Matemática Discreta

Pedro Hokama

Fontes

- Gomide, Anamaria; Stolfi, Jorge. Elementos de Matematica Discreta para Computação.
- Rosen, Kenneth H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th Edition, 2019.

Somatórias e produtórias

Muitas quantidades importantes em matemática são definidas como a soma de uma quantidade variável de parcelas também variáveis, por exemplo a soma $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n$, para algum inteiro n. Para estas situações, uma notação muito prática é a **somatória** (também chamada **somatório** ou **notação sigma**), introduzida por Joseph Fourier em 1820. Nesta notação, a soma acima é escrita

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k \qquad \text{ou} \qquad \textstyle\sum_{k=1}^{n} 2^k$$

Em geral, a notação sigma tem a forma

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) \qquad \text{ou} \qquad \textstyle\sum_{k=m}^{n} f(k)$$

onde k é uma variável arbitrária (o **índice** ou a **variável indexadora**), $f(k)$ é uma fórmula qualquer que depende de k (o **termo geral** da somatória), e m, n são inteiros que não dependem de k.

Esta soma também pode ser escrita

$$\sum_{\substack{k \\ m \leq k \leq n}} f(k)$$

Costuma-se simplificar esta notação para

$$\sum_{m \leq k \leq n} f(k)$$

quando a variável índice k é óbvia pelo contexto.

Uma variante mais geral da notação Σ é

$$\sum_{\substack{k \\ P(k)}} f(k)$$

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq 10 \\ k \text{ ímpar}}} k^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 \qquad (1)$$

$$\sum_{\substack{p \text{ primo} \\ p \text{ divide } 140}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \qquad (2)$$

Outra variante similar desta notação é

$$\sum_{k \in K} f(k)$$

Observe que se o domínio é vazio, o valor da somatória é zero, por definição. Em particular, a somatória $\sum_{k=m}^{n} f(k)$ é zero sempre que $m > n$.

Somatórias básicas

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$$

Manipulação de somatórias

A notação Σ pode ser manipulada de várias maneiras. Em primeiro lugar, observe que a variável índice k pode ser substituída por qualquer outra letra $i, j, l, \ldots$ que não tenha significado definido no contexto. Podemos também trocar a variável indexadora k por uma variável relacionada a ela de maneira biunívoca, com o intervalo de variação devidamente ajustado.

Exemplo: Trocando a variável k pela variável $i = k - 1$, temos

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i+1}$$

Note que para identificar o intervalo da variável i usamos a equação $i = k - 1$, enquanto que para modificar o termo usamos a equação equivalente $k = i + 1$.

Exemplo: Podemos simplificar a somatória

$$\sum_{\substack{1 \le k \le 10 \\ k \text{ ímpar}}} k^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2$$

trocando a variável k por $2i + 1$, resultando em

$$\sum_{i=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (2i + 1)^2$$

Note que a equação

$$\sum_{\substack{p \text{ primo} \\ p \text{ divide } 140}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}$$

não pode ser simplificada desta maneira, pois não se conhece uma fórmula explícita para os números primos.

Distributividade: Para qualquer número c

$$\sum_{k \in K} cf(k) = c\left(\sum_{k \in K} f(k)\right)$$

Esta propriedade nos permite mover fatores constantes (que não dependem do índice) para dentro ou para fora da somatória.

Associatividade:

$$\sum_{k \in K}(f(k) + g(k)) = \sum_{k \in K} f(k) + \sum_{k \in K} g(k)$$

A associatividade nos permite substituir uma somatória de somas pela soma de somatórias sobre os mesmos índices, ou vice-versa.

Decomposição do domínio: Se $\{K_1, K_2\}$ é uma partição de K, então

$$\sum_{k \in K} f(k) = \left(\sum_{k \in K_1} f(k)\right) + \left(\sum_{k \in K_2} f(k)\right)$$

Esta regra diz que podemos quebrar uma somatória em duas somatórias parciais, desde que cada valor do índice apareça no domínio de uma, e apenas uma, dessas duas partes. Esta regra pode ser generalizada para partições do domínio K em qualquer número de partes.

Comutatividade: Se p é uma permutação qualquer de K,

$$\sum_{k \in K} f(k) = \sum_{k \in K} f(p(k))$$

A comutatividade nos diz que podemos colocar os termos em qualquer ordem. Uma versão mais geral desta regra é:

Troca de domínio: Se p é uma função bijetora qualquer de K para um conjunto $J \subseteq \mathbb{Z}$,

$$\sum_{k \in K} f(p(k)) = \sum_{j \in J} f(j)$$

Foi o que fizemos em:

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i+1}$$

Exemplo: Seja x uma sequência qualquer de números reais, e considere a somatória $\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k)$. Usando essas regras, podemos reescrever a somatória como segue:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k) &= \sum_{k=1}^{n} x_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} x_k \\
&= \sum_{i=2}^{n+1} x_i - \sum_{k=1}^{n} x_k \\
&= \sum_{i=2}^{n} x_i + x_{n+1} - x_1 - \sum_{k=2}^{n} x_k \\
&= x_{n+1} - x_1
\end{aligned}$$

A identidade do exemplo é conhecida como **somatória telescópica** porque uma parte de cada parcela “está encaixada em” (isto é, cancela) uma parte da parcela anterior, como ocorre com as peças de uma luneta.

Para calcular a somatória $\sum_{k=1}^{n} k^2$, observamos que $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$, portanto $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$. Temos então que

$$\sum_{k=1}^{n}((k+1)^3 - k^3) = \sum_{k=1}^{n}(3k^2 + 3k + 1)$$

O lado esquerdo é uma soma telescópica, portanto temos

$$(n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

ou seja

$$\begin{aligned} 3\sum_{k=1}^{n} k^2 &= (n+1)^3 - 1 - 3\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= (n+1)^3 - 1 - 3n(n+1)/2 - n \\ &= (2n^3 + 3n^2 + n)/2 \end{aligned}$$

Logo

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n(n+1)(2n+1))/6$$

Exercício: [Soma de PA] Calcule a somatória $\sum_{k=1}^{n}(a + r(k-1))$, cujas n parcelas são parte de uma progressão aritmética com termo inicial a e passo r arbitrários.

Somatórias múltiplas

Os termos de uma somatória podem ser especificados por dois ou mais índices, como no exemplo abaixo:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j,k \\ 1 \le j \le 3 \\ 2 \le k \le 4}} f(j,k) &= f(1,2) + f(1,3) + f(1,4) + \\ & \quad f(2,2) + f(2,3) + f(2,4) + \\ & \quad f(3,2) + f(3,3) + f(3,4) \end{aligned} \tag{3}$$

Este mesmo exemplo pode ser também escrito usando duas vezes a notação Σ, isto é, como uma somatória de somatórias:

$$\sum_{\substack{j,k \\ 1 \le j \le 3 \\ 2 \le k \le 4}} f(j,k) = \sum_{1 \le j \le 3} \sum_{2 \le k \le 4} f(j,k) = \sum_{2 \le k \le 4} \sum_{1 \le j \le 3} f(j,k)$$

Podemos entender as fórmulas anteriores como duas maneiras de somar todos os elementos de uma matriz: coluna por coluna ou linha por linha.

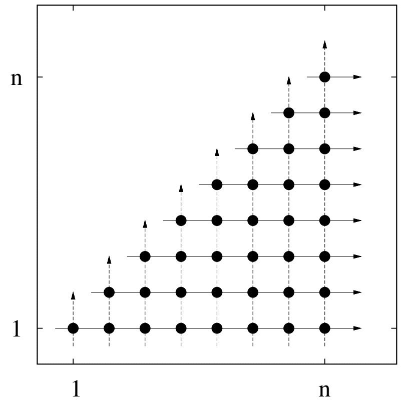
Mudança de ordem de somatórias

Podemos trocar a ordem de duas somatórias, quando o domínio de cada variável é independente da outra variável:

$$\sum_{j \in J} \sum_{k \in K} f(j,k) = \sum_{\substack{j \in J \\ k \in K}} f(j,k) = \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} f(j,k).$$

Quando o domínio da soma interna depende da variável índice da somatória externa, a troca exige mais cuidado. Por exemplo,

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} a_{j,k} = \sum_{1 \le j \le k \le n} a_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} a_{j,k}.$$



O eixo horizontal é a variável k, o eixo vertical é a variável j.

Exercício: Para todo número inteiro positivo n, o n-ésimo número hamônico é

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n}.$$

Prove que, para todo inteiro n maior ou igual a 2,

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n.$$

Distributividade generalizada

Outra regra importante para somatórias duplas é a da **distributividade generalizada**, que permite trocar o produto de duas somatórias por uma somatória dupla. Para quaisquer conjuntos $J, K \subseteq \mathbb{Z}$, e quaisquer funções $f : J \to \mathbb{R}$, $g : K \to \mathbb{R}$

$$\left(\sum_{j \in J} f(j)\right)\left(\sum_{k \in K} g(k)\right) = \sum_{\substack{j \in J \\ k \in K}} f(j)g(k) = \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} f(j)g(k)$$

Note que esta regra também permite trocar uma somatória dupla por um produto de duas somatórias. Para isso basta que o domínio da somatória interna não dependa do índice da soma externa, e que o termo geral possa ser fatorado no produto de duas fórmulas, cada uma delas dependendo de um dos dois índices apenas.

Majoração de somatórias

Muitas vezes não precisamos saber o valor exato de uma somatória, basta saber um limitante superior ou inferior.

Majoração dos termos:
Algumas vezes um bom limitante para o valor de uma somatória pode ser obtido limitando cada um de seus termos pelo termo de maior valor. Por exemplo:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} &= \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \cdots + \frac{n}{n-1} \\ &\leq \textstyle\sum_{k=1}^{n} 2 \\ &= 2n.\end{aligned}$$

Também podemos majorar cada termo da somatória por alguma outra fórmula cuja somatória é conhecida.
Por exemplo, observe que, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\frac{k}{k+1} 2^k < 2^k$$

Podemos então concluir que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k+1} 2^k &< \sum_{k=0}^{n} 2^k \\ &= 2^{n+1} - 1.\end{aligned}$$

Majoração por integrais:
Suponha que f é uma função crescente de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{R}$.
Por exemplo $f(x) = x^2$.
Agora considere o seguinte somatório.

$$\sum_{x=m}^{n} x^2$$

Considere uma outra função $f^* : \mathbb{R} \leftarrow \mathbb{R}, f^*(x) = x^2$.
Podemos observar que:

$$\begin{aligned}\sum_{x=m}^{n} x^2 &\leq \int_{m}^{n+1} x^2 \\ &= \frac{x^3}{3}\Big|_{n}^{n+1} \\ &= \frac{(n+1)^3 (m)^3}{3}\end{aligned}$$

Minoração por integrais: Analogamente podemos utilizar integrais para encontrar um limitante inferior para uma somatória. Por exemplo:

$$\sum_{x=1}^{n} \frac{1}{x} \geq \int_{1}^{n+1} \frac{1}{x} = \ln x \Big|_{1}^{n+1} = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$$

Somas infinitas

A notação Σ é também usada para **somas infinitas**, também chamadas de **séries**. Uma somatória infinita é o limite de uma somatória finita, quando o valor máximo da variável indexada tende para infinito. Ou seja,

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f(k)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \ = \ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots \ = \ 2$$

e

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \ = \ 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots \ = \ +\infty$$

Observe que o limite pode não existir, ou pode ser infinito. Um exemplo clássico é a soma dos inversos dos inteiros positivos,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

A soma dos n primeiros termos é o número harmônico H_n que é maior ou igual a $\ln(n+1)$, e portanto tende a infinito quando n tende a infinito.

Produtórias

Sejam m, n números inteiros e f uma função definida sobre os inteiros. A notação

$$\prod_{k=m}^{n} f(k)$$

denota o produto dos valores $f(k)$ para todos os inteiros k tais que $m \leq k \leq n$.

Uma fórmula deste tipo é chamada de **produtória** ou **produtório**. Se não existe nenhum k no intervalo especificado (isto é, se $m > n$), o valor desta fórmula é 1 (e não zero!), por definição.

Exercício: Calcule o valor da produtória $\prod_{k=-2}^{+2} k^2 + 1$.

Exercício: Dê fórmulas explícitas (sem $\prod$ nem '. . . ') para o valor das produtórias abaixo:

1. $\prod_{k=1}^{n} 3$
2. $\prod_{k=1}^{n} k$
3. $\prod_{k=-n}^{n} k$