 40 & 60 \\ \hline 10 & 1 & 0 & 1 \\ 20 & 0 & 1 & 0 \\ 30 & 0 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad N = \left(\begin{array}{c|ccc} & 20 & 40 & 60 \\ \hline 10 & 1 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 1 \\ 30 & 0 & 1 & 0 \\ 40 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$M = \left(\begin{array}{c|ccc} & 20 & 40 & 60 \\ \hline 10 & 1 & 0 & 1 \\ 20 & 0 & 1 & 0 \\ 30 & 0 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad N = \left(\begin{array}{c|ccc} & 20 & 40 & 60 \\ \hline 10 & 1 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 1 \\ 30 & 0 & 1 & 0 \\ 40 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$M \vee N = \left(\begin{array}{c|ccc} & 20 & 40 & 60 \\ \hline 10 & 1 & 0 & 1 \\ 20 & 0 & 1 & 1 \\ 30 & 0 & 1 & 0 \\ 40 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad M \wedge N = \left(\begin{array}{c|ccc} & 20 & 40 & 60 \\ \hline 10 & 1 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Propriedades de relações usando matrizes

Seja $\mathcal{R}$ uma relação sobre A. Se M é a matriz que representa essa relação, várias propriedades de $\mathcal{R}$ podem ser facilmente verificadas na matriz M:

- Uma relação $\mathcal{R}$ é reflexiva sobre A se, e somente se $(\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\})\, a_i \mathcal{R} a_i$. Portanto $\mathcal{R}$ é reflexiva sobre A e somente se $(\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\})\, M_{i,i} = 1$; isto é, os elementos da diagonal de M são todos 1.

- Uma relação $\mathcal{R}$ é irreflexiva sobre A se, e somente se $(\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\})\, a_i \not\mathcal{R} a_i$. Portanto $\mathcal{R}$ é irreflexiva sobre A e somente se os elementos da diagonal de M são todos 0.

- Uma relação $\mathcal{R}$ é simétrica se, e somente se $(\forall i, j \in \{1, 2, \cdots, n\})\, a_i \mathcal{R} a_j \leftrightarrow a_j \mathcal{R} a_i$. Portanto $\mathcal{R}$ é simétrica se, e somente se, a matriz M é simétrica, ou seja, ela é igual à sua transposta.
- Uma relação $\mathcal{R}$ é anti-simétrica se, e somente se $(\forall i, j \in \{1, 2, \cdots, n\})\, (a_i \mathcal{R} a_j \wedge a_j \mathcal{R} a_i) \rightarrow a_i = a_j$. Portanto $\mathcal{R}$ é anti-simétrica se, e somente se não existem índices i e j com $i \neq j$ tais que $M_{i,j}$ e $M_{j,i}$ são simultaneamente iguais a 1.

Seja $\mathcal{R}$ uma relação sobre um conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ cuja matriz é

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observe que:

- $\mathcal{R}$ é reflexiva sobre A pois $m_{i,i} = 1$ para todo i.
- $\mathcal{R}$ é simétrica pois M é simétrica.
- $\mathcal{R}$ não é anti-simétrica pois $m_{1,2} = m_{2,1} = 1$.

Fechos de uma relação

Fecho reflexivo

Seja $\mathcal{R}$ uma relação sobre um conjunto A. Se $\mathcal{R}$ não é reflexiva sobre A, é porque não possui um ou mais pares da forma (a, a) com $a \in A$. Se acrescentarmos todos esses pares a $\mathcal{R}$, obtemos uma relação $\mathcal{S}$ que é reflexiva sobre A e contém $\mathcal{R}$. Essa relação é chamada de **fecho reflexivo de $\mathcal{R}$ sobre A**.

Exemplo: Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (c, b)\}$. A relação $\mathcal{S} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (c, b), (b, b), (c, c)\}$ é o fecho reflexivo de $\mathcal{R}$ sobre A.

Fecho simétrico

Se $\mathcal{R}$ é uma relação qualquer, obtemos seu **fecho simétrico** acrescentando a $\mathcal{R}$ todos os pares necessários para torná-la uma relação simétrica; isto é, todo par da forma (b, a) tal que $(a, b) \in \mathcal{R}$.

Exemplo: Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b)\}$. A relação $\mathcal{S} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, a), (a, c), (b, c), (c, b)\}$ é o fecho simétrico de $\mathcal{R}$.

Fecho transitivo

Considere o problema de completar uma relação $\mathcal{R}$, se necessário, de modo a torná-la transitiva.Para isso, precisamos garantir que, para quaisquer pares (a, b) e (b, c) na relação, o par (a, c) também está na relação.

$$\mathcal{R} = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$$

Esta relação falha a definição de relação transitiva em exatamente dois casos:

$$(1,2) \in \mathcal{R} \wedge (2,3) \in \mathcal{R} \;\text{ mas }\; (1,3) \notin \mathcal{R}$$
$$(2,3) \in \mathcal{R} \wedge (3,4) \in \mathcal{R} \;\text{ mas }\; (2,4) \notin \mathcal{R}$$

Se acrescentarmos os pares $(1,3)$ e $(2,4)$, obtemos a relação

$$\mathcal{R}' = \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,4)\}$$

$$\mathcal{R}' = \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,4)\}$$

Mas esta relação ainda não é transitiva; pois ela possui $(1,3)$ e $(3,4)$ mas não possui $(1,4)$. Observe que esta falha de transitividade foi revelada quando acrescentamos o par $(1,3)$ à relação. Se acrescentarmos o par que falta, $(1,4)$, obtemos

$$\mathcal{R}'' = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$$

que é transitiva.

O **fecho transitivo** de $\mathcal{R}$, denotado por $\mathcal{R}^*$ é definido como sendo a união de todas as potências de $\mathcal{R}$, isto é

$$\mathcal{R}^* = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2 \cup \mathcal{R}^3 \cup \cdots \qquad (1)$$

Esta fórmula pode ser escrita mais sucintamente da seguinte maneira

$$\mathcal{R}^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{R}^k \qquad (2)$$

Fecho em geral

De maneira geral, sejam $\mathcal{R}$ uma relação em um conjunto A, **P** uma propriedade de relações, e $\mathcal{S}$ uma relação em A com a propriedade **P**. Dizemos que $\mathcal{S}$ é o **fecho** da relação $\mathcal{R}$ com respeito à **propriedade P**, se $\mathcal{S}$ contém $\mathcal{R}$ e está contida em toda relação que possui a propriedade **P** e contém $\mathcal{R}$.

Relações n-árias

- Sejam $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, conjuntos.
- Uma **relação n-ária entre** estes conjuntos é um sub-conjunto $\mathcal{R}$ de $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_n$.
- Isto é, um elemento de $\mathcal{R}$ é uma n-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, tal que $a_i \in A_i$ para cada i.

Relações n-árias

- O inteiro n é chamado de **grau** ou **ordem** da relação.
- Para $n \geq 2$ usam-se os nome **binária**, **ternária**, **quaternária.**, etc.
- O ***i*-ésimo domínio** da relação é o conjunto $\mathrm{Dom}_i(\mathcal{R})$ de todos os elementos de A_i que ocorrem na posição i das suas n-uplas.
- Ou seja, um elemento x pertence a $\mathrm{Dom}_i(\mathcal{R})$ se, e somente se, existe uma n-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ em $\mathcal{R}$ com $a_i = x$.

Projeção

Seja $\mathcal{R}$ uma relação n-ária e sejam $i_1, i_2, \ldots, i_m$ inteiros distintos entre 1 e n. A **projeção de $\mathcal{R}$ sobre as componentes** $i_1, i_2, \ldots, i_m$ é a relação m-ária $\mathcal{S}$ tal que uma m-upla $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ está em $\mathcal{S}$ se e somente se existe uma n-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ em $\mathcal{R}$ tal que $b_1 = a_{i_1}$, $b_2 = a_{i_2}$, $\ldots$, $b_m = a_{i_m}$.

Seja $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a relação ternária formada pelas triplas

$$\{(1, 10, 200), (1, 20, 200), (2, 20, 200),\\ (2, 30, 100), (3, 30, 300)\}.$$

Eis algumas projeções dessa relação sobre diversas listas de componentes:

- Sobre 2 e 3: $\{(10, 200), (20, 200), (30, 100), (30, 300)\}$
- Sobre 1 e 3: $\{(1, 200), (2, 200), (2, 100), (3, 300)\}$
- Sobre 2 e 1: $\{(10, 1), (20, 1), (20, 2), (30, 2), (30, 3)\}$
- Sobre 1, 2 e 3:

$$\{(1, 10, 200), (1, 20, 200), (2, 20, 200),\\ (2, 30, 100), (3, 30, 300)\} = \mathcal{R}$$

Permutação de componentes

Para relações binárias temos o conceito de relação inversa em que é trocada a ordem das duas componentes de cada par. Sua generalização para relações n-árias é a operação de **permutação de componentes**, que rearranja a ordem das componentes de todas as n-uplas, da mesma maneira.

Mais precisamente, dada uma relação n-ária $\mathcal{R}$ e uma permutação $i_1, i_2, \ldots, i_n$ dos inteiros $1, 2, \ldots, n$, esta operação produz a relação n-ária $\mathcal{S}$ que consiste de todas as n-uplas $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$ tais que $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ está em $\mathcal{R}$.

Restrição

Sejam $\mathcal{R}$ uma relação n-ária, e $X_1, X_2, \ldots, X_n$ conjuntos arbitrários. Da mesma forma que para relações binárias, definimos a **restrição de $\mathcal{R}$ a esses conjuntos** como a relação $\mathcal{S}$ das n-uplas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\mathcal{R}$ que tem $a_j \in X_j$, para cada j; ou seja

$$\mathcal{S} = \mathcal{R} \cap (X_1 \times X_2 \times \cdots \cdots \times X_n)$$

Exemplo: Considere a relação

$$\mathcal{R} = \{(1, 10, 200), (1, 20, 200), (2, 20, 200), (2, 30, 100), (3, 30, 100), (3, 30, 300)\}.$$

Observe que esta é uma relação entre os conjuntos $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{10, 20, 30\}$, e $A_3 = \{100, 200, 300\}$.

Sejam $X_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $X_2 = \{20, 30, 40\}$, e $X_3 = \{200, 300\}$. A restrição de $\mathcal{R}$ a X_1, X_2 e X_3 é

$$\mathcal{S} = \{(1, 20, 200), (2, 20, 200), (3, 30, 300)\}$$

Junção

$\mathcal{R}$			
Nome	Função	Chefe	Sala
José	Secretário	Aníbal	S.102
José	Digitação	Aníbal	S.103
Maria	Digitação	Sônia	S.103
Maria	Secretária	Sônia	S.202
Pedro	Assistente	José	S.102
Luiz	Despacho	Carlos	S.301
Luiz	Motorista	Carlos	S.307

$\mathcal{S}$		
Sala	Ramal	Setor
S.101	8233	Vigilância
S.102	8247	Financeiro
S.102	8250	Patrimônio
S.103	8288	Vendas
S.103	8289	Vendas
S.104	8300	Pessoal
S.301	8380	Compras
S.303	8350	Contabilidade
S.307	8380	Transporte

Note que há empregados que trabalham em várias salas, salas com vários empregados, salas com mais de um ramal, ramais que servem mais de uma sala, etc.
Cruzando estes dados, podemos obter outras relações entre essas entidades.
Por exemplo, casando o número da sala nas duas relações, podemos construir a relação $\mathcal{T}$

$\mathcal{T}$					
Nome	Função	Chefe	sala	Ramal	Setor
José	Secretário	Aníbal	S.102	8247	Financeiro
José	Secretário	Aníbal	S.102	8250	Patrimônio
José	Digitação	Aníbal	S.103	8288	Vendas
José	Digitação	Aníbal	S.103	8289	Vendas
Maria	Digitação	Sônia	S.103	8288	Vendas
Maria	Digitação	Sônia	S.103	8289	Vendas
Pedro	Assistente	José	S.102	8247	Financeiro
Pedro	Assistente	José	S.102	8250	Patrimônio
Luiz	Despacho	Carlos	S.301	8380	Compras
Luiz	Motorista	Carlos	S.307	8380	Transporte

Note que, por exemplo, a linha "(José, Digitação, Aníbal, 8289, Vendas)" foi incluída na relação $\mathcal{T}$ porque existe a quádrupla "(José, Digitação, Aníbal, S.103)" na relação $\mathcal{R}$, e a tripla "(S.103, 8288, Vendas)" — com o mesmo número de sala — na relação $\mathcal{S}$.

Formalmente, seja $\mathcal{R}$ uma relação m-ária e $\mathcal{S}$ uma relação n-ária. Define-se a **junção** das relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ como sendo a relação $(m + n - 1)$-ária $\mathcal{T}$ consistindo de todas as tuplas $(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, c, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1})$, tais que $(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, c) \in \mathcal{R}$ e $(c, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}) \in \mathcal{S}$.

Podemos generalizar ainda mais esta operação casando dois ou mais campos ao mesmo tempo. Seja $\mathcal{R}$ uma relação m-ária, $\mathcal{S}$ uma relação n-ária, e p um inteiro positivo menor que m e n. A **junção em p campos** das relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ é a relação $(m + n - p)$-ária $\mathcal{T}$ consistindo de todas as tuplas $(a_1, a_2, \ldots, a_{m-p}, c_1, c_2, \ldots, c_p, b_1, b_2, \ldots, b_{n-p})$, tais que $(a_1, a_2, \ldots, a_{m-p}, c_1, c_2, \ldots, c_p) \in \mathcal{R}$, e $(c_1, c_2, \ldots, c_p, b_1, b_2, \ldots, b_{n-p}) \in \mathcal{S}$.