Matemática Discreta

Pedro Hokama

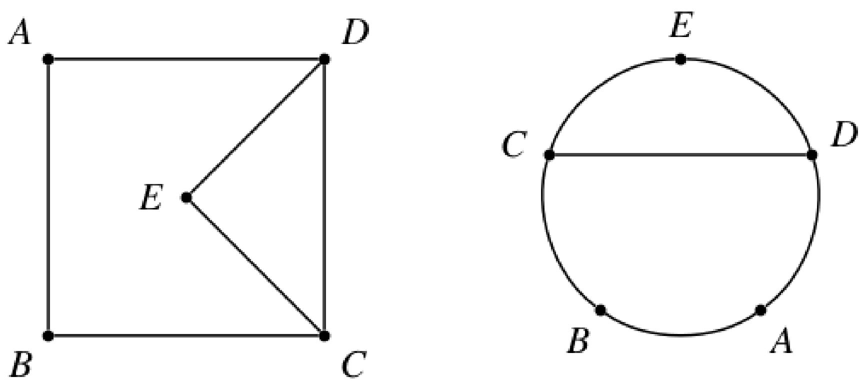
Fontes

- Gomide, Anamaria; Stolfi, Jorge. Elementos de Matematica Discreta para Computação.
- Rosen, Kenneth H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th Edition, 2019.

Introdução à Teoria de Grafos

Introdução à Teoria de Grafos

- Informalmente, um grafo é um modelo matemático para representar uma coleção de objetos (chamados **vértices**) que são ligados aos pares por outra coleção de objetos (chamados **arcos** ou **arestas**).
- Vértices são geralmente representados por pontos, círculos ou caixas, e Arestas por linhas ligando os vértices. As posições dos vértices e a forma das linhas são irrelevantes; o grafo representa a **topologia**, isto é, quem está ligado a quem.

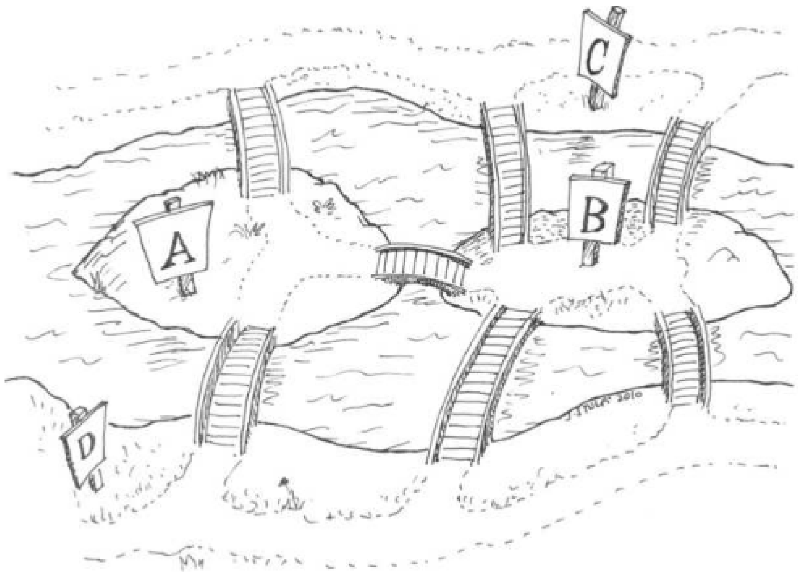


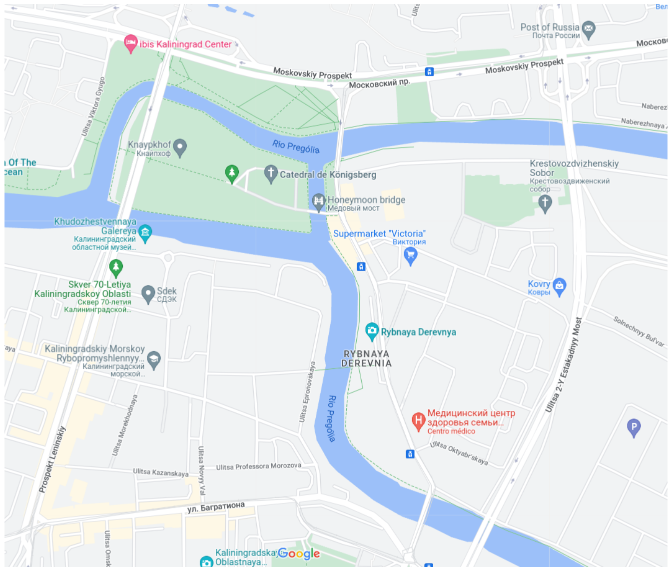
- Grafos são extremamente úteis para modelar problemas em muitas áreas de aplicação.
- Por exemplo, a malha rodoviária de um estado pode ser representada por um grafo em que as cidades são os vértices, e cada trecho de estrada entre cidades consecutivas é uma aresta.
- Um circuito elétrico pode ser visto como um grafo onde os vértices são condutores metálicos e as arestas são resistores, capacitores, e outros componentes.

- Uma molécula pode ser abstraída por um grafo onde os átomos são os vértices e as arestas são as ligações covalentes.
- Uma treliça metálica pode ser entendida como um grafo onde as arestas são as barras e os vértices são as juntas.

- Grafos são especialmente importantes em computação, para modelar conceitos tanto de hardware (desde circuitos digitais até a internet mundial) quanto de software (como registros em bancos de dados, blocos e módulos de programas, protocolos de transmissão de dados e muito mais).
- Os vértices podem representar usuários de uma rede social e as arestas suas conexões.
- Páginas web e links entre elas.
- Máquinas (reais ou virtuais) e dependência de serviços. Etc, etc.

- O conceito abstrato de grafo e o estudo matemático de suas propriedades foi uma das muitas contribuições do matemático suíço Leonhard Euler (1707–1783).
- Um quebra-cabeças famoso na época era encontrar um passeio que visitasse todas as pontes da cidade de Königsberg passando uma única vez em cada ponte.





- Euler resumiu as propriedades essenciais do mapa por um diagrama de pontos ligados por linhas.
- Apenas analisando esse diagrama abstrato, ele provou que o tal passeio era impossível.
- Este trabalho (publicado em 1736) é considerado o primeiro artigo da teoria de grafos.

- A teoria matemática dos grafos foi desenvolvida gradualmente no século 19, quando surgiram importantes aplicações em química e engenharia.
- Sua importância cresceu muito no século 20, com o surgimento das redes de telefonia, dos circuitos digitais e, por fim, dos computadores.

Definição formal

- Há muitas maneiras de definir o conceito de grafo. Qual delas é melhor depende da aplicação. De modo geral, adotaremos as seguintes definições de grafo.
- Um **grafo** G é uma dupla da forma (V, E) onde V e E são conjuntos chamados de **vértices** e **arestas**; cada elemento de E é um subconjunto de dois vértices $\{u, v\}$ em que $u \in V$ e $v \in V$.

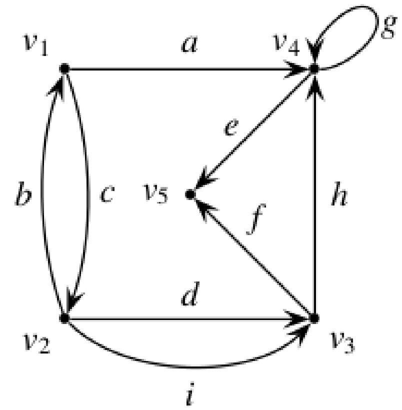
Definição alternativa

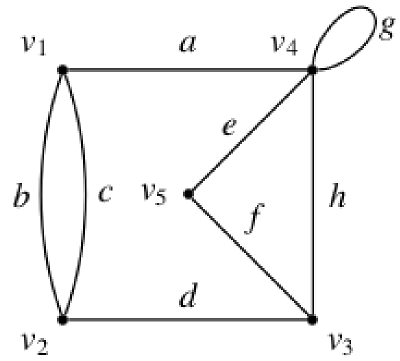
- Um **grafo** G é uma tripla da forma (V, E, F) onde V e E são conjuntos quaisquer, chamados de **vértices** e **arestas**; e F é uma função, chamada **função de incidência**, que a cada elemento e de E associa um par $F(e)$ de vértices, que são chamados de **extremos** de e.

Orientação

- Há também a possibilidade das arestas serem pares ordenados (u, v) de vértices. Nesse caso as arestas tem uma direção, ou sentido. Muitas vezes nesses casos chamamos de "arcos".

- Se esse for o caso, o grafo é dito **orientado** ou **dirigido**.

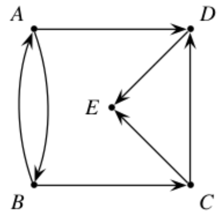


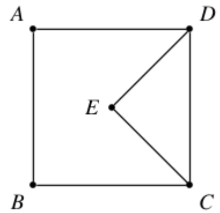


Grafo Simples vs. Arestas paralelas e laços

- Pelas definições acima, pode haver um número arbitrário de arestas com os mesmos extremos.
- Ou seja podemos ter $e', e'' \in E$ com $e' \neq e''$ mas $F(e') = F(e'')$. Este modelo também permite laços, ou seja arestas e tais que $F(e) = (u, u)$ (no caso orientado) ou $F(e) = \{u, u\} = \{u\}$ para algum $u \in V$.

- Usaremos o termo **grafo simples** para significar um grafo sem laços e sem arestas paralelas. (Para alguns autores, aliás, **grafo** significa “grafo simples” exclusivamente, e usam o termo **multigrafo** quando há arestas paralelas.)





Grafos finitos e infinitos

- Um grafo pode ter infinitos vértices e/ou infinitas arestas.
- Tais grafos infinitos tem aplicações na matemática, mas os que ocorrem em computação geralmente são finitos em ambos os aspectos.
- Aqui vamos considerar principalmente grafos finitos.

Conceitos fundamentais

- **Incidência:** Se um vértice v de um grafo G é um dos extremos de alguma aresta e de G, dizemos que e **incide** em v, e vice-versa. (Podemos definir uma relação de incidência)
- **Adjacência:** Dois vértices u, v são ditos **adjacentes** ou **vizinhos** em um grafo G se e somente se existe uma aresta de G cujos extremos são u e v. Esta relação (simétrica) entre vértices é a **relação de adjacência** (**não orientada**) do grafo.

- **Dominância:** Em um grafo orientado, pode-se dizer que um vértice u **domina** ou **atinge** outro vértice v se e somente se existe uma aresta de G com origem u e destino v.
- **Grau do vértice:** Em um grafo G, definimos o **grau** de um vértice v como o número de arestas de G incidentes a v. Nesta definição, cada laço deve ser contado duas vezes. Denotaremos o grau por $d(v)$.

- Se o grafo G é orientado, podemos também definir o **grau de entrada** e o **grau de saída** de um vértice v como o número de arestas que entram em v ou saem de v, respectivamente. Denotaremos esses números por $d^+(v)$ e $d^-(v)$, respectivamente. Note que cada laço é contado uma vez em ambos os graus. Nesse caso, temos que $d(v) = d^+(v) + d^-(v)$.

Teorema: Em qualquer grafo $G = (V, E)$, a soma dos graus de todos os vértices é igual ao dobro do número de arestas. Isto é

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\,|E|$$

Prova: Cada aresta (laço ou não) contribui duas unidades na soma dos graus.

Corolário: Em todo grafo $G = (V, E)$, o número de vértices de grau ímpar é par.

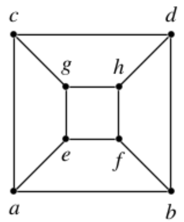
Prova: Sejam P o conjunto dos vértices de grau par e I o conjunto dos vértices de grau ímpar. Então

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in P} d(v) + \sum_{v \in I} d(v) = 2\,|E|$$

$$\text{logo } \sum_{v \in I} d(v) = 2\,|E| - \sum_{v \in P} d(v)$$

O lado direito da equação acima é par. Como a soma de parcelas ímpares é par somente se o número de parcelas for par, concluímos que o $|I|$ é par. $\square$

- **Grafos regulares:** Um grafo G é **regular** se todos os seus vértices tem o mesmo grau. Em particular se o grau dos vértices é r então G é chamado ***r*-regular**— regular de grau r. Se o grafo G é orientado os graus de entrada e saída devem ser iguais.



- **Grafos completos:** Um grafo G é chamado **completo** se não tem laços e existe exatamente uma aresta entre cada par de vértices. Note que um grafo completo é sempre um grafo simples e $(n-1)$ -regular.

Exercício: Quantas arestas tem um grafo completo com n vértices?

Exercício: Quantas arestas possui um grafo k-regular com n vértices?

Percursos em grafos

Passeios, trilhas e caminhos

- Um **passeio** em um grafo G é uma sequência $P = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$, onde cada v_i é um vértice de G, cada e_i é uma aresta de G, e os extremos de e_i são v_{i-1} e v_i. O inteiro k é o **comprimento do passeio**, denotado por $|P|$. Quando o grafo é simples podemos definir o passeio apenas pela sequência de seus vértices. Em particular, um passeio pode ter apenas um vértice e nenhuma aresta, $P = (v_0)$. Tal passeio é dito **trivial**, e seu comprimento é zero.

- Se as arestas $e_1, e_2, \ldots, e_k$ são todas distintas o passeio é chamado de **trilha**. Note que uma trilha pode repetir vértices.
- Um **caminho** em um grafo é um passeio que não repete vértices. É fácil ver que um caminho não pode visitar mais de uma vez a mesma aresta, portanto todo caminho também é uma trilha.
  Note que um caminho de comprimento k visita exatamente $k + 1$ vértices distintos e tem exatamente $k - 1$ vértices internos.

Circuitos e ciclos

- Dizemos que um passeio $P = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$ com $k \geq 1$ é **fechado** se $v_0 = v_k$, isto é, se ele começa e termina no mesmo vértice.
- Um **circuito** ou **ciclo** em um grafo G é um passeio fechado $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_{k-1}, v_{k-1}, e_k, v_k)$ com $k \geq 1$ que não repete vértices nem arestas exceto $v_0 = v_k$.
- Em grafos orientados, passeios, trilhas, caminho e circuitos orientados seguem a mesma definição, mas os arcos devem respeitar a orientação.

Subgrafos

- Um grafo H é um **subgrafo** de outro grafo G se $V_H \subseteq V_G$, $E_H \subseteq E_G$, e cada aresta de E_H tem os mesmos extremos em H e em G.
- Se G é orientado, H também precisa ser orientado e as arestas precisam ter também a mesma orientação. Ou seja, F_H é a restrição F_G a E_H.

- Dado o grafo G, cada subgrafo H é completamente determinado pelos conjuntos V_H e E_H. Se $V_H = V_G$ o subgrafo H é chamado **subgrafo gerador** ou **subgrafo espalhado**.

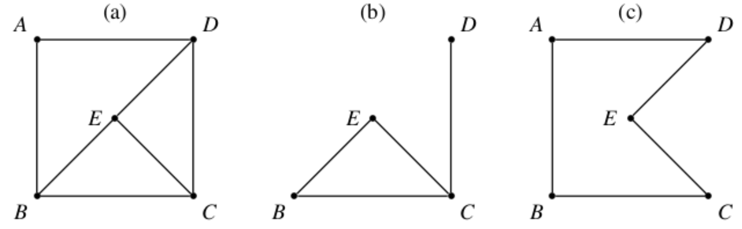


Figura 13.6: (a) Um grafo. (b) Um dos seus subgrafos. (c) Um subgrafo gerador.

Subgrafos Induzido

- Se X é um subconjunto de V_G, define-se o **subgrafo de** G **induzido por** X, denotado por $G[X]$, como sendo o maior subgrafo de G cujo conjunto de vértices é X. Isto é, o subgrafo com esses vértices cujas arestas são todas as arestas de G que possuem ambos os extremos em X.

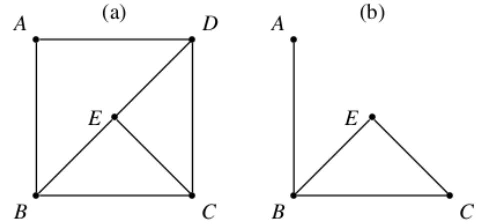


Figura 13.7: (a)Um grafo G. (b) O subgrafo induzido $G[X]$ onde $X = \{A, B, C, E\} \subseteq \mathcal{V} G$.

- Um subgrafo induzido por um conjunto de arestas, contêm somente aquelas arestas, e somente os vértices que são extremos dessas arestas.

Grafos complementares

- Dois grafos simples não orientados G e H são ditos **complementares** se eles tem o mesmo conjunto de vértices V, e para qualquer par de vértices distintos $u, v \in V$, a aresta $\{u, v\}$ está em G se e somente se ela não está em H.
- No caso de grafos simples orientados, vale a mesma definição, com o par ordenado (u, v) em vez de $\{u, v\}$.

- Dito de outra forma, dois grafos simples G e H são complementares se e somente se $V_G = V_H$, $E_H \cap E_G = \emptyset$, e $E_H \cup E_G$ são todos os pares de vértices distintos. O grafo complementar de um grafo simples G é chamado de **complemento** de G e denotado por $\overline{G}$. Observe que $G \cup \overline{G}$ é o grafo simples completo com vértices V_G.

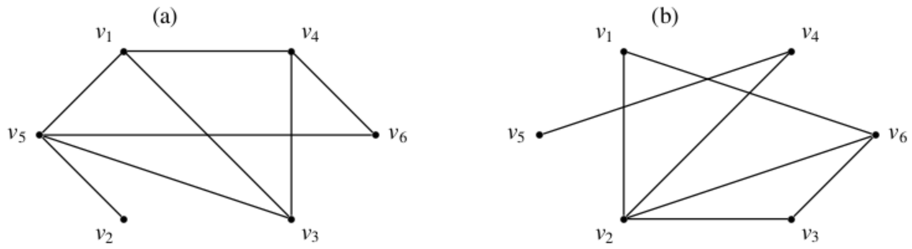


Figura 13.10: (a) Um grafo G. (b) O seu complemento $\bar{G}$

Representação matricial de grafos

- A **matriz de adjacência** de um grafo finito G é uma representação matricial da sua relação de adjacência. Ou seja, escolhida uma ordenação total $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ dos vértices de G, construímos a matriz booleana M de n linhas e n colunas onde M_{ij} é Verdade se e somente se E inclui uma aresta com extremos (v_i, v_j) no caso orientado, ou $\left\{v_i, v_j\right\}$ no caso não orientado. Observe que, neste segundo caso, a matriz será simétrica ($M_{ij} = M_{ji}$ para quaisquer i e j).

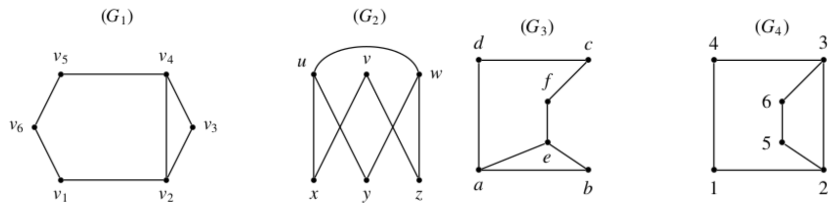
- Se a definição permite arestas múltiplas, a matriz booleana de adjacências não é mais suficiente para representar completamente o grafo. Para tal fim, podemos entretanto usar uma matriz M onde cada elemento M_{ij} é um número natural, especificamente o número de arestas com extremos (v_i, v_j) ou $\{v_i, v_j\}$, conforme o caso. Porém, esta representação ainda não permite saber **quais** arestas ligam esses dois vértices.

Matriz de incidência

- A **matriz de incidência** de um grafo finito não orientado G é simplesmente a representação matricial da sua relação de incidência. Ou seja, escolhida uma ordenação total $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ dos vértices de G e uma ordenação total $e_0, e_1, \ldots, e_{m-1}$ das arestas, construímos a matriz booleana M de n linhas e m colunas onde M_{ik} é V se, e somente se o vértice v_i é um extremo da aresta e_k.

- Dadas as listas de vértices e arestas, a matriz de incidência determina completamente o grafo, mesmo quando este possui laços ou arestas paralelas.
- Em algumas aplicações, é conveniente combinar estas duas matrizes em uma única matriz M cujos elementos são inteiros no conjunto $\{+1, 0, -1\}$; sendo que M_{ik} é $+1$ se e_k entra em v_i, -1 se e_k sai de v_i, e 0 se e_k não incide em v_i. Ou seja, $M_{ik} = M^+_{ik} - M^-_{ik}$, supondo que $V = 1$ e $F = 0$. Entretanto, esta representação somente pode ser usada se o grafo não tiver laços.

Isomorfismos de grafos



- Observe os grafos G_1, G_2 e G_3 tem a mesma estrutura, diferindo apenas nos “nomes” dos vértices e das arestas; enquanto que o grafo G_4 tem uma estrutura diferente. (Por exemplo, G_4 é o único que tem um circuito de comprimento 4.)

Isomorfismos de grafos

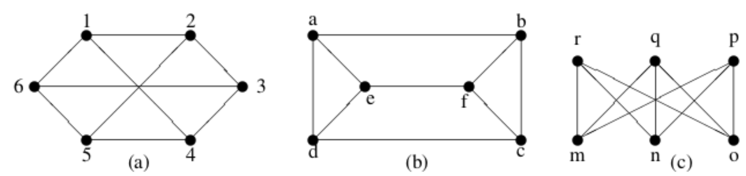
- Dizemos que dois grafos G e H são **isomorfos** se existem bijeções $f : V_G \to V_H$ e $g : E_G \to E_H$ tais que um vértice v é extremo de uma aresta e no grafo G se e somente se $f(v)$ é extremo da aresta $g(e)$ no grafo H.
- No caso de grafos orientados, a direção da aresta tem que ser preservada também: a aresta e entra no (resp. sai do) vértice v em G se e somente se $g(e)$ entra em (resp. sai de) $f(v)$.

- Ou seja, as funções f e g preservam as relações de incidências entre vértices e arestas. Se os grafos são simples, é suficiente que exista uma função bijetora $f : V_G \to V_H$ que preserva as adjacências dos vértices. Se G e H são o mesmo grafo, dizemos que f é um **automorfismo** de G.

Isomorfismos de grafos

- Escrevemos $G \cong H$ para indicar que G e H são isomorfos. Quando isto ocorre, qualquer propriedade de G que pode ser definida apenas em termos de incidências também será uma propriedade de H. Por esta razão, isomorfismo é um dos conceitos mais importantes da teoria dos grafos.

Exercício: Os grafos abaixo são isomorfos? Relacione-os dois a dois. Demonstre que são isomorfos, se o forem; caso contrário justifique porque não o são.



- Dados dois grafos G e H, com $V_G = V_H = n$, verificar se G e H são isomorfos é um problema difícil.
- Uma maneira é na força bruta, ou seja analisar todas as $n!$ bijeções de V_G para V_H e verificar se alguma delas satisfaz a condição de isomorfismo.
- Há algoritmos mais eficientes, mas todos os métodos conhecidos podem demorar demais em certos casos, mesmo para grafos relativamente pequenos.

- O isomorfismo é uma relação de equivalência entre grafos. Uma classe de equivalência desta relação é o conjunto de todos os grafos que tem um determinado diagrama (isto é, uma determinada estrutura) , independentemente dos "rótulos" dos vértices e das arestas.

- Pode-se verificar que todos os grafos simples completos com n vértices são isomorfos entre si. Portanto, para cada natural n, existe apenas um grafo não rotulado completo com n vértices, que é geralmente denotado por K_n.

Conexidade

em grafos não orientados

- Seja $G = (V, E)$ um grafo não orientado, Dizemos que um vértice $u \in V$ está **conectado** ou **ligado** em G a um vértice $v \in V$ se e somente se existe um passeio em G com início u e término v. Isto equivale a dizer que existe um caminho em G de u para v.
- Dizemos que um grafo é **conexo** se ele não é vazio e quaisquer dois de seus vértices são conectados.

- As **componentes** (**conexas**) de um grafo G são os subgrafos conexos de G que são maximais na relação "$\subseteq$" ("é subgrafo de"). Uma propriedade importante das componentes é a seguinte:
  Teorema: Um subgrafo H de um grafo não orientado G é uma componente conexa de G se e somente se H é conexo, e toda aresta de E_G que tem um extremo em V_H está em E_H (e portanto tem os dois extremos em V_H).

- Esse teorema implica que cada componente de um grafo G é essencialmente um grafo independente, sem interseção ou ligação com as outras componentes.
- Observe que um grafo é conexo se e somente se ele tem exatamente uma componente conexa. Em particular, o grafo vazio não é conexo. Alguns autores usam o termo **desconexo** para um grafo com duas ou mais componentes. Um grafo sem arestas é dito **totalmente desconexo**.

- Seja e uma aresta de um grafo G. O grafo $G \setminus \{e\}$ ou tem o mesmo número de componentes conexas que G, ou tem uma componente a mais.
- No segundo, caso dizemos que a aresta e é uma **aresta de corte**.
- Observe que, se retirarmos uma aresta de corte de um grafo conexo, obtemos um grafo desconexo.

Exercício: Prove que, em qualquer grafo não orientado G, a relação "está conectado a" é uma relação de equivalência.

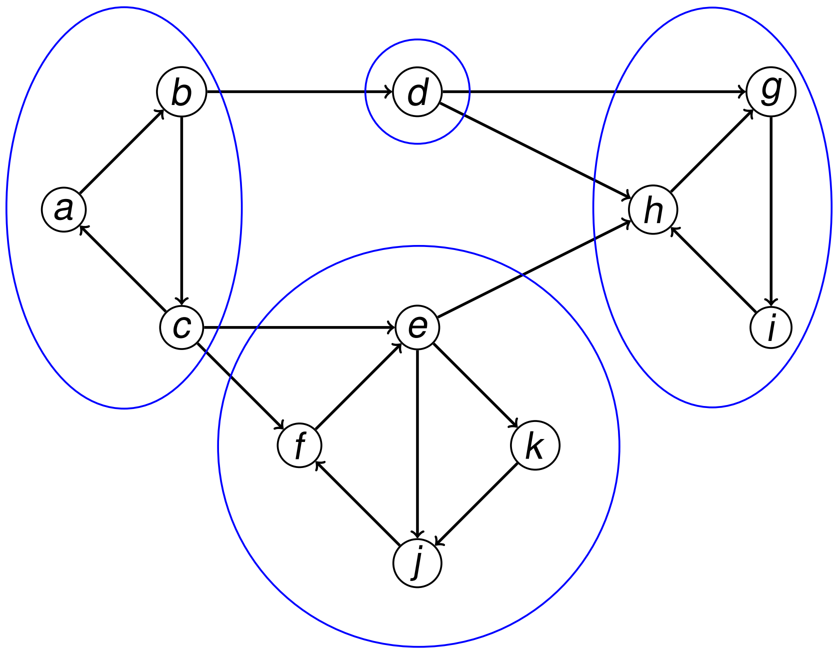
Conexidade

em grafos orientados

- Um grafo orientado G é **fortemente conexo** se, para quaisquer dois vértices $u, v \in V$, existe um passeio orientado de u para v e de v para u.
- Isto equivale a dizer que existe um caminho orientado de u para v e de v para u.

- Um subgrafo fortemente conexos de um grafo orientado G que não está contido em nenhum outro subgrafo fortemente conexo de G é, por definição, uma **componente fortemente conexa** de G.
- Isto é, as componentes fortemente conexas de G são os subgrafos fortemente conexos de G que são maximais sob "$\subseteq$".

- Ao contrário do que ocorre em grafos não orientados, uma componente fortemente conexa H de um grafo G não é necessariamente "isolada" das outras componentes.
- Pode existir uma (ou mais) aresta e de G que não está em E_H mas tem origem ou destino em V_H. (Nesse caso é fácil provar que o outro extremo de e não está em V_H.)



Árvores

- Uma **árvore** é um grafo conexo acíclico.
- Árvores são muito importantes, em computação e em outras áreas, e tem inúmeras propriedades interessantes.
- Por exemplo, a maneira mais econômica de interligar um conjunto de computadores e **switches** por cabos é formando uma árvore.
- Observe que uma árvore é necessariamente um grafo simples.

Teorema: Em uma árvore quaisquer dois vértices são ligados por um único caminho.
Corolário: Toda aresta de uma árvore é uma aresta de corte.
Teorema: Seja G uma árvore com n vértices e m arestas, então $m = n - 1$.

Grafos bipartidos

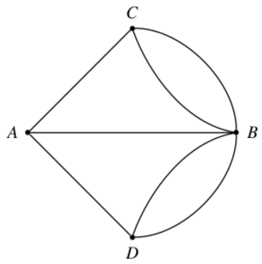
- Seja $G = (V, E, F)$ um grafo.
- Uma **bipartição** de V é um par não ordenado de subconjuntos A e B de V, tais que $A \cup B = V$ e $A \cap B = \emptyset$ e toda aresta do grafo tem um extremo em A e o outro em B.
- Um grafo G com uma bipartição $A,\ B$ é chamado um **grafo bipartido**.

- Um **grafo bipartido completo** é um grafo bipartido no qual todo vértice de A é adjacente a todo vértice de B.
- Verifica-se que uma condição necessária e suficiente para que um grafo $G = (V, E, F)$ tenha uma bipartição é que ele não possua ciclos de comprimento ímpar.

- Para cada par de números naturais m e n, existe apenas um grafo não rotulado bipartido completo cuja bipartição tem m vértices em um conjunto e n vértices no outro. Esse grafo não rotulado é geralmente denotado por $K_{m,n}$.

Grafos eulerianos

- Para mostrar que o problema das pontes de Königsberg não tem solução, Euler primeiro modelou o mapa da cidade por um grafo G não orientado.

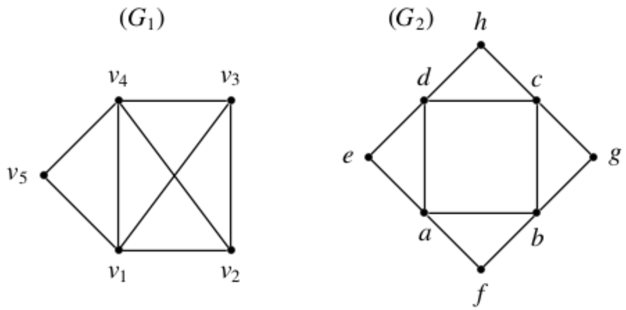


- Neste modelo, o problema pede um passeio no grafo G que atravessa exatamente uma vez cada aresta de E, ou seja, uma trilha que atravessa por todas as arestas.
- Uma trilha com esta propriedade é chamada de **trilha euleriana** ou **trilha de Euler** do grafo G. Se a trilha é fechada ela é chamada de **tour euleriano** ou **tour de Euler**. Um grafo é dito **euleriano** se ele contém um tour de Euler.

- No seu artigo de 1736, Euler fez mais do que resolver o problema da cidade de Königsberg.
- Ele encontrou uma condição necessária e suficiente para que um grafo qualquer G tenha um tour euleriano:

  Teorema: Um grafo conexo tem um tour de Euler se e somente se ele não tem vértices de grau ímpar.

- Outro quebra-cabeças clássico que recai no mesmo problema de grafos é desenhar cada um dos diagramas abaixo sem levantar o lápis do papel e sem traçar duas vezes a mesma linha.

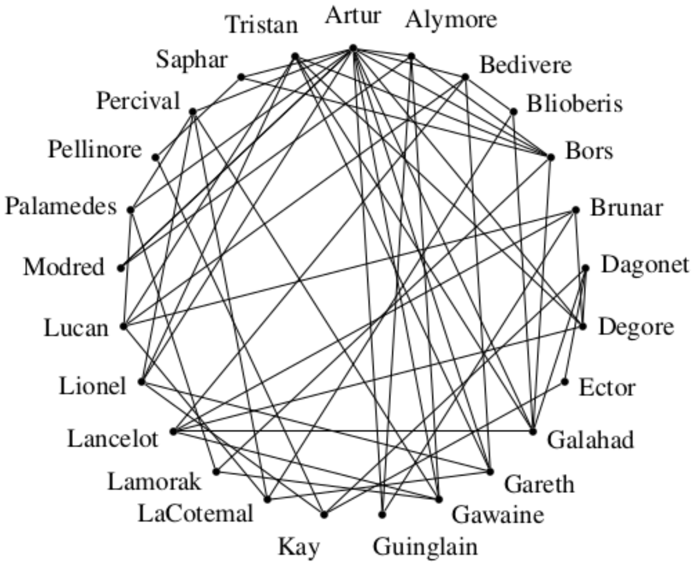


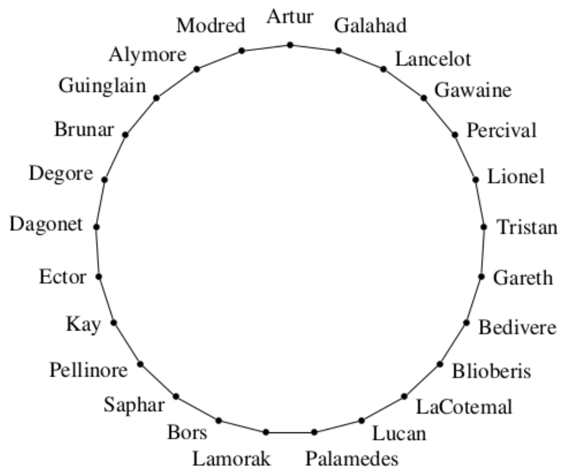
- Cada desenho pode ser modelado por um grafo G, onde os vértices são os extremos isolados de linhas ou pontos onde três ou mais linhas se encontram, e as arestas são as linhas ligando esses pontos.
- Nesse caso, o que se pede é uma **trilha euleriana**, uma trilha (não necessariamente fechada) que passa por todas as arestas de G. O seguinte teorema é um corolário do teorema de Euler:

  Corolário: Um grafo conexo tem uma trilha de Euler se, e somente se, ele tem no máximo dois vértices de grau ímpar.

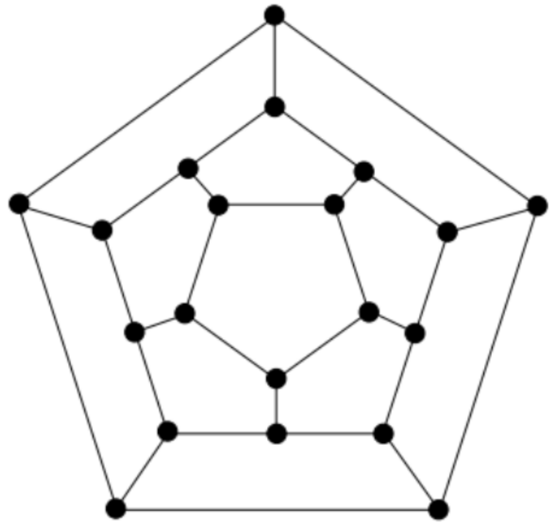
Grafos hamiltonianos

- Considere o seguinte quebra-cabeças: o Rei Artur precisa designar os assentos para seus 24 Cavaleiros em volta da Távola Redonda.
- Nem todos eles são amigos; e é importante que cada cavaleiro seja colocado entre dois de seus amigos.
- Podemos descrever as relações de amizade como um grafo simples G onde os vértices são os Cavaleiros e uma aresta entre dois Cavaleiros se eles são amigos (e podem sentar lado a lado).

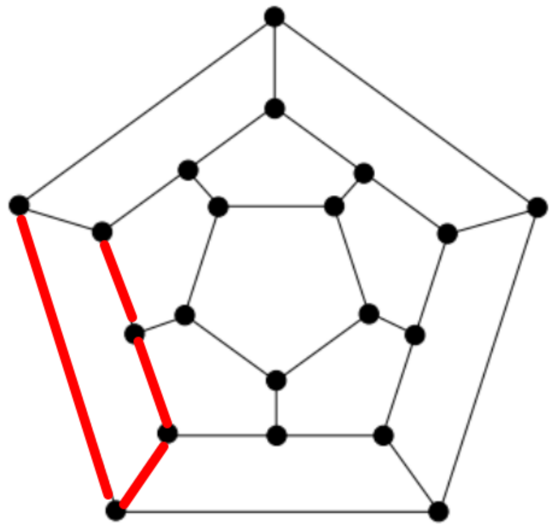


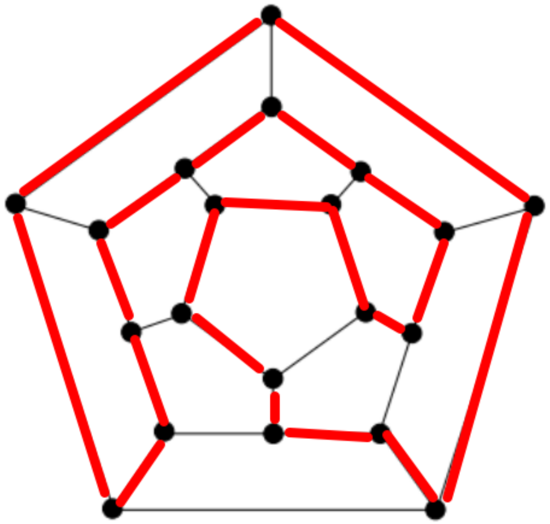


- Um circuito com essas propriedades é chamado de **circuito hamiltoniano** do grafo *G*.
- Este nome homenageia o matemático irlandês William Rowland Hamilton (1805–1861).
- Em 1856 ele descreveu, em uma carta a um colega, um jogo para duas pessoas derivado do dodecaedro.



- Nesse jogo, uma pessoa escolhe um caminho *P* qualquer de cinco vértices no grafo *G*, e a outra deve encontrar um circuito em *G* que começa com *P* e passa por todos os vértices.





- Um grafo que possui pelo menos um circuito hamiltoniano é chamado de **grafo hamiltoniano**.
- Há vários argumentos que podem ser usados para demonstrar que um grafo não é hamiltoniano.

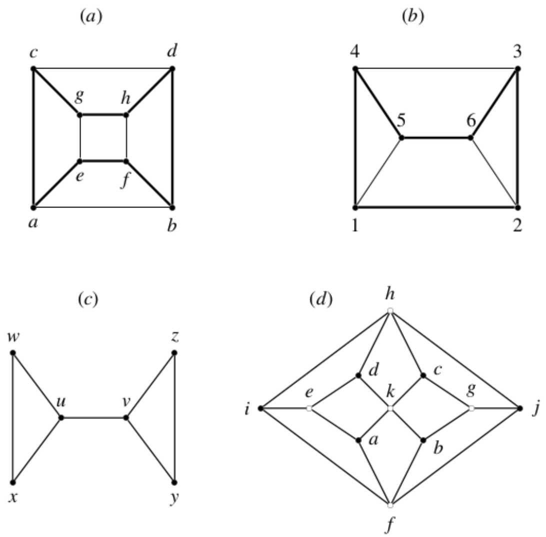
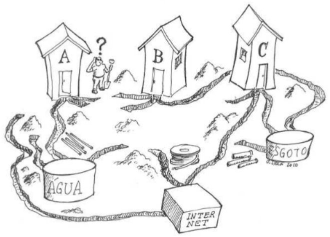


Figura 13.19: (*a*) e (*b*) grafos hamiltonianos e (*c*) e (*d*) grafos não hamiltonianos.

- Por exemplo, se G tem um vértice de grau 1, então G não é hamiltoniano. No exemplo da figura (c), pode-se ver que qualquer passeio que visite os vértices u e v deve repetir a aresta a, e portanto não pode ser um circuito.
- No exemplo da figura (d), pode-se observar que os cinco vértices brancos e os seis vértices pretos formam uma bipartição A, B de G. Como os dois conjuntos tem cardinalidades diferentes, podemos concluir que não há circuito que passe por todos os vértices.

Grafos planares

- Um quebra-cabeças clássico pede para ligar três casas a três centrais de serviço — água, esgoto e internet banda-larga — sem que nenhuma dessas ligações cruze qualquer outra.



- O problema pede para desenhar um grafo G (neste caso, o grafo completo bipartido $K_{3,3}$) no plano, de modo que nenhuma aresta cruze outra aresta ou passe por um vértice que não é seu extremo.
- Um desenho deste tipo é chamado de **representação planar** do grafo G.
- Se G pode ser desenhado desta forma, dizemos que ele é um grafo **planar**.
- Nem todo grafo é planar.

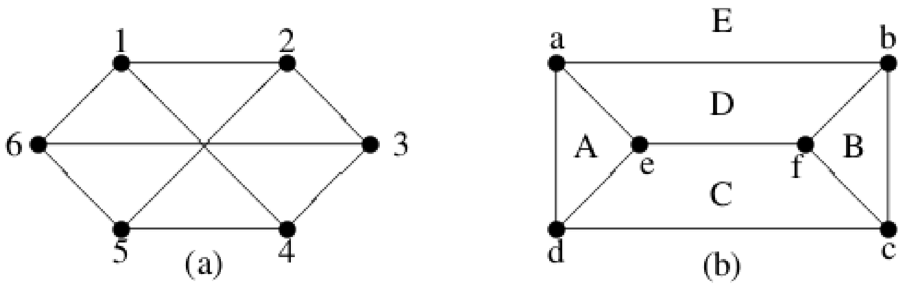


Figura 13.21: (a) Um grafo não planar. (b) Um grafo planar.

- Uma representação planar de um grafo divide o plano em uma ou mais regiões, separadas pelos desenhos dos vértices e arestas.
- Essas regiões são chamadas de **faces** da representação. Na figura (b) há cinco faces (A,B,C,D,E). Note que uma dessas regiões — a **face externa** E — tem tamanho infinito, as demais tem tamanho finito.

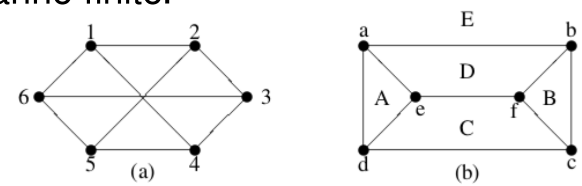


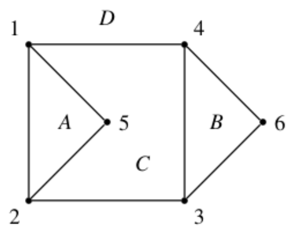
Figura 13.21: (a) Um grafo não planar. (b) Um grafo planar.

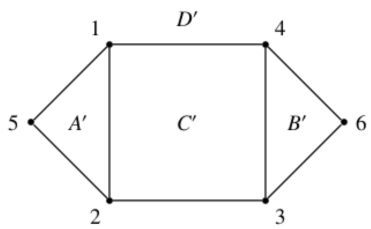
- **Teorema:** Seja $\hat{G}$ uma representação planar de um grafo G. Uma aresta e de G pertence a um circuito se, e somente se, ela separa duas faces distintas de $\hat{G}$.
- **Corolário:** Um grafo é uma árvore se e somente se ele tem uma representação planar com uma única face.

A fórmula de Euler para grafos planares

- Um mesmo grafo planar G pode ter várias representações planares bem diferentes.

- Na figura por exemplo, no primeiro desenho as faces A, B, C, D tem 3, 3, 5 e 5 lados, respectivamente, enquanto que no segundo as faces A', B', C', D' tem 3, 3, 4 e 6 lados, respectivamente.





- No entanto, Euler descobriu que toda representação planar de um mesmo grafo G tem o mesmo número de faces.
- **Teorema:** [Fórmula de Euler] Seja $\hat{G}$ uma representação planar de um grafo simples e conexo G. Seja f o número de faces de $\hat{G}$. Então $f = e - v + 2$, onde $v = |V|$ e $e = |E|$.

Prova: Vamos provar usando indução no número de faces de $\hat{G}$.

- **Base:** Se $f = 1$ então, pelo corolário visto anteriormente, G é uma árvore. Nesse caso, pelo temos $e = v - 1$. Portanto o enunciado vale para $f = 1$.
- **Hipótese de Indução:** Suponhamos agora que f é um inteiro maior ou igual a 2 e que a afirmação é verdadeira para todas as representações planares de grafos simples com o número de faces menor que f.

- **Passo de Indução:** Seja $\hat{G}$ uma representação de um grafo conexo e planar G com f faces. Escolha uma aresta a de G que não seja uma aresta de corte. Logo a pertence a algum circuito de G e portanto ela separa duas faces distintas de $\hat{G}$. Então retirando a aresta a de $\hat{G}$ obtemos uma representação $\hat{G}'$ do subgrafo $G - a$. Observe que $G - a$ é conexo e que $\hat{G}'$ tem $f' = f - 1$ faces, pois as duas faces de $\hat{G}$ separadas por a tornam-se uma face em $\hat{G}'$. Sejam $v' = v$ e $e' = e - 1$ o número de vértices e arestas do grafo $G - a$.

Por hipótese de indução temos que

$$f' = e' - v' + 2$$

ou seja

$$(f - 1) = (e - 1) - v + 2$$

e portanto

$$f = e - v + 2$$

- Uma consequência da fórmula de Euler é que um grafo planar não pode ter muitas arestas. Mais precisamente:

Corolário: Seja G um grafo planar, simples e conexo, com pelo menos três vértices. Então $|E| \leq 3\,|V| - 6$.

Prova:

Seja S a soma dos lados. $3f \leq S \leq 2e$. Logo $f \leq 2/3e$

$$\begin{aligned} f &= e - v + 2 \\ 2/3e &\geq e - v + 2 \\ v - 2 &\geq 1/3e \\ 3v - 6 &\geq e \end{aligned}$$

Fim.

Esse corolário permite concluir que o grafo completo K_5 não é planar, pois para ele temos $\left|V_{K_5}\right| = 5$, $\left|E_{K_5}\right| = 10$, e $10 > 3 \cdot 5 - 6 = 9$.

Esse corolário permite concluir que o grafo completo K_5 não é planar, pois para ele temos $\left|V_{K_5}\right| = 5$,

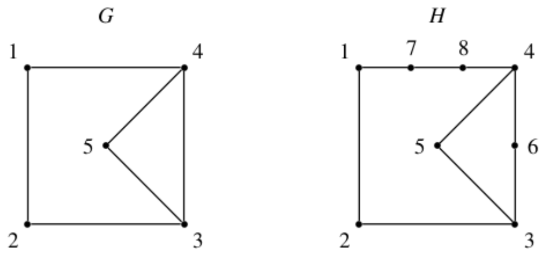
Corolário: Seja G um grafo planar, simples e conexo, com pelo menos três vértices. Se G não possui ciclos de comprimento 3, então $|E| \leq 2\,|V| - 4$.

Este corolário permite concluir que $K_{3,3}$ não é planar, pois ele não tem ciclos de comprimento 3, tem $\left|V_{K_{3,3}}\right| = 6$, $\left|E_{K_{3,3}}\right| = 9$, e $9 > 2 \cdot 6 - 4 = 8$. Observe que este resultado mostra que o problema das três casas e três serviços não tem solução.

O teorema de Kuratowski

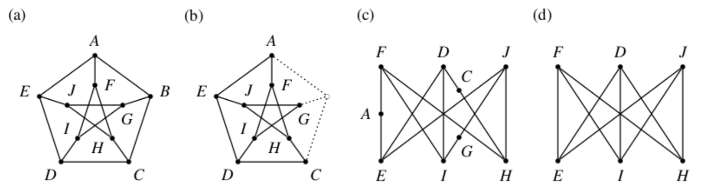
- Em 1930, o matemático polonês Kasimierz Kuratowski (1896–1980) descobriu que é possível caracterizar os grafos planares apenas em termos discretos.
- Para apresentar esse resultado precisamos do conceito de **subdivisão de um grafo**.

- Dizemos que um grafo simples H é uma **subdivisão** de outro grafo G se $V_G \subseteq V_H$, e para cada aresta $e \in E_G$ existe um caminho C_e em H ligando os extremos e; sendo que toda aresta de E_H e todo vértice de $V_H \setminus V_G$ ocorre em exatamente um destes caminhos.



- **Teorema:** [Teorema de Kuratowski] Um grafo G é planar se e somente se ele não contém um subgrafo que seja isomorfo a uma subdivisão do K_5 ou do $K_{3,3}$.
-

Exemplo: A figura (a) mostra o chamado **grafo de Petersen** (estudado pelo matemático dinamarquês Julius Petersen, 1839–1910) que denotaremos por P. H é isomorfo a uma subdivisão do grafo completo $K_{3,3}$. Note, por exemplo, que o caminho (e, a, f) de H corresponde à aresta $(1, 4)$ de $K_{3,3}$.



Coloração de grafos

Coloração de mapas

- É costume em mapas pintar os países (estados, municípios, etc) com cores variadas, de tal forma que estados que tem fronteira comum tenham cores diferentes — a fim de tornar as fronteiras mais visíveis. Uma questão antiga é quantas cores diferentes são necessárias para esse fim.

- A experiência sugere que três cores são insuficientes, mas quatro cores bastam (desde que cada país seja um único território contínuo).
- Será que existe algum mapa que precisa de cinco (ou mais) cores?

- Em 1852 esta questão foi colocada como um problema matemático pelo aluno inglês Francis Guthrie (1831–1899), e foi amplamente divulgada pelo seu professor Augustus De Morgan.
- Em 1879, o matemático inglês Alfred Kempe (1849–1922) publicou uma demonstração de que quatro cores eram suficientes.
- Porém, em 1890 foi observado que havia uma falha na demonstração de Kempe.
- Uma demonstração correta foi obtida apenas em 1976, por Kenneth Appel e Wolfgang Haken.

- Essa demonstração causou bastante controvérsia, pois os autores reduziram o problema a 2000 casos separados, e utilizaram um programa de computador para enumerar e verificar todos esses casos.
- Por esse motivo muitos matemáticos se recusaram a considerar a demonstração válida, e ela foi publicada somente em 1989.

- Em 1996 Robertson, Sanders, Seymour e Thomas conseguiram simplificar a demonstração reduzindo a lista para “apenas” 633 casos. (Hoje demonstrações usando computador tornaram-se ferramentas importantes em matemática.)
- Um mapa de países pode ser visto como uma representação planar $\hat{G}$ de um grafo G: cada vértice de G é um ponto do mapa onde três ou mais países tem fronteira comum, e cada aresta é um trecho de fronteira entre dois países ligando dois desse pontos.

- Na representação dual $\hat{H}$ de $\hat{G}$, cada vértice é um país e existe uma aresta ligando dois países se, e somente se, eles tem um trecho de fronteira em comum.
- Portanto, o resultado de Appel e Haken pode ser reformulado como segue

  Teorema: [Teorema das quatro cores] Se H é um grafo planar é sempre possível colorir seus vértices com quatro cores, de modo que quaisquer dois vértices adjcentes tenham cores distintas.

Coloração de grafos em geral

- O problema das quatro cores é um caso particular de uma questão mais geral sobre grafos arbitrários (não necessariamente planares).
- Definimos uma **k-coloração** de um grafo simples G como uma atribuição de k cores aos vértices de tal forma que vértices adjacentes não tem a mesma cor.
- O **número cromático** de G é o menor número k de cores tal que G tem uma k-coloração. Denotaremos por $\chi(G)$ o número cromático de um grafo G.

- É fácil ver que o número cromático de G é 2 se e somente se G é bipartido, e que o número cromático do grafo completo K_n é n.
- O teorema das quatro cores diz que o número cromático de um grafo planar é no máximo 4.

- Ainda não se conhece um algoritmo eficiente para determinar o número cromático de um grafo simples G arbitrário. Entretanto, existe um teorema que limita esse número:

  Teorema: Seja G um grafo simples e Δ o maior dos graus de seus vértices. O número cromático de G é no máximo $\Delta + 1$.