Matemática Discreta

Pedro Hokama

Fontes

- Gomide, Anamaria; Stolfi, Jorge. Elementos de Matematica Discreta para Computação.
- Rosen, Kenneth H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th Edition, 2019.

Sequências infinitas e recorrências

Sequências infinitas

- Uma **sequência infinita** é uma função cujo domínio é um conjunto da forma $\{ n \in \mathbb{Z} : n \geq r \}$ para algum inteiro r.
- Tipicamente o índice inicial r é 1 ou 0 (especialmente para computação).
- Valem os mesmos conceitos vistos para sequências finitas. Vale lembrar:
- Definimos x_n como o **termo geral** da sequência.

Exemplo: Seja $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ onde $x_n = n^2$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Os termos da sequência são: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 9$, ...

- Também podemos definir sequências cujo domínio são todos os inteiros $\mathbb{Z}$, nesse caso dizemos que a sequência é bi-infinita.
- Também valem os conceitos de subsequência vistos anteriormente.

- Uma sequência infinita não pode ser especificada listando todos seus termos.
- Devemos definir o termo geral x_n por algum critério preciso que depende da variável índice n.
- Não precisa ser uma fórmula algébrica. Por exemplo, considere a sequência p cujos termos são os inteiros primos, em ordem crescente de valor. Os primeiros termos dessa sequência são $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 \ldots$.
- Os termos da sequência estão bem definidos, porém até hoje não se conhece nenhuma fórmula algébrica para o termo geral p_n.

Recorrência

- Muitas sequências importantes são definidas recursivamente.

  Exemplo: A sequência dos **números de Fibonacci** é definida por

$$f_0 = 0 \qquad f_1 = 1$$
$$f_n = f_{n-2} + f_{n-1} \quad \text{para todo } n \geq 2$$

  Os primeiros termos dessa sequência são $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$.
- fornecendo-se um ou mais termos iniciais e uma fórmula que determina os demais termos. Essa fórmula é chamada de **recorrência**.

Exemplo: Uma **progressão aritmética** (PA) é uma sequência x definida pela recorrência

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_n &= x_{n-1} + r \quad \text{para todo } n > 0 \end{aligned}$$

onde a e r são valores reais, chamados de **termo inicial** e **passo** ou **incremento** da progressão.

Qual é o x_{10000} termo dessa sequência? Precisamos calcular todos os termos anteriores?

$$x_n = a + nr$$

Exemplo: Uma **progressão geométrica** (PG) é uma sequência x definida pela recorrência

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_n &= x_{n-1} \cdot r \quad \text{para todo } n \geq 1 \end{aligned}$$

onde a e r são valores reais, chamados de **termo inicial** e **razão** da progressão.

$$x_n = ar^n$$

Exercício: Suponha que um casal de tatus marciano começa a dar crias com dois anos de idade e produz 6 crias (três casais) de tatuzinhos a cada ano. Suponha que um rancho de criação de tatus começou com 1 casal recém-nascido em 2000, e que nenhum tatu foi acrescentado ou eliminado do “rebanho” desde essa época. Escreva uma definição recursiva para o número x_n de tatus que existem no ano n.

Resolução de recorrências

- Determinar uma fórmula explícita para uma sequência definida recursivamente é um problema difícil em geral, mas há técnicas que resolvem certos casos especiais.

Recorrência aditiva simples

- Um desses casos especiais são as recorrências da forma

$$x_0 = a$$
$$x_n = x_{n-1} + f(n) \text{ para todo } n \geq 1$$

onde f é uma função qualquer.

$$x_0 = a$$
$$x_n = x_{n-1} + f(n) \text{ para todo } n \geq 1$$

- Podemos verificar com indução que a solução desta recorrência é:

$$x_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

Considere uma Progressão aritmética, onde $f(n) = r$ (e portanto não depende de n.

$$x_0 = a$$
$$x_n = x_{n-1} + r \text{ para todo } n \geq 1$$

$$x_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n} f(k) = a + \sum_{k=1}^{n} r$$
$$x_n = a + nr$$

Exercício: Determine a fórmula para o termo geral x_n da recorrência

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_n &= x_{n-1} + 2n \quad \text{para todo } n \leq 1 \end{aligned}$$

Recorrência multiplicativa simples

- Outro caso especial são as recorrências da forma

$$x_0 = a$$
$$x_n = f(n) \cdot x_{n-1} \text{ para todo } n \geq 1$$

onde f é uma função qualquer.

$$x_0 = a$$
$$x_n = f(n) \cdot x_{n-1} \text{ para todo } n \geq 1$$

- Verificamos que para $n \geq 1$

$$x_n = x_0 \cdot \prod_{k=1}^{n} f(k)$$

- Uma Progressão geométrica é um caso particular onde $f(n) = r$ e não depende de n.

$$x_0 = a$$
$$x_n = r \cdot x_{n-1} \text{ para todo } n \geq 1$$

Então para $n \geq 1$

$$x_n = a \cdot \prod_{k=1}^{n} r$$
$$x_n = ar^n$$

Exercício: Determine a fórmula para o termo geral x_n da recorrência

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_n &= \tfrac{2}{n} x_{n-1} \quad \text{para todo } n > 0 \end{aligned}$$

- O índice inicial (caso base) pode ser um m qualquer diferente de 0.
- As recorrências podem ser mais complexas do que as apresentadas. Algumas podem ter uma solução. Outras talvez não.
- As vezes pode ser suficiente encontrar uma majoração ou uma minoração para uma recorrência.
- Algumas recorrências podem ser resolvidas através do *Teorema Mestre*