Matemática Discreta

Pedro Hokama

Fontes

- Gomide, Anamaria; Stolfi, Jorge. Elementos de Matematica Discreta para Computação.
- Rosen, Kenneth H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th Edition, 2019.

Funções

Conceito

Uma **relação** $\mathcal{F}$ de A para B é uma **função de** A **para** B se, e somente se, para todo $a \in A$ existe **exatamente um** $b \in B$ tal que $(a, b) \in \mathcal{F}$.

- Usa-se geralmente a notação $\mathcal{F} : A \to B$.
- Para cada elemento a de A, é costume indicar por $\mathcal{F}(a)$ o **valor de** $\mathcal{F}$ **em** a,
- isto é, o único elemento b de B tal que $(a, b) \in \mathcal{F}$.
- Observe que esta notação só tem sentido para funções, e não para relações em geral.

Exemplo: A relação $\mathcal{F} = \{(1, 40), (2, 30), (3, 30)\}$ é uma função do conjunto $X = \{1, 2, 3\}$ para o conjunto $Y = \{20, 30, 40\}$, isto é $\mathcal{F} : X \to Y$.

Exemplo: A relação $\mathcal{F} = \{(1, 40), (3, 30)\}$ **não** é uma função de $X = \{1, 2, 3\}$ para $Y = \{20, 30, 40\}$, pois para $a = 2 \in X$ **não** existe um $b \in Y$ tal que $(a, b) \in \mathcal{F}$.

Exemplo: A relação $\mathcal{F} = \{(1, 40), (2, 20), (2, 30), (3, 30)\}$ **não** é uma função de $X = \{1, 2, 3\}$ para $Y = \{20, 30, 40\}$, pois para $a = 2 \in X$ existem **dois** valores distintos $b' = 20 \in Y$ e $b'' = 30 \in Y$ tais que $(a, b') \in \mathcal{F}$ e $(a, b'') \in \mathcal{F}$.

Exemplo: A relação $\mathcal{F} = \left\{(x, x^2) : x \in \mathbb{Z}\right\}$ é uma função do conjunto $\mathbb{Z}$ para o conjunto $\mathbb{N}$, isto é $\mathcal{F} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$.

Exemplo: A relação $\mathcal{F} = \left\{(x^2, x) : x \in \mathbb{Z}\right\}$ **não** é uma função do conjunto $\mathbb{N}$ para o conjunto $\mathbb{Z}$, pois há elementos $a \in \mathbb{N}$ (como $a = 5$) para os quais não existe par $(a, b) \in \mathcal{F}$, e há elementos $a \in \mathbb{N}$ (como $a = 4$) para os quais existem dois pares $(a, b) \in \mathcal{F}$ (no caso, $(4, 2)$ e $(4, -2)$).

Em geral, usaremos letras minúsculas, como f, g, etc., para relações que são funções.

Domínio e imagem de uma função

- Todos os conceitos introduzidos para relações (como domínio, composição, inversa, etc.) valem também para funções.

- Se f é uma função de A para B, então, de acordo com a definição, o domínio $\mathrm{Dom}(f)$ de f é sempre o conjunto A.
- A imagem ou contra-domínio $\mathrm{Img}(f)$ de f é o conjunto

  $$Img(f) = \{f(a) : a \in A\} = \{b \in B : (\exists a \in A)\, b = f(a)\}$$

  Observe que a imagem está contida no conjunto B, mas nem sempre é igual a B.

Exercício: Seja f uma função e $\mathcal{R}$ uma relaçao sobre $\mathrm{Dom}(f)$ tal que para todo x e y $x\mathcal{R}y \leftrightarrow f(x) = f(y)$ para todo $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$.

- Prove que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência.
- Encontre as classes de equivalência de $\mathcal{R}$.

Inversa de função

A inversa de uma função f é a relação

$$f^{-1} = \{\,(y, x) : (x, y) \in f\,\}$$

Note que a inversa de uma função nem sempre é uma função.

Exemplo: Seja f a função de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$. Sua inversa é a relação

$$f^{-1} = \left\{ (x^2, x) : x \in \mathbb{R} \right\}$$

que associa a cada número real $y \geq 0$ suas duas raízes quadradas $-\sqrt{y}$ e $+\sqrt{y}$.

Composição de funções

A composição de duas funções f e g é definida da mesma forma que para relações,

$$g \circ f = \{ (a, c) : (\exists b) (a, b) \in f \land (b, c) \in g \}$$

Em particular, se $f : A \to B$ e $g : B \to C$, então verifica-se que $g \circ f$ é uma função de A para C, e para todo $a \in A$ o valor de $g \circ f$ em a é definido pela fórmula:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

Por exemplo
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = 2x + 3$,
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $g(x) = 3x + 2$. Então
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+3) = 3(2x+3)+2 = 6x+11$
e
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x+2) = 2(3x+2)+3 = 6x+7$.
Este exemplo mostra que a composição de funções não é comutativa.

Tipos de funções

Função injetora
Uma função f de A para B é **injetora** se, e somente se, $(\forall x, y \in A) (f(x) = f(y) \to (x = y))$.
Ou seja, se e somente se ela atribui um valor diferente para cada elemento do domínio.

Uma função injetora **preserva informação**, pois o valor de $f(x)$ determina univocamente o valor de x. Funções injetoras também são chamadas de funções **um para um**.

Exercício: Sejam f e g duas funções. Prove que se $g \circ f$ não é injetora então pelo menos uma dentre f e g não é injetora.

Função sobrejetora

Dizemos que uma função f de A para B é **sobrejetora em** B (ou é uma função de A **sobre** B) se, e somente se, $(\forall b \in B)\,(\exists a \in A)\, f(a) = b$. Ou seja, f é uma função sobre B se e somente se $B = Img(f)$. Note que não tem sentido dizer que uma função "é sobrejetora" sem especificar em qual conjunto. Por exemplo, a função f com domínio $\mathbb{Z}$ tal que $f(x) = |x|$ é tanto uma função de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ quanto de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{N}$; ela é sobrejetora em $\mathbb{N}$, mas não em $\mathbb{Z}$.

Exercício: Sejam $f : A \to B$, $g : B \to C$. Prove que se f é sobrejetora em B, e g é sobrejetora em C, então $g \circ f$ é sobrejetora em C.

Função bijetora

Definição: Uma função f de A para B é **bijetora de** A **para** B (ou é uma **bijeção de** A **para** B) se, e somente se, f é injetora e sobrejetora em B.

Funções bijetoras são muito importantes em matemática e computação. Entre outras coisas, elas permitem definir o "tamanho" de conjuntos infinitos.

Função permutação

Uma **função permutação** de um conjunto A, ou uma **permutação** de A, é uma função bijetora de A para A.
Observe que a relação de identidade sobre A é uma permutação (trivial) de A.

Exemplo: A função

$$f = \{(10, 10), (11, 12), (12, 13), (13, 11), (14, 15), (15, 14)\}$$

é uma permutação do conjunto $A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$.

Exemplo: Sejam m, n inteiros positivos quaisquer, e seja $A = \{\, x \in \mathbb{N} : x < n \,\}$. Seja $f : A \to A$ tal que $f(x)$ é o resto da divisão de $x + m$ por n. Verifica-se que f é uma permutação de A

Exercício: Liste todas as permutações do conjunto $A = \{10, 20, 30\}$.

Por ser bijetora, toda permutação de um conjunto A tem uma inversa, que também é uma permutação de A. A composição de duas permutações de A é uma permutação de A.

Uma permutação f de um conjunto A pode ser interpretada como uma maneira de colocar os elementos de A em um conjunto de caixas, cada uma rotulada com um elemento de A. Ou seja, a permutação f está dizendo que o elemento x de A está na caixa de rótulo $f(x)$. Ou, alternativamente, que a caixa de rótulo x contém o elemento $f(x)$.

Permutações são muito importantes em computação. Por exemplo, a ordenação dos elementos de uma lista de n elementos, ou dos n registros de um arquivo, pode ser vista como a aplicação de uma permutação dos índices $\{0..\, n-1\}$.

Se f é função permutação de A, todas as potências de f, positivas e negativas, são permutações de A. Nesse caso define-se também a potência nula f^0 de f como sendo a identidade sobre o domínio A.

Funções piso e teto

Definição: A **função piso** (também chamada de **chão** ou **solo**) associa a cada número real x o maior inteiro que é menor ou igual a x. Este inteiro é denotado por $\lfloor x \rfloor$.

Observe que $\lfloor 1/3 \rfloor = \lfloor 2/3 \rfloor = 0$, $\lfloor -1/3 \rfloor = -1$, $\lfloor -2/3 \rfloor = -1$ e $\lfloor 5 \rfloor = 5$.

Definição: A **função teto** associa a cada número real x o menor inteiro que é maior ou igual a x. Este inteiro é denotado por $\lceil x \rceil$.

Observe que $\lceil 5/4 \rceil = 2$, $\lceil 7/4 \rceil = 2$, $\lceil -1/4 \rceil = 0$, $\lceil -3/4 \rceil = 0$ e $\lceil 4 \rceil = 4$

Tanto o piso quanto o teto são funções do conjunto $\mathbb{R}$ para o conjunto $\mathbb{Z}$. Essas funções tem algumas propriedades importantes:

- $\lfloor x \rfloor = n$ se, e somente se, $n \leq x < n + 1$.
- $\lfloor x \rfloor = n$ se, e somente se, $x - 1 < n \leq x$.
- $\lceil x \rceil = n$ se, e somente se, $n - 1 < x \leq n$.
- $\lceil x \rceil = n$ se, e somente se, $x \leq n < x + 1$.
- $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$.
- $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$.
- $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$.

Quociente inteiro e resto

Os conceitos de divisão (quociente) e resto de um número natural x por um inteiro positivo d são conhecidos e consensuais desde a antiguidade:
17 dividido por 3 é 5 com resto 2.
O resto dessa divisão é também chamado x *módulo* d

Em matemática, a divisão inteira é indicada às vezes pelo símbolo antigo '÷', e o resto pela sigla ' mod ', ambos usados como operações entre dois inteiros.
Dessa forma podemos escrever
$17 \div 3 = 5$ e $17 \bmod 3 = 2$.

Estas operações podem ser definidas usando a função piso:

$$x \div d = \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor$$

$$x \bmod d = x - d(x \div d) = x - d \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor$$

$$x \div d = \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor$$

$$x \bmod d = x - d(x \div d) = x - d \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor$$

Em matemática, estas fórmulas são adotadas como definições dessas duas operações também no caso de x ser um inteiro negativo. Assim,
$(-17) \div 3 = \lfloor -17/3 \rfloor = -6$, e portanto
$(-17) \bmod 3 = (-17) - 3(-6) = 1$.

Algumas linguagens de programação modernas, como Python, usam as definições acima, embora com outros símbolos. Outras linguagens, como C e Fortran, calculam $|x| \div d$ e $|x| \bmod d$, e devolvem o resultado com o sinal de x.

Não há consenso sobre a definição de $x \div d$ ou $x \bmod d$ quando d é negativo. Felizmente, este caso raramente ocorre, na prática ou na teoria.

Exercício: O dia da semana do dia primeiro de janeiro de um ano $n \geq 1582$ pode ser determinado pela fórmula:

$$\left(n + \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-1}{400} \right\rfloor\right) \mod 7$$

Se o resultado for 0, o dia primeiro de janeiro cai num domingo, se for 1 numa segunda-feira, etc..

- Use essa fórmula para encontrar o dia da semana de primeiro de janeiro do ano de seu aniversário.
- Justifique esta fórmula.

Fatorial

Uma função importante em computação é o **fatorial** de um número natural n, denotado por $n!$ e definido como o produto

$$n! \;=\; \prod_{k=1}^{n} k \;=\; 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n \qquad (1)$$

Por exemplo, $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, etc.. Note que quando n é zero a produtória acima é vazia, portanto $0! = 1$.

Função característica

A **função característica** de uma conjunto A qualquer é uma função f cujo domínio é o conjunto universal $\mathcal{U}$,e tal que, para qualquer elemento z, $f(z)$ é um valor lógico, **V** se z pertence a A, e **F** caso contrário. Denotaremos esta função por χ_A.
Ou seja $\chi_A(z)$ tem o mesmo valor lógico que a fórmula "$z \in A$". Podemos ver a função χ_A como uma representação do conjunto A.

Sequências finitas

Uma **sequência finita** é uma função x cujo domínio é um intervalo de inteiros $\{\, n \in \mathbb{Z} : r \leq n \leq s \,\}$, onde r e s são inteiros; que pode ser abreviado para $\{r..\, s\}$. Se os valores de x pertencem a um conjunto A, dizemos que x é uma sequência finita **sobre** A. Em algumas áreas da matemática e da computação, sequências finita também são chamadas de **listas**, **palavras**, **cadeias** ou **ênuplas**

A imagem de um inteiro n por uma sequência x é habitualmente denotada por x_n (em vez de $x(n)$). Os pares (n, x_n) são os **termos** ou **elementos** da sequência; o inteiro n é o **índice** do termo, e x_n é seu **valor**. Os inteiros r e s são o **índice inicial** e o **índice final** da sequência.

Exemplo: Seja $x : \{2..\, 6\} \to \mathbb{R}$ cujos termos são $\{(2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25), (6, 36)\}$. Podemos então escrever que $x_2 = 4$, $x_3 = 9$, e $x_n = n^2$ para todo $n \in \{2..\, 6\}$.

Note que uma sequência especifica não apenas os valores dos termos mas também sua ordem e seus índices. Note também que uma sequência pode ter mais de um termo com o mesmo valor. Duas sequências são iguais se, e somente se, elas tem exatamente os mesmos termos — mesmos índices e mesmos valores.

Notação para sequências finitas

Quando o índice inicial r é especificado pelo contexto, uma sequência finita é geralmente denotada colocando-se os valores dos termos entre parênteses e separados por vírgulas. Por exemplo, se convencionamos que os índices começam com zero, a notação $(1, 2, 2, 5)$ representa a sequência $\{(0, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 5)\}$.

A sequência (2) não é a mesma coisa que o inteiro 2. Além disso, pela definição acima, a sequência $(2, 3)$ não é a mesma coisa que o par ordenado $(2, 3)$. Devido a esta confusão, alguns autores (e algumas linguagens de programação) usam outros símbolos, como colchetes angulares $\langle \ldots \rangle$, ou colchetes comuns $[\ldots]$, no lugar de parênteses para denotar sequências.

Índice inicial padrão

Em matemática (e em algumas linguagens de programação, como `FORTRAN`), o índice inicial de uma sequência é geralmente 1 por convenção. Uma vantagem desta escolha é que o n-ésimo elemento de uma sequência x é x_n.

Alguns autores, entretanto, preferem numerar os termos a partir de 0. Note que, neste caso, em uma sequência com n termos os índices variam de 0 a $n - 1$. Além disso, o elemento de índice k (ou seja x_k) é o $k + 1$-ésimo elemento da sequência. Mesmo assim, a numeração a partir de 0 tem certas vantagens em computação e é o padrão de várias linguagens de programação modernas, como `C`, `Java` e `Python`.

Comprimento

O **comprimento** de uma sequência finita é o número de termos, geralmente denotado por $|x|$.

Exercício: Se uma sequência tem índice inicial r e índice final s, qual é o seu comprimento? Se ela tem índice inicial 0 e comprimento n, qual é o índice final? E se ela tem índice inicial 1 e comprimento n?

Há uma única sequência de comprimento zero, a **sequência vazia**, denotada por $()$, que tem domínio vazio e portanto não tem nenhum termo. Neste caso os índices inicial e final não são definidos. Note que o intervalo $\{r..s\}$ é vazio para quaisquer r e s com $r > s$.

Concatenação

Informalmente, a **concatenação** de duas sequências finitas x e y é uma sequência finita que tem todos os termos de x, seguidos de todos os termos de y. Por exemplo, a concatenação de $(10, 20, 30)$ e $(40, 50)$ é $(10, 20, 30, 40, 50)$.

Esta operação pode ser indicada de muitas maneiras, por exemplo com um ponto $x \cdot y$, com uma barra $x|y$ ou com a mera justaposição xy. Obviamente, o comprimento da concatenação é a soma dos comprimentos das duas sequências.

Para definir precisamente este conceito é preciso estabelecer um índice inicial para a sequência resultante. Por exemplo, se convencionarmos que todas as sequências tem índice inicial zero, a concatenação é a sequência z tal que

$$z_n = \begin{cases} x_n, & \text{se } 0 \leq n < p \\ y_{n-p}, & \text{se } p \leq n < p+q \end{cases} \tag{2}$$

onde $p = |x|$ e $q = |y|$.

Exercício: Adapte a fórmula da concatenação (2) para a convenção em que todas as sequências tem índice inicial 1.

Exercício: Escreva a fórmula geral da concatenação (2) para o caso em que os domínios de x e y são $\{r' .. s'\}$ e $\{r'' .. s''\}$, respectivamente, e o índice inicial do resultado é r.

Observe que, se o índice inicial é fixo, a concatenação com a sequência vazia não tem efeito nenhum: $x \cdot () = () \cdot x = x$ para qualquer sequência finita x.

Subsequências e subcadeias

Segundo alguns autores, uma **subsequência** de uma sequência x é simplesmente uma restrição y de x a um subconjunto R de seu domínio. Por exemplo, segundo esta definição, a função $y = \{(3, 30), (5, 20)\}$ é a subsequência de $x = \{(2, 20), (3, 30), (4, 30), (5, 20)\}$ determinada pelo conjunto $R = \{3, 5\}$.

Uma desvantagem desta definição é que a subsequência nem sempre é uma sequência, pois o novo domínio R nem sempre é um intervalo de inteiros consecutivos. Por esse motivo, alguns autores especificam que os termos da subsequência devem ter seus índices alterados para inteiros consecutivos a partir de um início convencional. Com esta definição, e com índice inicial 0, a função $y = \{(0, 30), (1, 20)\}$ é a subsequência de $x = \{(0, 20), (1, 30), (2, 30), (3, 20)\}$ determinada pelo conjunto $R = \{1, 3\}$.

Alguns autores usam a palavra **subcadeia** para indicar que o conjunto R é um intervalo de inteiros. Muitas linguagens de programação incluem funções para extrair subcadeias de cadeias dadas.