MC-202 — Unidade Extra
Busca Radix, Árvores Digitais e Tries

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

1º semestre/2018

Busca Radix

Veremos outro tipo de árvores binárias:

Busca Radix

Veremos outro tipo de árvores binárias:

- Mas não são árvores binárias de busca...

Busca Radix

Veremos outro tipo de árvores binárias:

- Mas não são árvores binárias de busca...
- Usadas quando a chave de busca tem poucos bits

Busca Radix

Veremos outro tipo de árvores binárias:

- Mas não são árvores binárias de busca...
- Usadas quando a chave de busca tem poucos bits
- E extrair o bit é uma operação rápida

Busca Radix

Veremos outro tipo de árvores binárias:

- Mas não são árvores binárias de busca...
- Usadas quando a chave de busca tem poucos bits
- E extrair o bit é uma operação rápida
  - `int`, `char`, `char *`, etc...

Busca Radix

Veremos outro tipo de árvores binárias:

- Mas não são árvores binárias de busca...
- Usadas quando a chave de busca tem poucos bits
- E extrair o bit é uma operação rápida
  - `int`, `char`, `char *`, etc...

Se a chave de busca tiver no máximo k bits

Busca Radix

Veremos outro tipo de árvores binárias:

- Mas não são árvores binárias de busca...
- Usadas quando a chave de busca tem poucos bits
- E extrair o bit é uma operação rápida
  - `int`, `char`, `char *`, etc...

Se a chave de busca tiver no máximo k bits

- a altura da árvore será pequena: $\mathrm{O}(k)$

Busca Radix

Veremos outro tipo de árvores binárias:

- Mas não são árvores binárias de busca...
- Usadas quando a chave de busca tem poucos bits
- E extrair o bit é uma operação rápida
  - `int`, `char`, `char *`, etc...

Se a chave de busca tiver no máximo k bits

- a altura da árvore será pequena: $\mathrm{O}(k)$
- mas poderá guardar muitas chaves: 2^k

Busca Radix

Veremos outro tipo de árvores binárias:

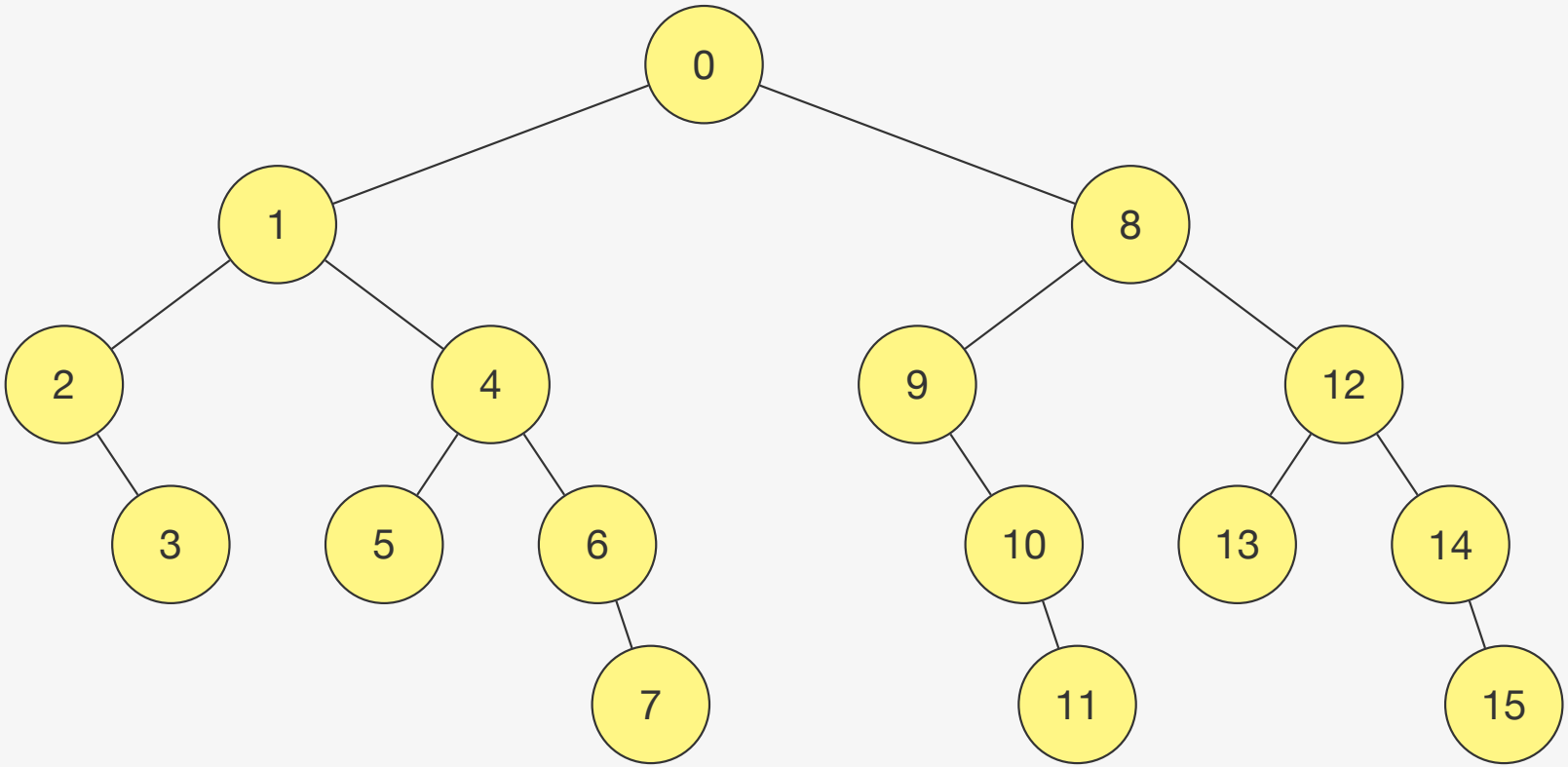
- Mas não são árvores binárias de busca...
- Usadas quando a chave de busca tem poucos bits
- E extrair o bit é uma operação rápida
  - `int`, `char`, `char *`, etc...

Se a chave de busca tiver no máximo k bits

- a altura da árvore será pequena: $\mathrm{O}(k)$
- mas poderá guardar muitas chaves: 2^k

Usando códigos mais simples e com menos overhead do que uma árvore **rubro-negra**

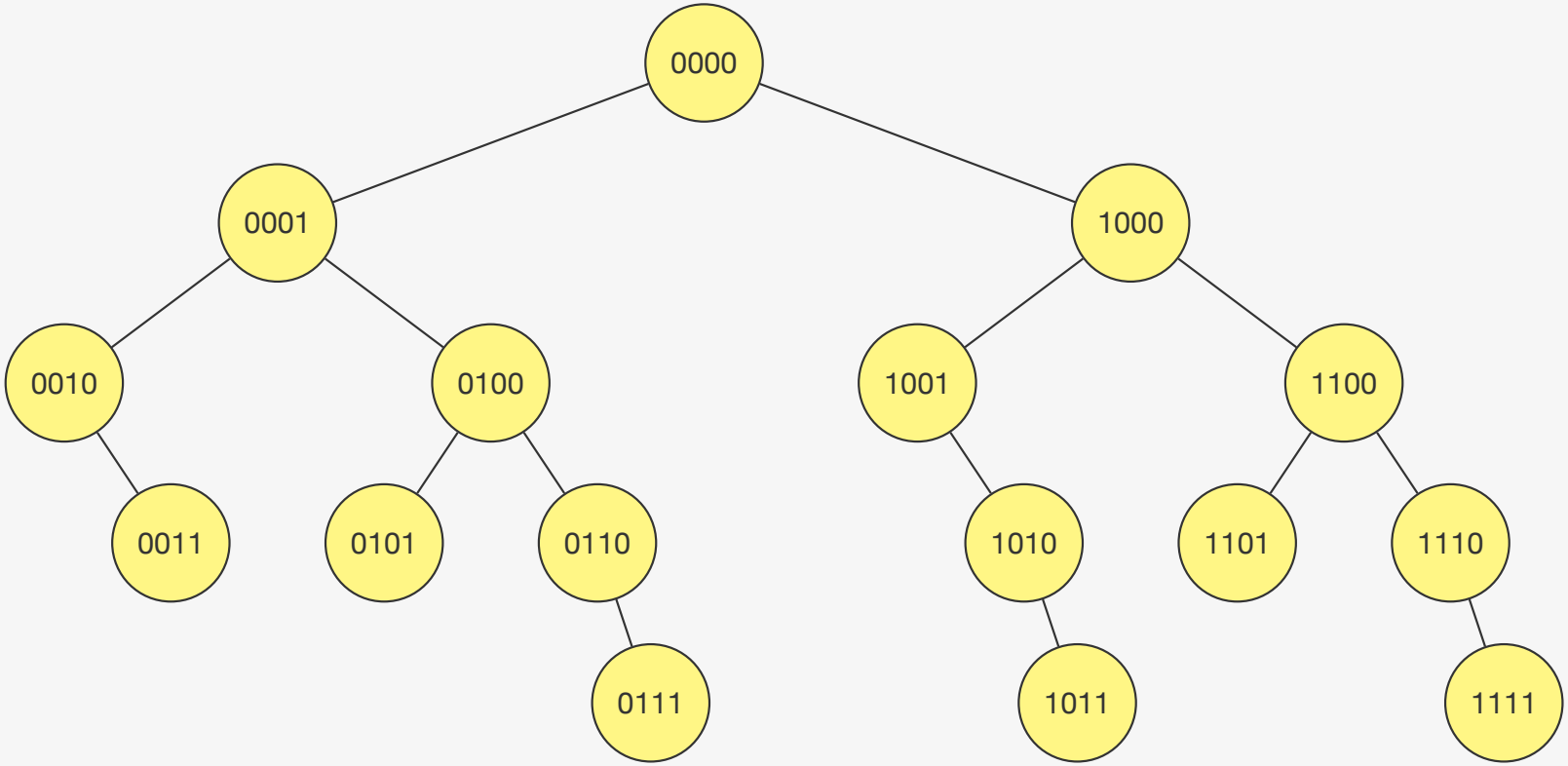
Árvores Digitais de Busca



Note que não é uma árvore de busca binária

- Por exemplo, 2 e 3 são maiores do que 1
- Mas estão na subárvore esquerda de 1

Árvores Digitais de Busca



As subárvores de um nó de nível k são tais que:

- chaves com k-ésimo bit zero ficam na subárvore esquerda
- chaves com k-ésimo bit um ficam na subárvore direita

Implementação

Veremos a implementação para chaves do tipo `unsigned`

Implementação

Veremos a implementação para chaves do tipo `unsigned`

```
1 typedef struct No {
2   unsigned chave;
3   struct No *esq, *dir;
4 } No;
```

Implementação

Veremos a implementação para chaves do tipo `unsigned`

```
1 typedef struct No {
2   unsigned chave;
3   struct No *esq, *dir;
4 } No;
```

Usualmente, temos uma estrutura mais complicada com uma chave de busca

Implementação

Veremos a implementação para chaves do tipo `unsigned`

```
1 typedef struct No {
2   unsigned chave;
3   struct No *esq, *dir;
4 } No;
```

Usualmente, temos uma estrutura mais complicada com uma chave de busca

- Basta trocar a chave por essa estrutura

Implementação

Veremos a implementação para chaves do tipo `unsigned`

```
1 typedef struct No {
2   unsigned chave;
3   struct No *esq, *dir;
4 } No;
```

Usualmente, temos uma estrutura mais complicada com uma chave de busca

- Basta trocar a chave por essa estrutura
- e modificar os códigos para acessar a chave da estrutura

Implementação

Veremos a implementação para chaves do tipo `unsigned`

```
1 typedef struct No {
2   unsigned chave;
3   struct No *esq, *dir;
4 } No;
```

Usualmente, temos uma estrutura mais complicada com uma chave de busca

- Basta trocar a chave por essa estrutura
- e modificar os códigos para acessar a chave da estrutura

Precisaremos do k-ésimo bit (da esquerda para a direita):

Implementação

Veremos a implementação para chaves do tipo `unsigned`

```
1 typedef struct No {
2   unsigned chave;
3   struct No *esq, *dir;
4 } No;
```

Usualmente, temos uma estrutura mais complicada com uma chave de busca

- Basta trocar a chave por essa estrutura
- e modificar os códigos para acessar a chave da estrutura

Precisaremos do k-ésimo bit (da esquerda para a direita):

```
1 #define bits_na_chave 32
2
3 unsigned bit(unsigned chave, int k) {
4   return chave >> (bits_na_chave - 1 - k) % 2;
5 }
```

Busca

```
1 p_no busca_rec(p_no raiz, unsigned x, int nivel) {
2   if (raiz == NULL)
3     return NULL;
```

Busca

```
1 p_no busca_rec(p_no raiz, unsigned x, int nivel) {
2   if (raiz == NULL)
3     return NULL;
4   if (x == raiz->chave)
5     return raiz;
```

Busca

```
1 p_no busca_rec(p_no raiz, unsigned x, int nivel) {
2   if (raiz == NULL)
3     return NULL;
4   if (x == raiz->chave)
5     return raiz;
6   if (bit(x, nivel) == 0)
7     return busca_rec(raiz->esq, x, nivel+1);
```

Busca

```
1  p_no busca_rec(p_no raiz, unsigned x, int nivel) {
2    if (raiz == NULL)
3      return NULL;
4    if (x == raiz->chave)
5      return raiz;
6    if (bit(x, nivel) == 0)
7      return busca_rec(raiz->esq, x, nivel+1);
8    else
9      return busca_rec(raiz->dir, x, nivel+1);
10 }
```

Busca

```
 1 p_no busca_rec(p_no raiz, unsigned x, int nivel) {
 2   if (raiz == NULL)
 3     return NULL;
 4   if (x == raiz->chave)
 5     return raiz;
 6   if (bit(x, nivel) == 0)
 7     return busca_rec(raiz->esq, x, nivel+1);
 8   else
 9     return busca_rec(raiz->dir, x, nivel+1);
10 }
11
12 p_no busca(p_no raiz, unsigned x) {
13   return busca_rec(raiz, x, 0);
14 }
```

Busca

```
1  p_no busca_rec(p_no raiz, unsigned x, int nivel) {
2    if (raiz == NULL)
3      return NULL;
4    if (x == raiz->chave)
5      return raiz;
6    if (bit(x, nivel) == 0)
7      return busca_rec(raiz->esq, x, nivel+1);
8    else
9      return busca_rec(raiz->dir, x, nivel+1);
10 }
11
12 p_no busca(p_no raiz, unsigned x) {
13   return busca_rec(raiz, x, 0);
14 }
```

No pior caso, leva tempo $O(b)$

- b é o número de bits das chaves

Busca

```
1  p_no busca_rec(p_no raiz, unsigned x, int nivel) {
2    if (raiz == NULL)
3      return NULL;
4    if (x == raiz->chave)
5      return raiz;
6    if (bit(x, nivel) == 0)
7      return busca_rec(raiz->esq, x, nivel+1);
8    else
9      return busca_rec(raiz->dir, x, nivel+1);
10 }
11
12 p_no busca(p_no raiz, unsigned x) {
13   return busca_rec(raiz, x, 0);
14 }
```

No pior caso, leva tempo $\mathrm{O}(b)$

- b é o número de bits das chaves

Se as chaves forem aleatórias, leva tempo $\mathrm{O}(\lg n)$

Inserção

```
1 p_no insere_rec(p_no raiz, unsigned chave, int nivel) {
2   p_no novo;
3   if (raiz == NULL) {
4     novo = malloc(sizeof(No));
5     novo->esq = novo->dir = NULL;
6     novo->chave = chave;
7     return novo;
8   }
```

Inserção

```
1  p_no insere_rec(p_no raiz, unsigned chave, int nivel) {
2    p_no novo;
3    if (raiz == NULL) {
4      novo = malloc(sizeof(No));
5      novo->esq = novo->dir = NULL;
6      novo->chave = chave;
7      return novo;
8    }
9    if (chave == raiz->chave)
10     return raiz;
```

Inserção

```
1  p_no insere_rec(p_no raiz, unsigned chave, int nivel) {
2    p_no novo;
3    if (raiz == NULL) {
4      novo = malloc(sizeof(No));
5      novo->esq = novo->dir = NULL;
6      novo->chave = chave;
7      return novo;
8    }
9    if (chave == raiz->chave)
10     return raiz;
11   if (bit(chave, nivel) == 0)
12     raiz->esq = insere_rec(raiz->esq, chave, nivel+1);
```

Inserção

```
1  p_no insere_rec(p_no raiz, unsigned chave, int nivel) {
2    p_no novo;
3    if (raiz == NULL) {
4      novo = malloc(sizeof(No));
5      novo->esq = novo->dir = NULL;
6      novo->chave = chave;
7      return novo;
8    }
9    if (chave == raiz->chave)
10     return raiz;
11   if (bit(chave, nivel) == 0)
12     raiz->esq = insere_rec(raiz->esq, chave, nivel+1);
13   else
14     raiz->dir = insere_rec(raiz->dir, chave, nivel+1);
```

Inserção

```
 1 p_no insere_rec(p_no raiz, unsigned chave, int nivel) {
 2   p_no novo;
 3   if (raiz == NULL) {
 4     novo = malloc(sizeof(No));
 5     novo->esq = novo->dir = NULL;
 6     novo->chave = chave;
 7     return novo;
 8   }
 9   if (chave == raiz->chave)
10     return raiz;
11   if (bit(chave, nivel) == 0)
12     raiz->esq = insere_rec(raiz->esq, chave, nivel+1);
13   else
14     raiz->dir = insere_rec(raiz->dir, chave, nivel+1);
15   return raiz;
16 }
```

Inserção

```
 1 p_no insere_rec(p_no raiz, unsigned chave, int nivel) {
 2   p_no novo;
 3   if (raiz == NULL) {
 4     novo = malloc(sizeof(No));
 5     novo->esq = novo->dir = NULL;
 6     novo->chave = chave;
 7     return novo;
 8   }
 9   if (chave == raiz->chave)
10     return raiz;
11   if (bit(chave, nivel) == 0)
12     raiz->esq = insere_rec(raiz->esq, chave, nivel+1);
13   else
14     raiz->dir = insere_rec(raiz->dir, chave, nivel+1);
15   return raiz;
16 }
17
18 p_no insere(p_no raiz, unsigned chave) {
19   return insere_rec(raiz, chave, 0);
20 }
```

Inserção

```
 1 p_no insere_rec(p_no raiz, unsigned chave, int nivel) {
 2   p_no novo;
 3   if (raiz == NULL) {
 4     novo = malloc(sizeof(No));
 5     novo->esq = novo->dir = NULL;
 6     novo->chave = chave;
 7     return novo;
 8   }
 9   if (chave == raiz->chave)
10     return raiz;
11   if (bit(chave, nivel) == 0)
12     raiz->esq = insere_rec(raiz->esq, chave, nivel+1);
13   else
14     raiz->dir = insere_rec(raiz->dir, chave, nivel+1);
15   return raiz;
16 }
17
18 p_no insere(p_no raiz, unsigned chave) {
19   return insere_rec(raiz, chave, 0);
20 }
```

No pior caso, leva tempo $O(b)$

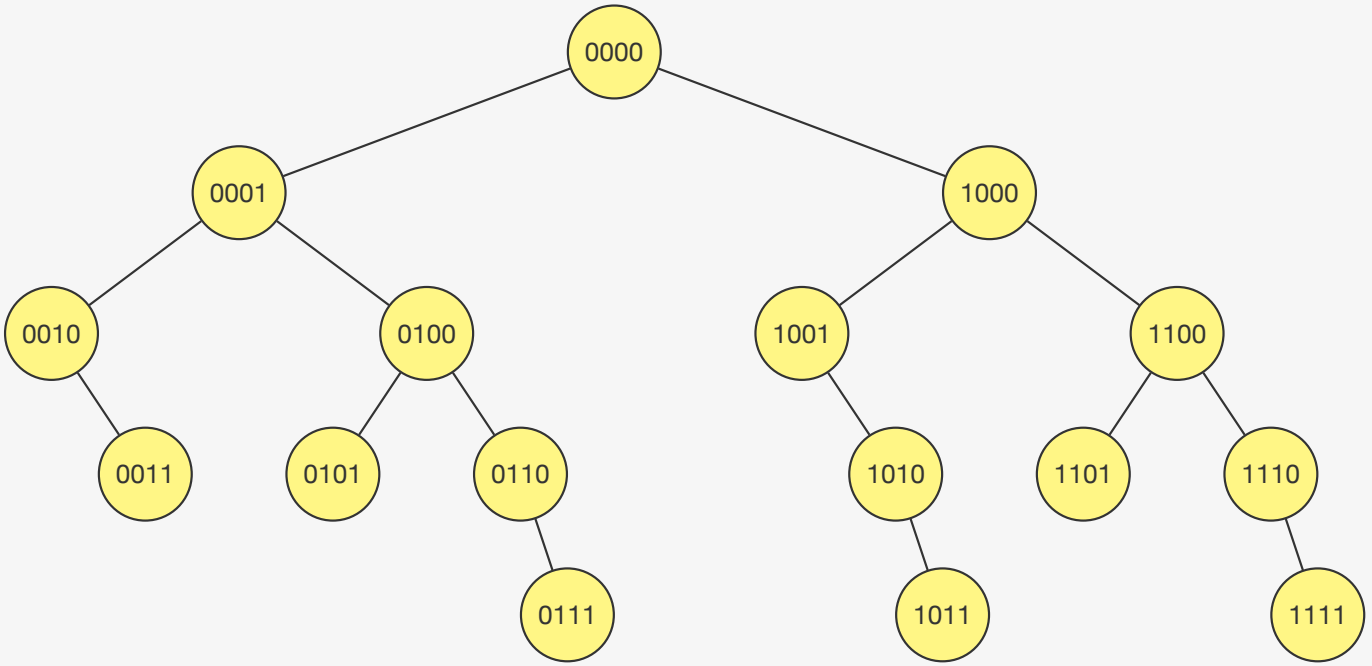
Inserção

```
 1 p_no insere_rec(p_no raiz, unsigned chave, int nivel) {
 2   p_no novo;
 3   if (raiz == NULL) {
 4     novo = malloc(sizeof(No));
 5     novo->esq = novo->dir = NULL;
 6     novo->chave = chave;
 7     return novo;
 8   }
 9   if (chave == raiz->chave)
10     return raiz;
11   if (bit(chave, nivel) == 0)
12     raiz->esq = insere_rec(raiz->esq, chave, nivel+1);
13   else
14     raiz->dir = insere_rec(raiz->dir, chave, nivel+1);
15   return raiz;
16 }
17
18 p_no insere(p_no raiz, unsigned chave) {
19   return insere_rec(raiz, chave, 0);
20 }
```

No pior caso, leva tempo $\mathrm{O}(b)$

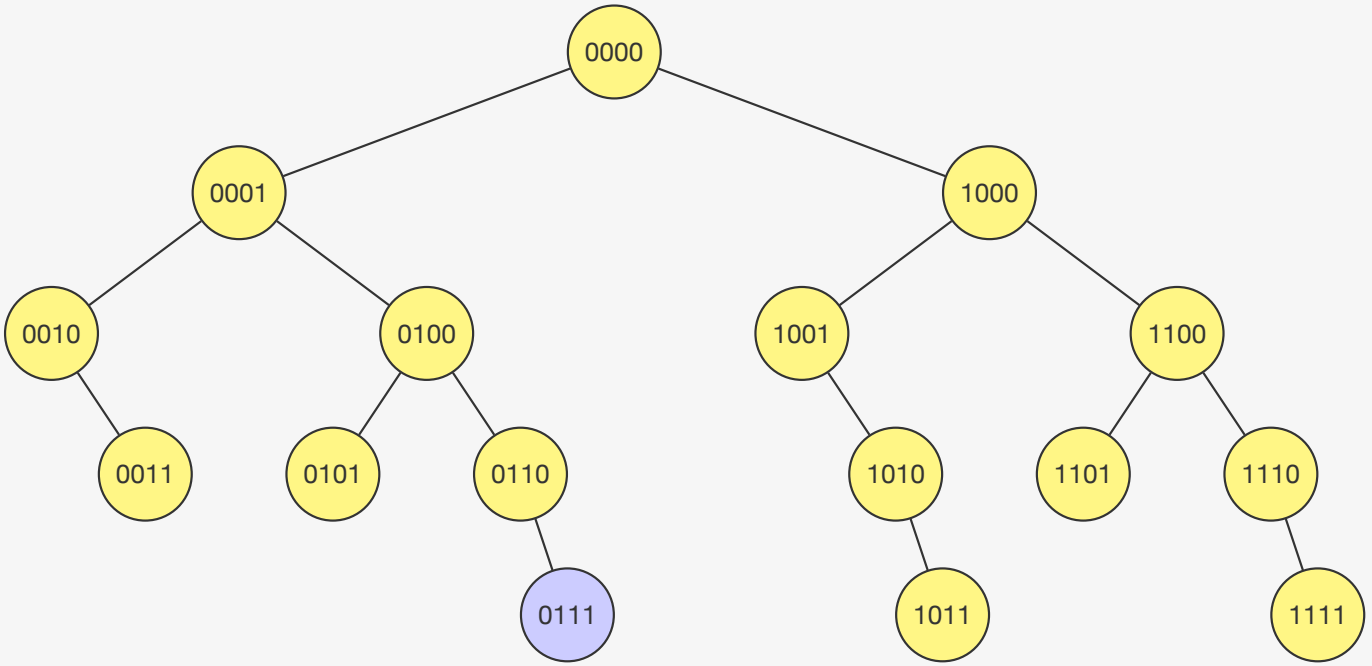
Se as chaves forem aleatórias, leva tempo $\mathrm{O}(\lg n)$

Remoção



Para remover:

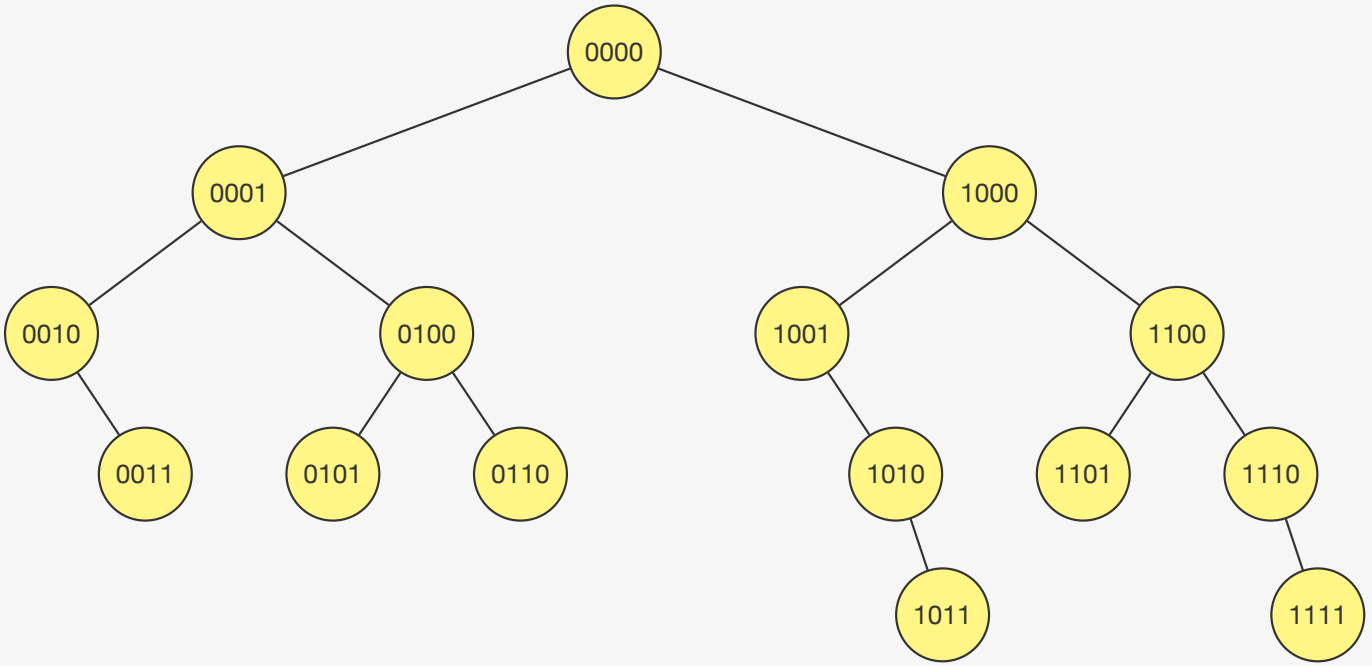
Remoção



Para remover:

- uma folha, basta apagá-la

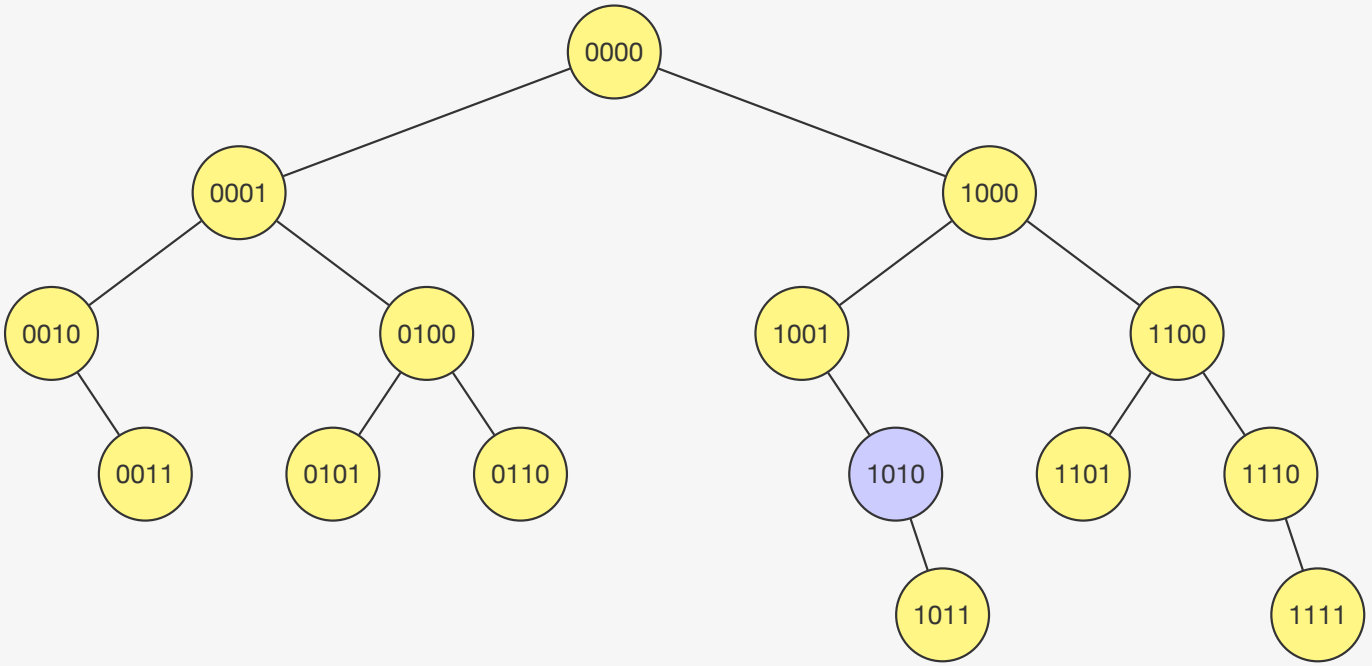
Remoção



Para remover:

- uma folha, basta apagá-la

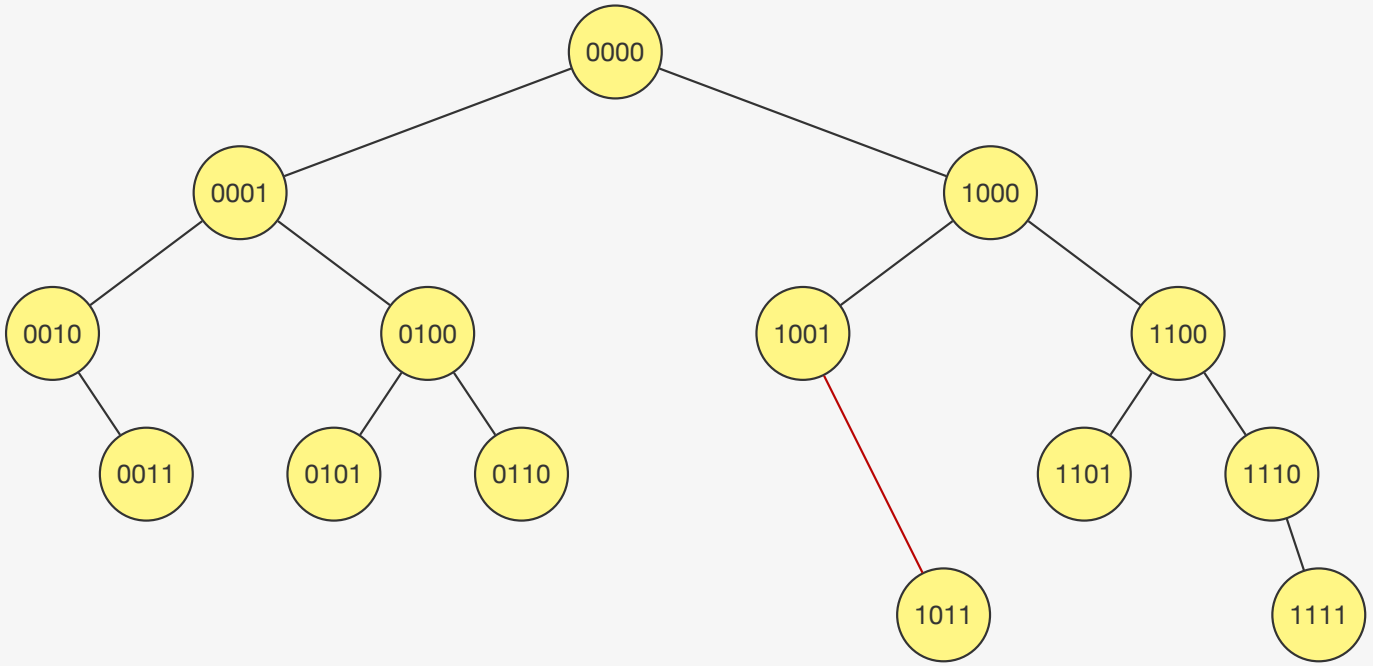
Remoção



Para remover:

- uma folha, basta apagá-la
- um nó com um filho, basta fazer o pai apontar para o neto

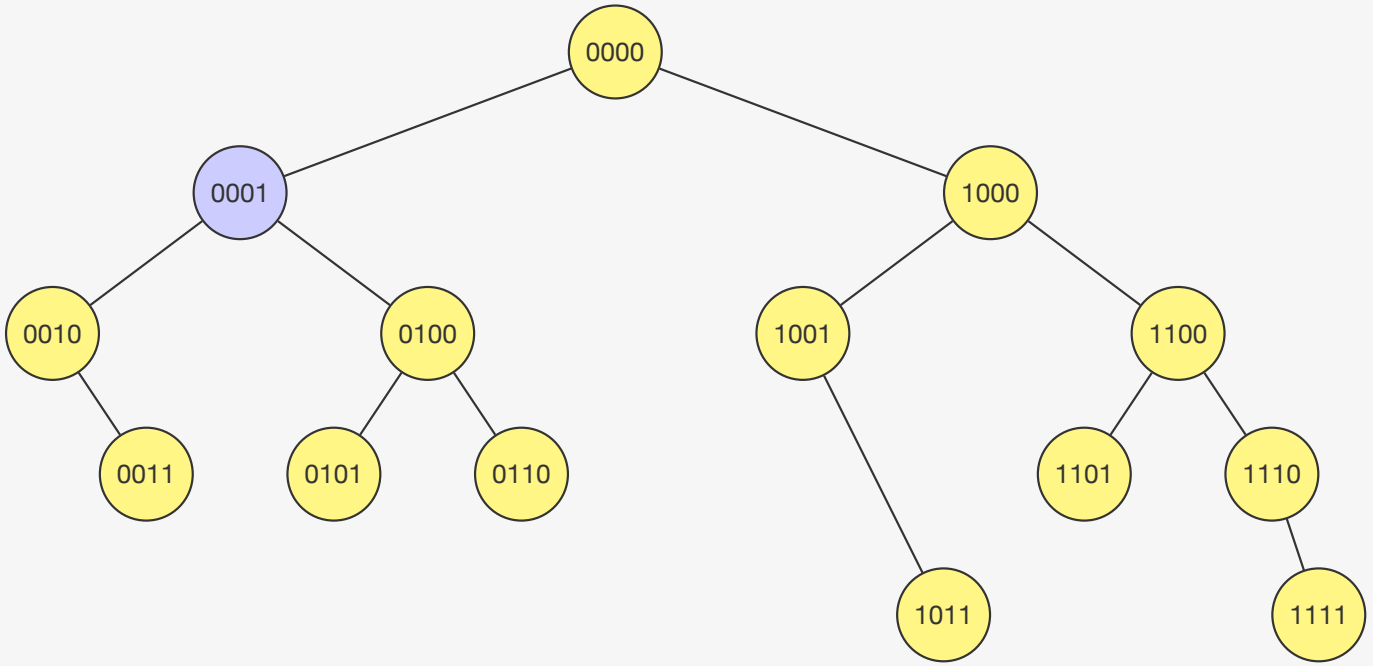
Remoção



Para remover:

- uma folha, basta apagá-la
- um nó com um filho, basta fazer o pai apontar para o neto

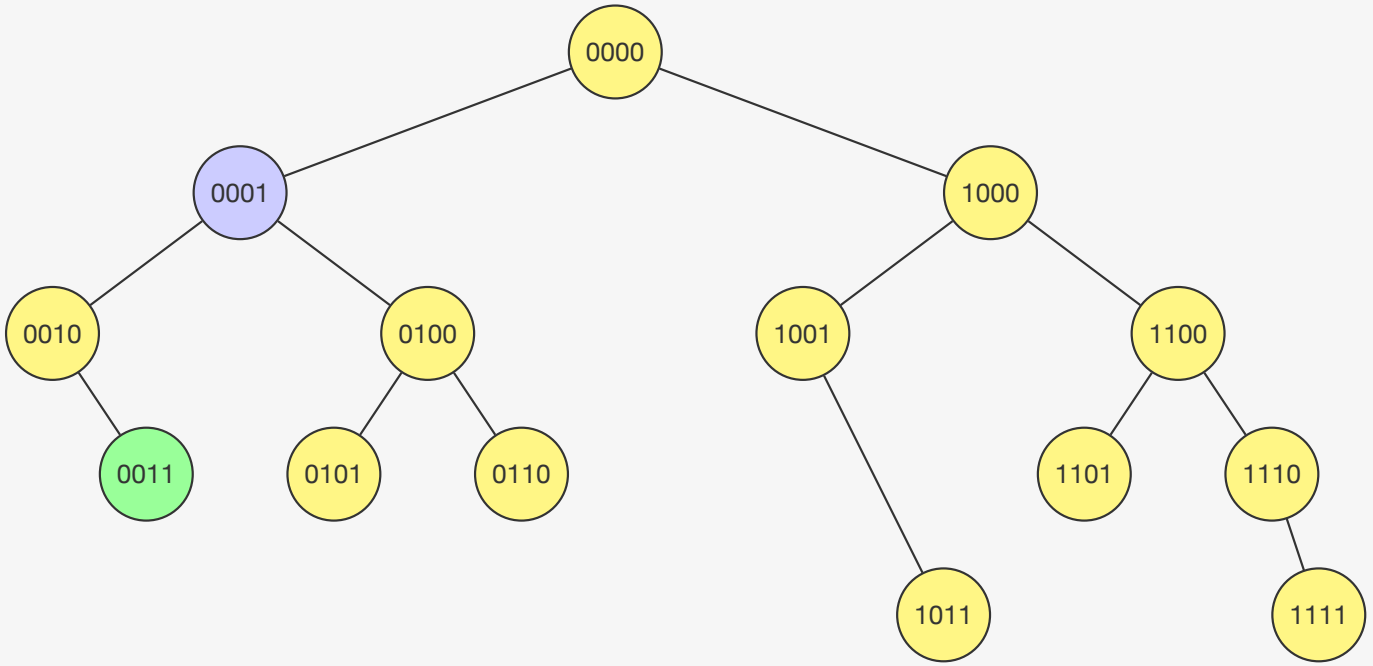
Remoção



Para remover:

- uma folha, basta apagá-la
- um nó com um filho, basta fazer o pai apontar para o neto
- um nó com dois filhos

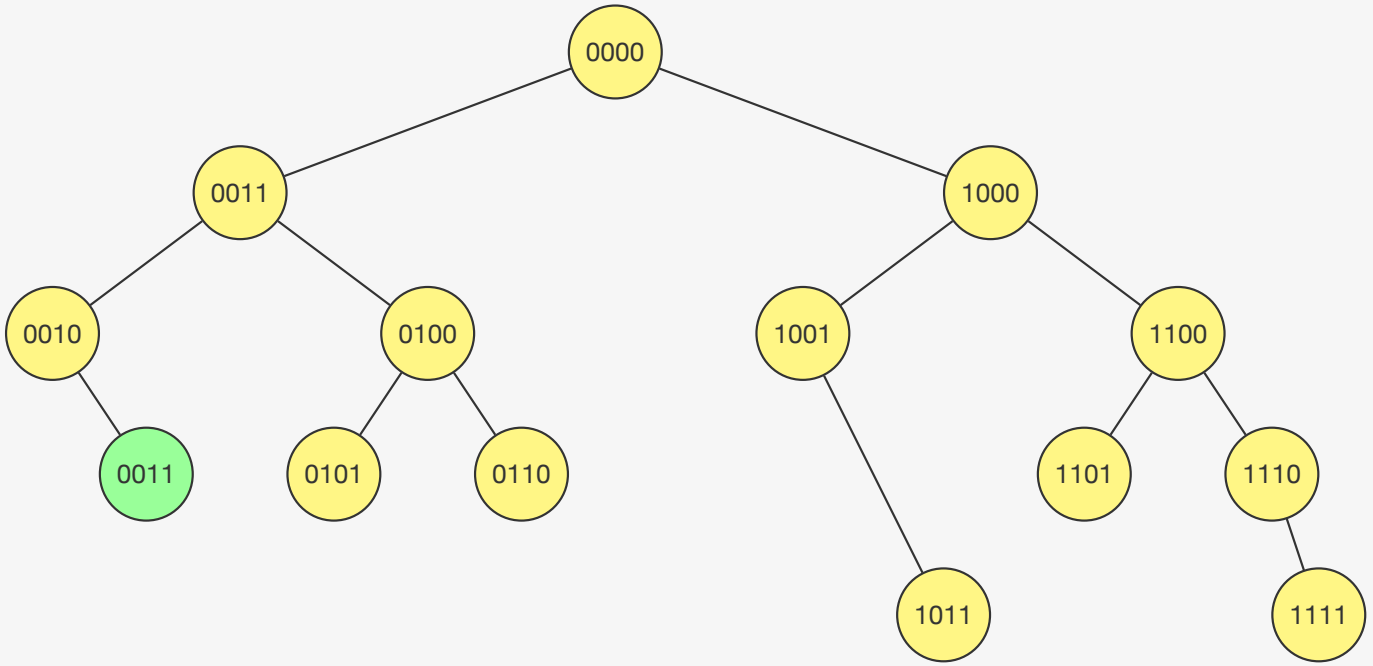
Remoção



Para remover:

- uma folha, basta apagá-la
- um nó com um filho, basta fazer o pai apontar para o neto
- um nó com dois filhos
  - copie um descendente (qualquer) por cima do nó

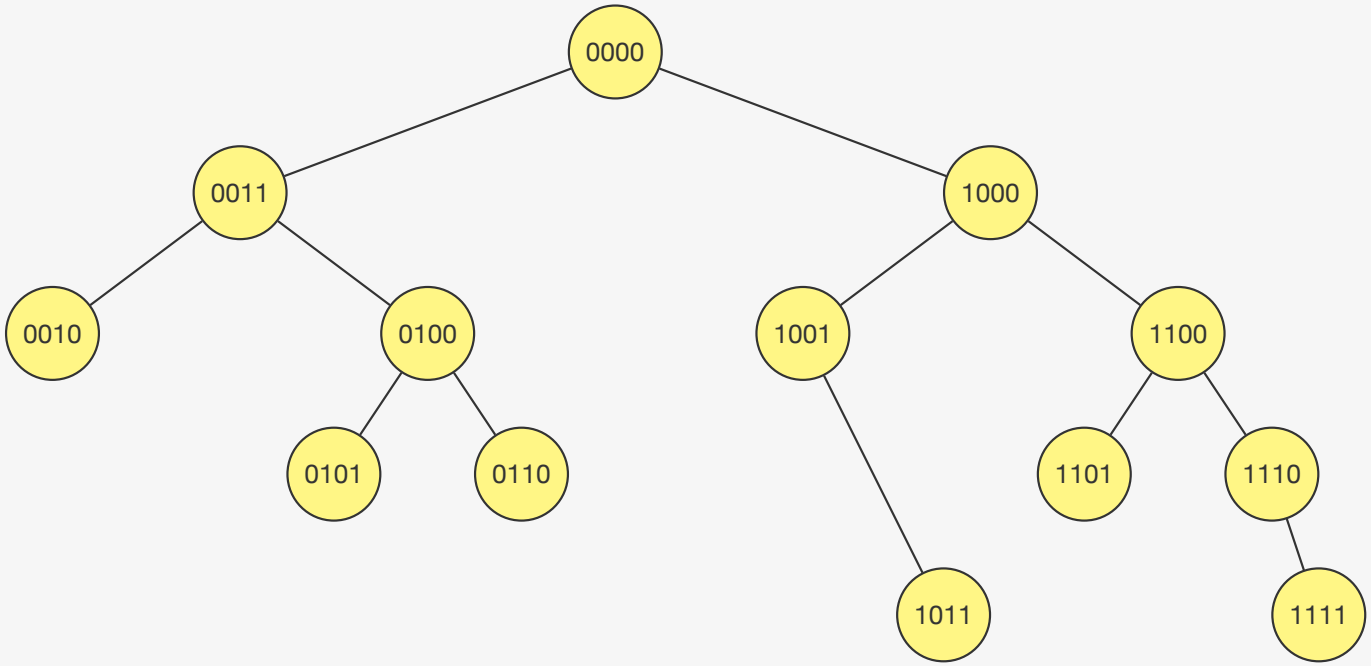
Remoção



Para remover:

- uma folha, basta apagá-la
- um nó com um filho, basta fazer o pai apontar para o neto
- um nó com dois filhos
  - copie um descendente (qualquer) por cima do nó
  - apague o descendente

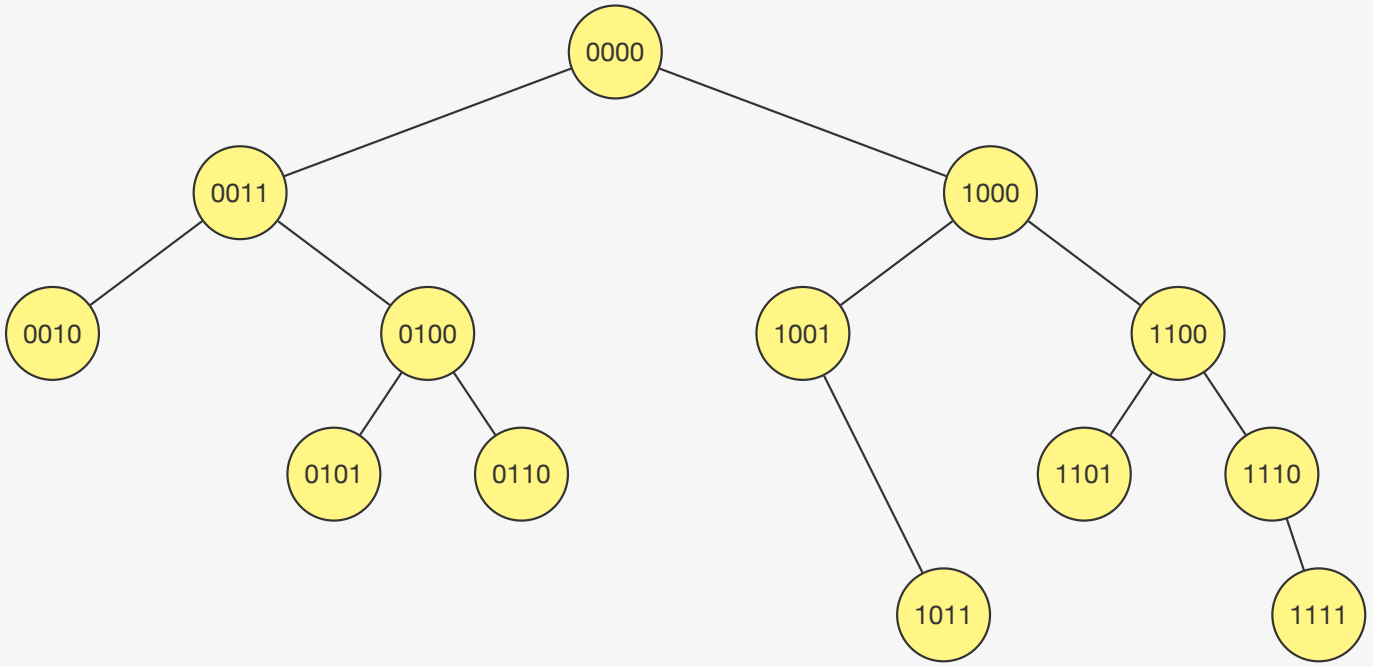
Remoção



Para remover:

- uma folha, basta apagá-la
- um nó com um filho, basta fazer o pai apontar para o neto
- um nó com dois filhos
  - copie um descendente (qualquer) por cima do nó
  - apague o descendente

Remoção



Para remover:

- uma folha, basta apagá-la
- um nó com um filho, basta fazer o pai apontar para o neto
- um nó com dois filhos
  - copie um descendente (qualquer) por cima do nó
  - apague o descendente

Exercício: Faça a implementação da remoção

Tries

As árvores digitais de busca tem um problema:

Tries

As árvores digitais de busca tem um problema:

- As chaves não estão ordenadas

Tries

As árvores digitais de busca tem um problema:

- As chaves não estão ordenadas
- Algumas operações que envolvem a ordem ficam caras

Tries

As árvores digitais de busca tem um problema:

- As chaves não estão ordenadas
- Algumas operações que envolvem a ordem ficam caras
  - imprimir ordenado, sucessor e antecessor, por exemplo

Tries

As árvores digitais de busca tem um problema:

- As chaves não estão ordenadas
- Algumas operações que envolvem a ordem ficam caras
  - imprimir ordenado, sucessor e antecessor, por exemplo

Tries: utilizam uma ideia parecida

Tries

As árvores digitais de busca tem um problema:

- As chaves não estão ordenadas
- Algumas operações que envolvem a ordem ficam caras
  - imprimir ordenado, sucessor e antecessor, por exemplo

Tries: utilizam uma ideia parecida

- Mas conseguimos usar a informação da ordem das chaves

Tries

As árvores digitais de busca tem um problema:

- As chaves não estão ordenadas
- Algumas operações que envolvem a ordem ficam caras
  - imprimir ordenado, sucessor e antecessor, por exemplo

Tries: utilizam uma ideia parecida

- Mas conseguimos usar a informação da ordem das chaves
- Vem da palavra re*trie*val

Tries

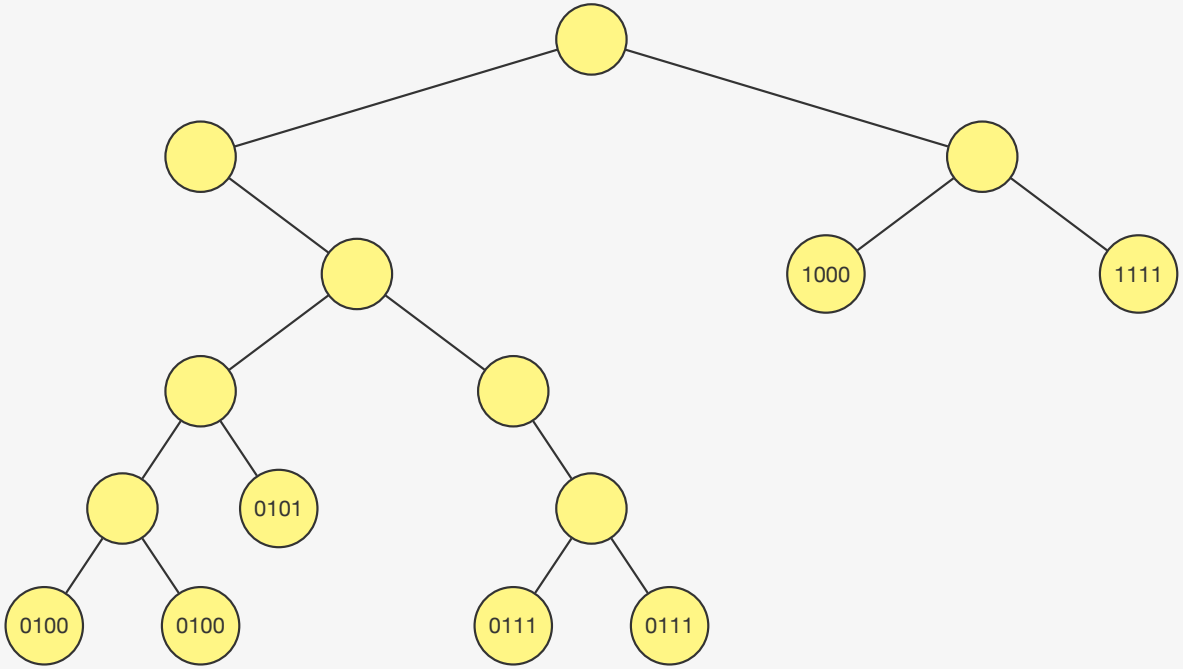
As árvores digitais de busca tem um problema:

- As chaves não estão ordenadas
- Algumas operações que envolvem a ordem ficam caras
  - imprimir ordenado, sucessor e antecessor, por exemplo

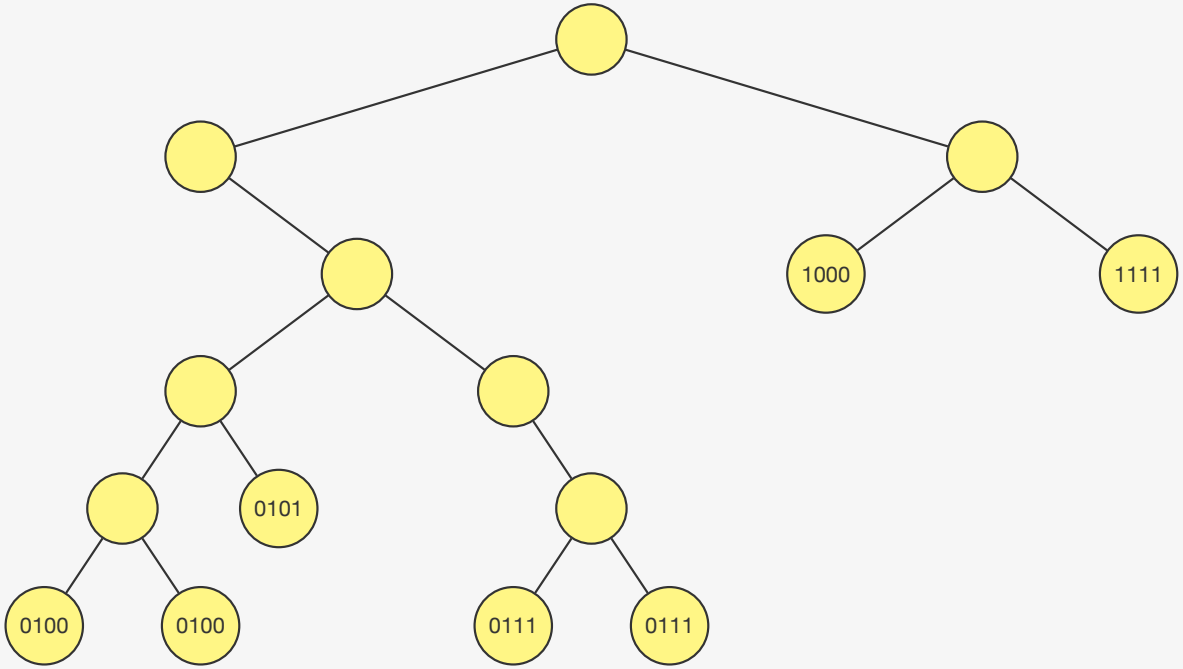
Tries: utilizam uma ideia parecida

- Mas conseguimos usar a informação da ordem das chaves
- Vem da palavra re*trie*val
  - Pronunciamos *try* ao invés de *tree*

Tries - Ideia

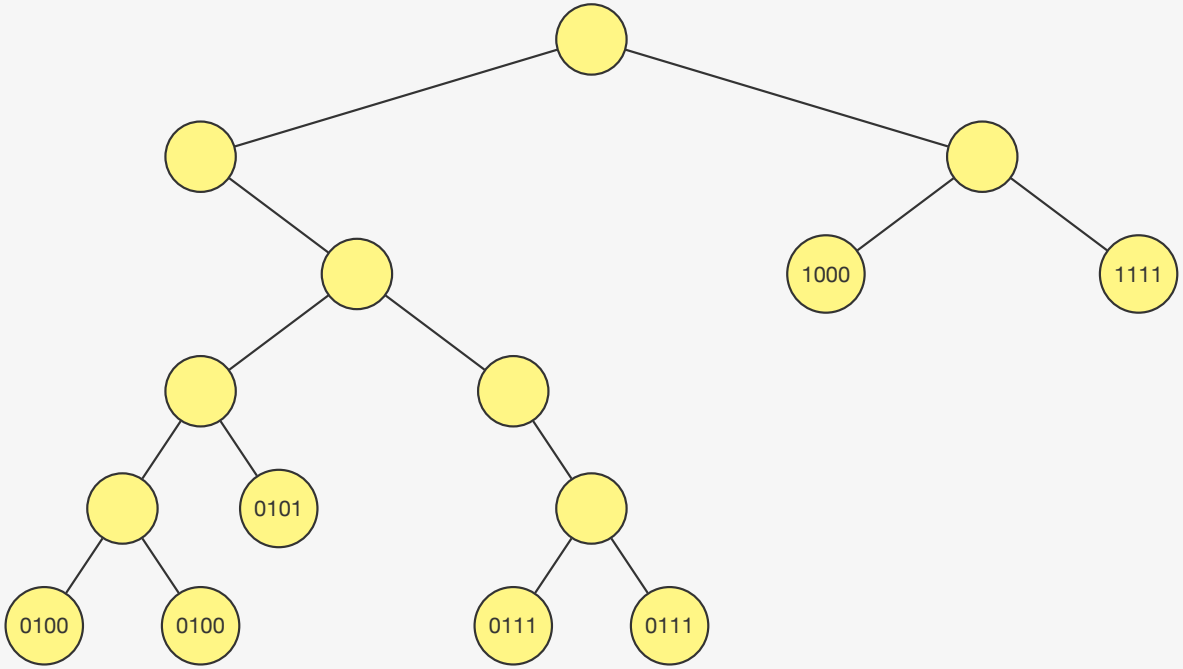


Tries - Ideia



Guardamos a informação nas apenas folhas:

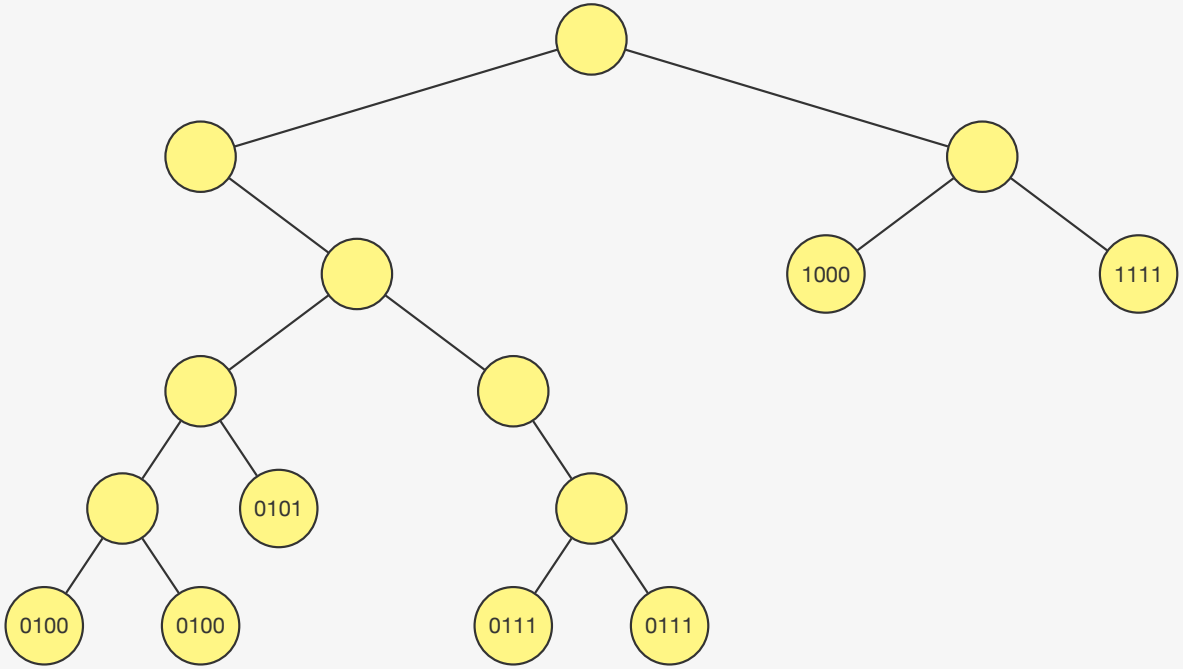
Tries - Ideia



Guardamos a informação nas apenas folhas:

- para buscar basta ir para a esquerda ou para a direita

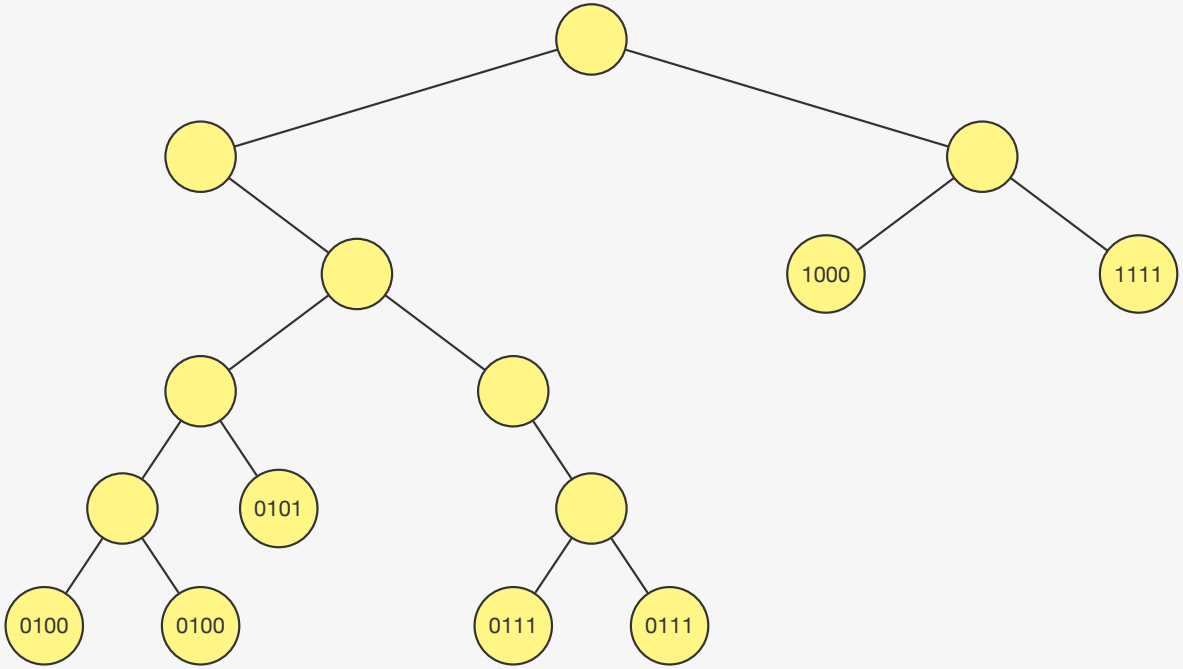
Tries - Ideia



Guardamos a informação nas apenas folhas:

- para buscar basta ir para a esquerda ou para a direita
  - dependendo do valor do k-ésimo bit

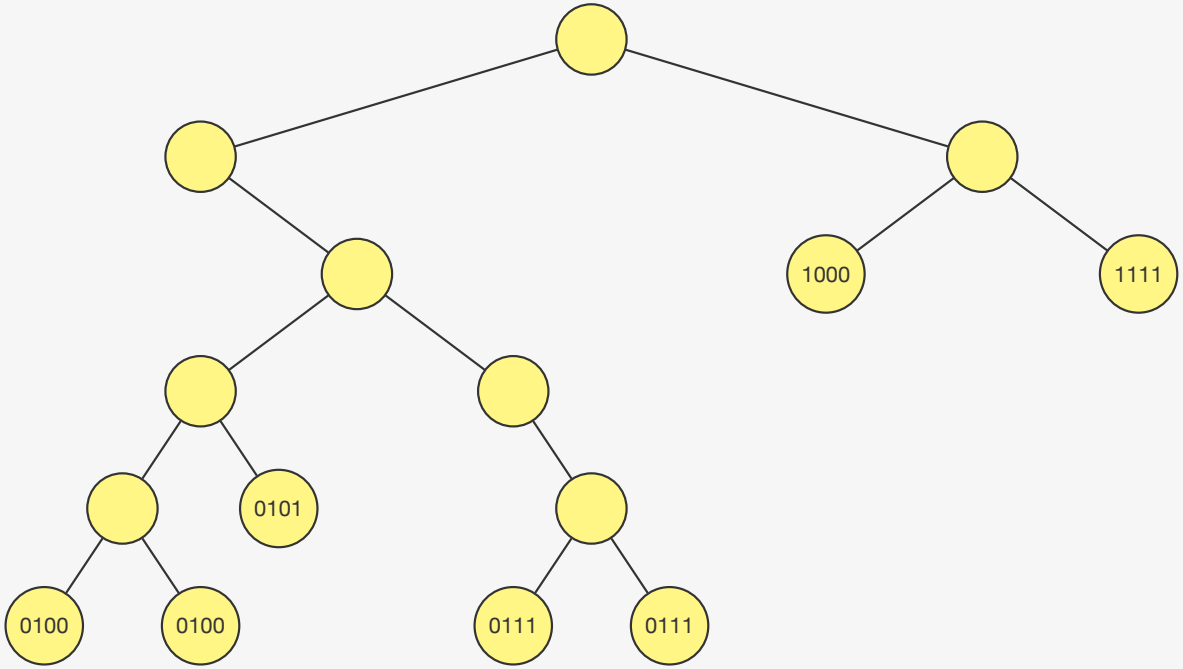
Tries - Ideia



Guardamos a informação nas apenas folhas:

- para buscar basta ir para a esquerda ou para a direita
  - dependendo do valor do k-ésimo bit
- Ao chegar em `NULL`, a chave não está na árvore

Tries - Ideia



Guardamos a informação nas apenas folhas:

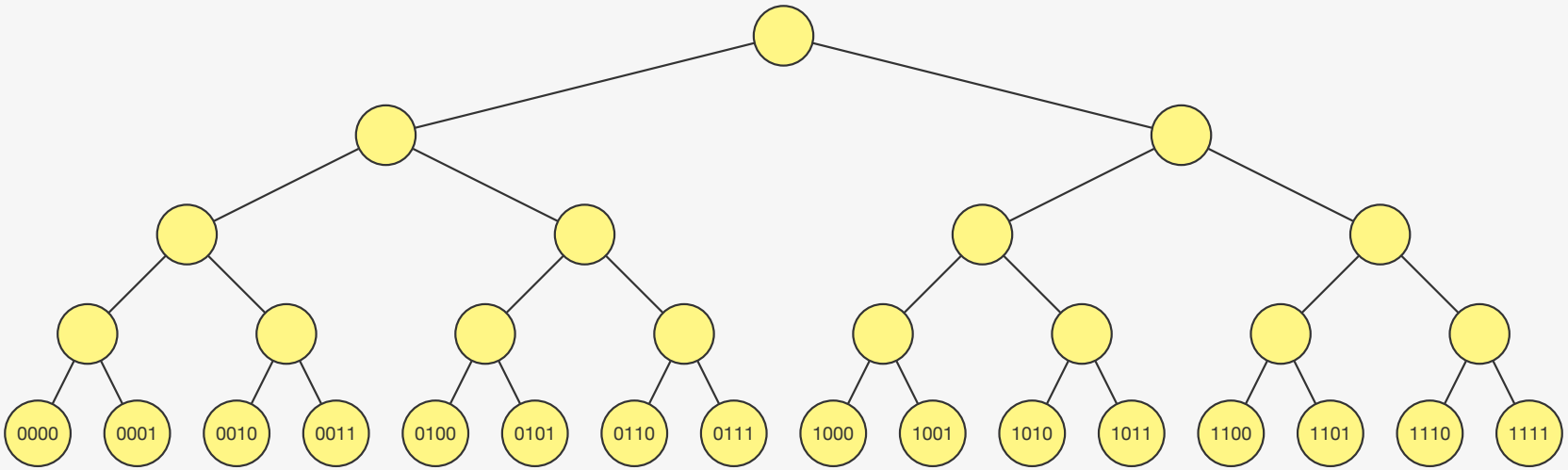
- para buscar basta ir para a esquerda ou para a direita
  - dependendo do valor do k-ésimo bit
- Ao chegar em `NULL`, a chave não está na árvore
- Ao chegar em uma folha, comparamos com o elemento

Tries - Problemas

Tries - Problemas

Problema 1:

- Armazenar os dados nas folhas desperdiça memória

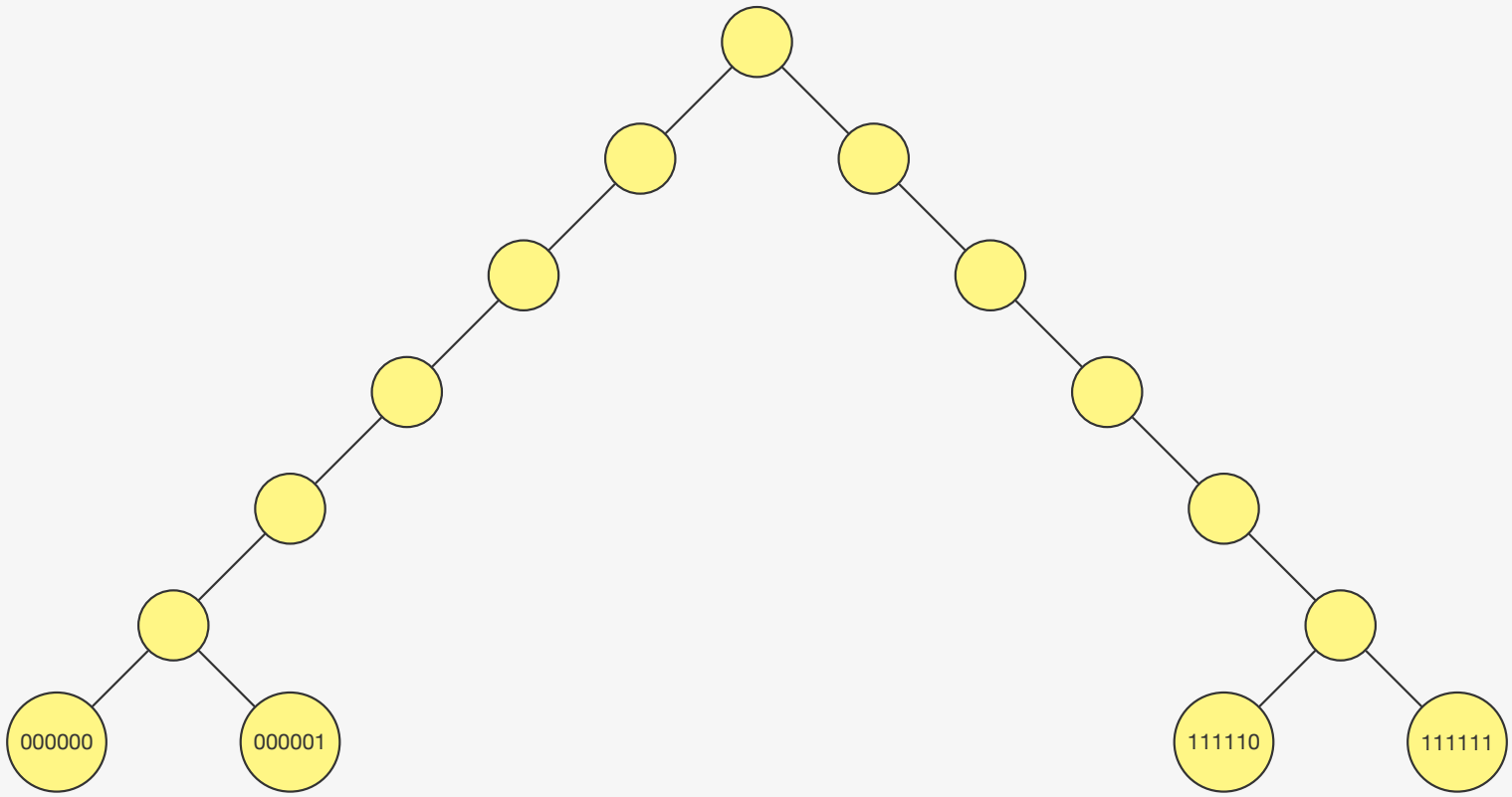


Tries - Problemas

Tries - Problemas

Problema 2:

- Para diferenciar duas chaves podem surgir longos caminhos



Patricia Tries

Practical algorithm to retreive informaton coded in alphanumeric

Patricia Tries

Practical algorithm to retreive informaton coded in alphanumeric

- As chaves são armazenadas nos nós internos

Patricia Tries

Practical algorithm to retreive informaton coded in alphanumeric

- As chaves são armazenadas nos nós internos
- Evita longos caminhos olhando para o bit que importa

Patricia Tries

Practical algorithm to retreive informaton coded in alphanumeric

- As chaves são armazenadas nos nós internos
- Evita longos caminhos olhando para o bit que importa
  - para diferenciar `000000` de `000001`, checamos o sexto bit

Patricia Tries

Practical algorithm to retreive informaton coded in alphanumeric

- As chaves são armazenadas nos nós internos
- Evita longos caminhos olhando para o bit que importa
  - para diferenciar `000000` de `000001`, checamos o sexto bit
  - não precisa olhar os outros bits

Inicialização e estrutura

```
1 typedef struct No {
2   unsigned chave;
3   int bit;
4   struct No *esq, *dir;
5 } No;
```

Inicialização e estrutura

```
1 typedef struct No {
2   unsigned chave;
3   int bit;
4   struct No *esq, *dir;
5 } No;
```

```
1 p_no cria_patricia() {
2   p_no novo = malloc(sizeof(No));
3   novo->chave = UINT_MAX;
4   novo->esq = novo->dir = novo;
5   novo->bit = -1;
6 }
```

Inicialização e estrutura

```
1 typedef struct No {
2   unsigned chave;
3   int bit;
4   struct No *esq, *dir;
5 } No;
```

```
1 p_no cria_patricia() {
2   p_no novo = malloc(sizeof(No));
3   novo->chave = UINT_MAX;
4   novo->esq = novo->dir = novo;
5   novo->bit = -1;
6 }
```

É uma árvore com cabeça: a raiz é um nó *dummy*

Inicialização e estrutura

```
1 typedef struct No {
2   unsigned chave;
3   int bit;
4   struct No *esq, *dir;
5 } No;
```

```
1 p_no cria_patricia() {
2   p_no novo = malloc(sizeof(No));
3   novo->chave = UINT_MAX;
4   novo->esq = novo->dir = novo;
5   novo->bit = -1;
6 }
```

É uma árvore com cabeça: a raiz é um nó *dummy*

`UINT_MAX` será uma chave proibida, diferente de qualquer outra chave da árvore

Inicialização e estrutura

```
1 typedef struct No {
2   unsigned chave;
3   int bit;
4   struct No *esq, *dir;
5 } No;
```

```
1 p_no cria_patricia() {
2   p_no novo = malloc(sizeof(No));
3   novo->chave = UINT_MAX;
4   novo->esq = novo->dir = novo;
5   novo->bit = -1;
6 }
```

É uma árvore com cabeça: a raiz é um nó *dummy*

`UINT_MAX` será uma chave proibida, diferente de qualquer outra chave da árvore

- É o valor máximo de um `unsigned`

Inicialização e estrutura

```
1 typedef struct No {
2   unsigned chave;
3   int bit;
4   struct No *esq, *dir;
5 } No;
```

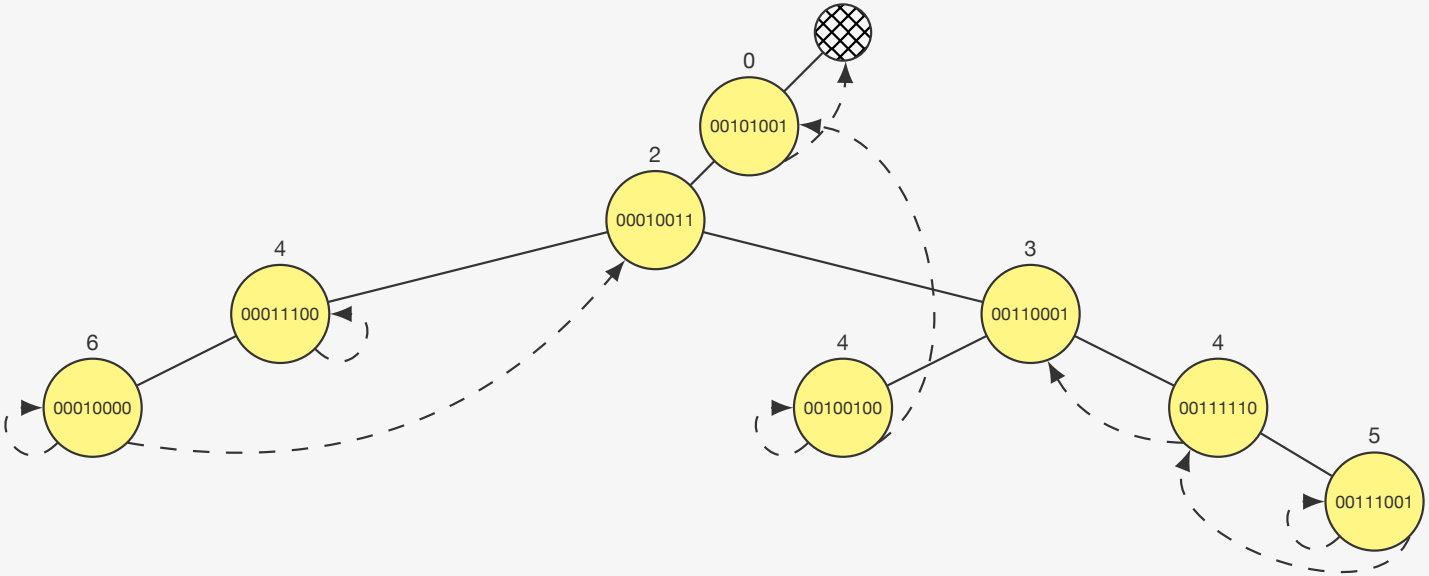
```
1 p_no cria_patricia() {
2   p_no novo = malloc(sizeof(No));
3   novo->chave = UINT_MAX;
4   novo->esq = novo->dir = novo;
5   novo->bit = -1;
6 }
```

É uma árvore com cabeça: a raiz é um nó *dummy*

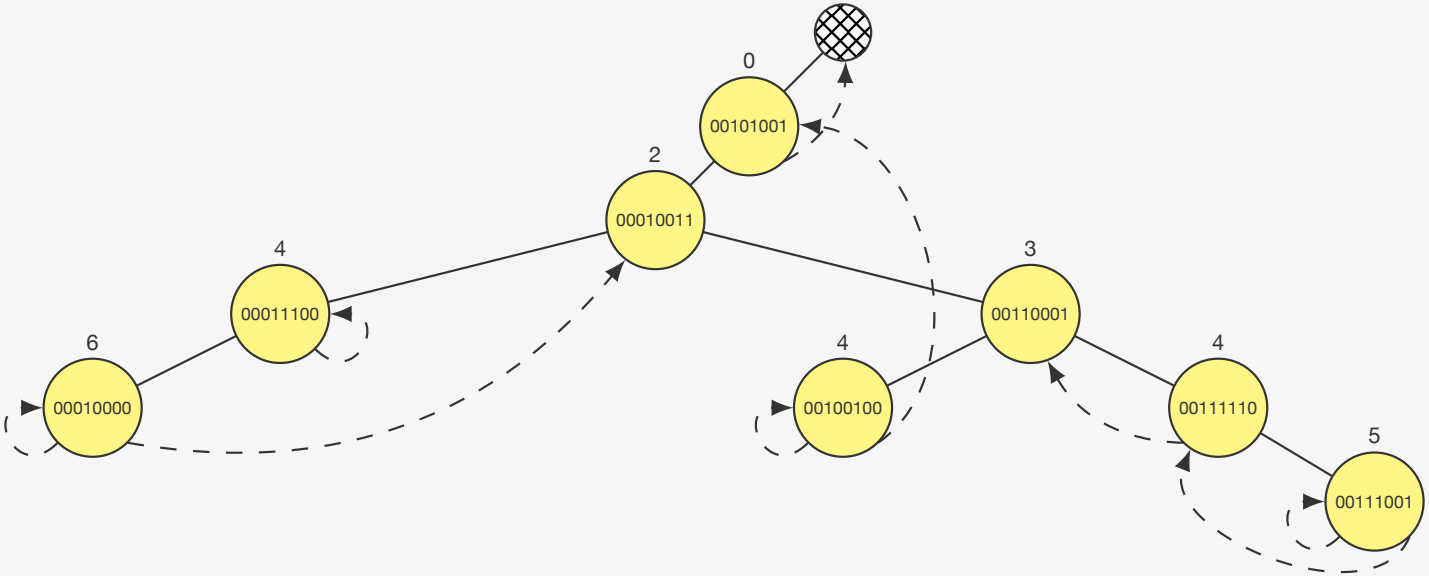
`UINT_MAX` será uma chave proibida, diferente de qualquer outra chave da árvore

- É o valor máximo de um `unsigned`
- Definido em `<limits.h>`

Patricia Trie

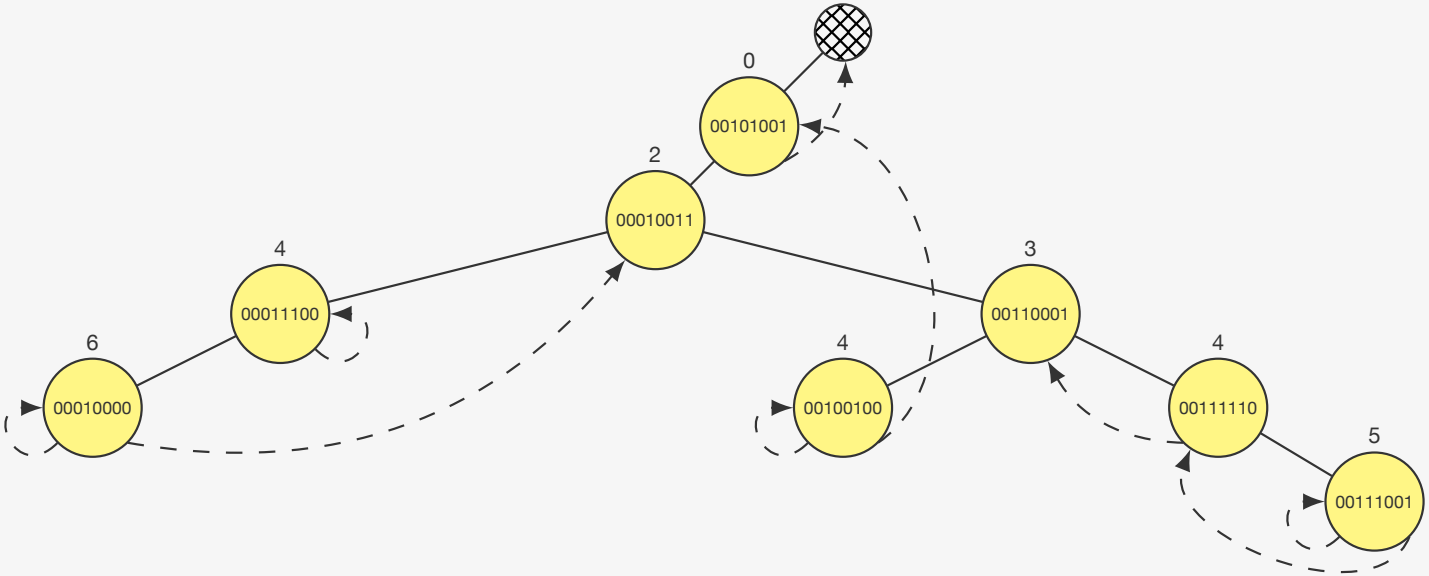


Patricia Trie



A busca é quase como numa Trie:

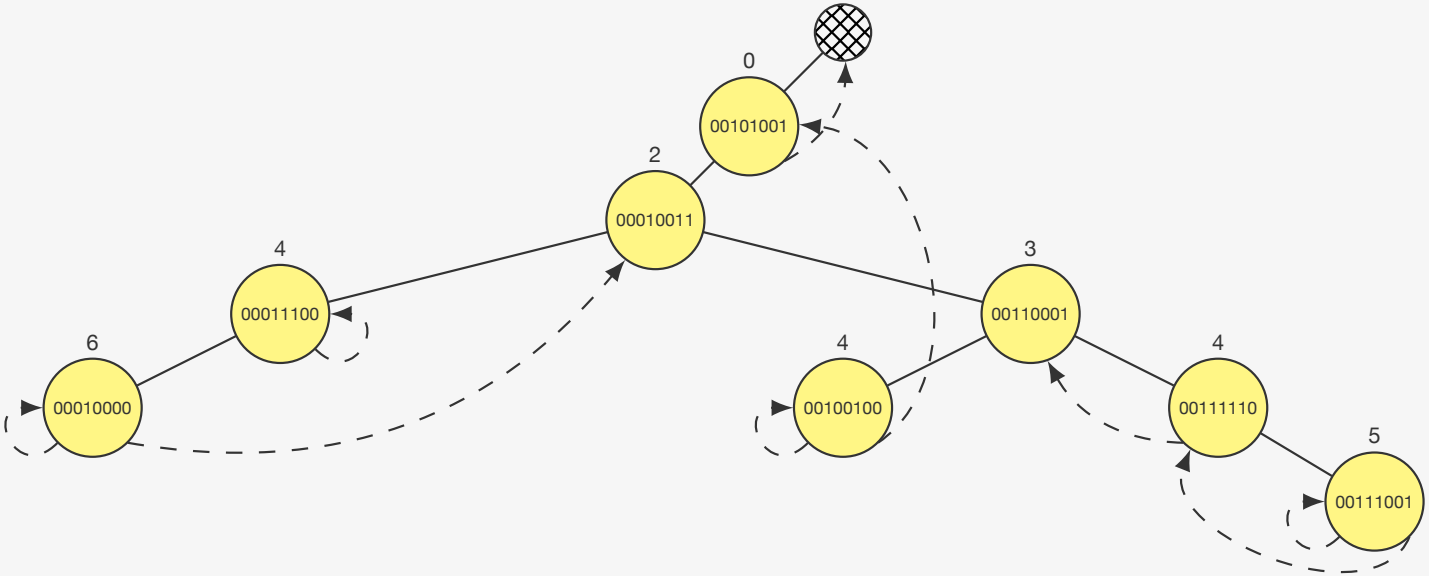
Patricia Trie



A busca é quase como numa Trie:

- descemos na árvore indo para a esquerda ou para a direita

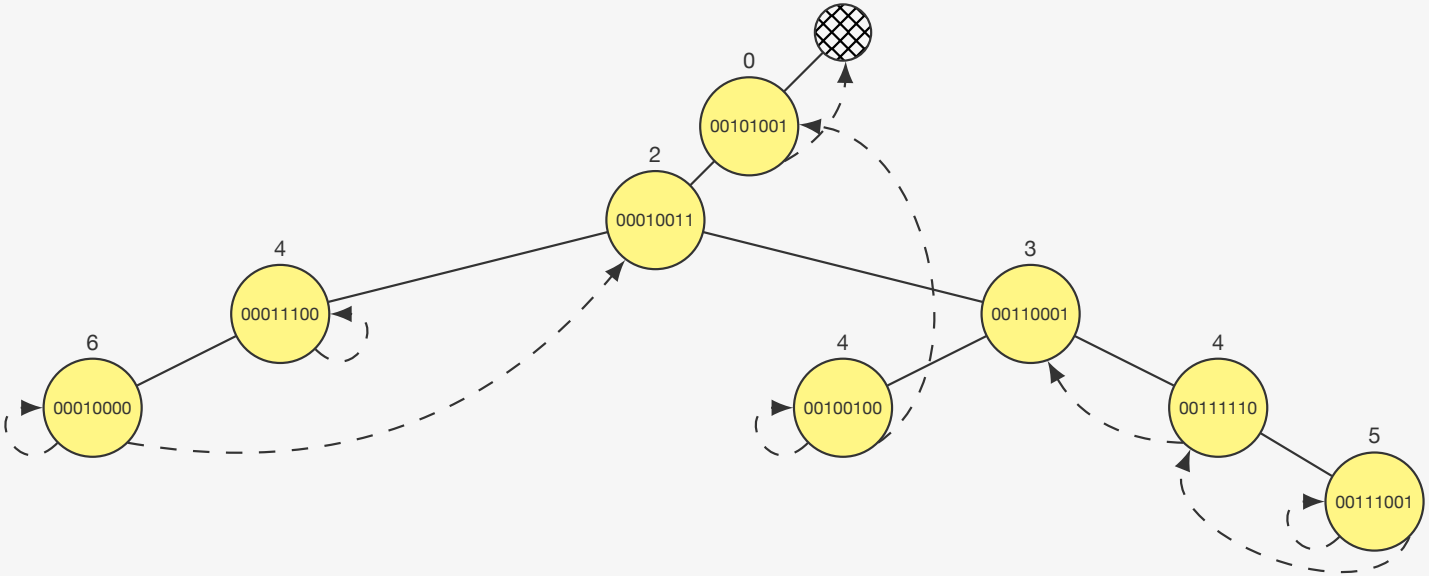
Patricia Trie



A busca é quase como numa Trie:

- descemos na árvore indo para a esquerda ou para a direita
- dependendo se o bit é zero ou um

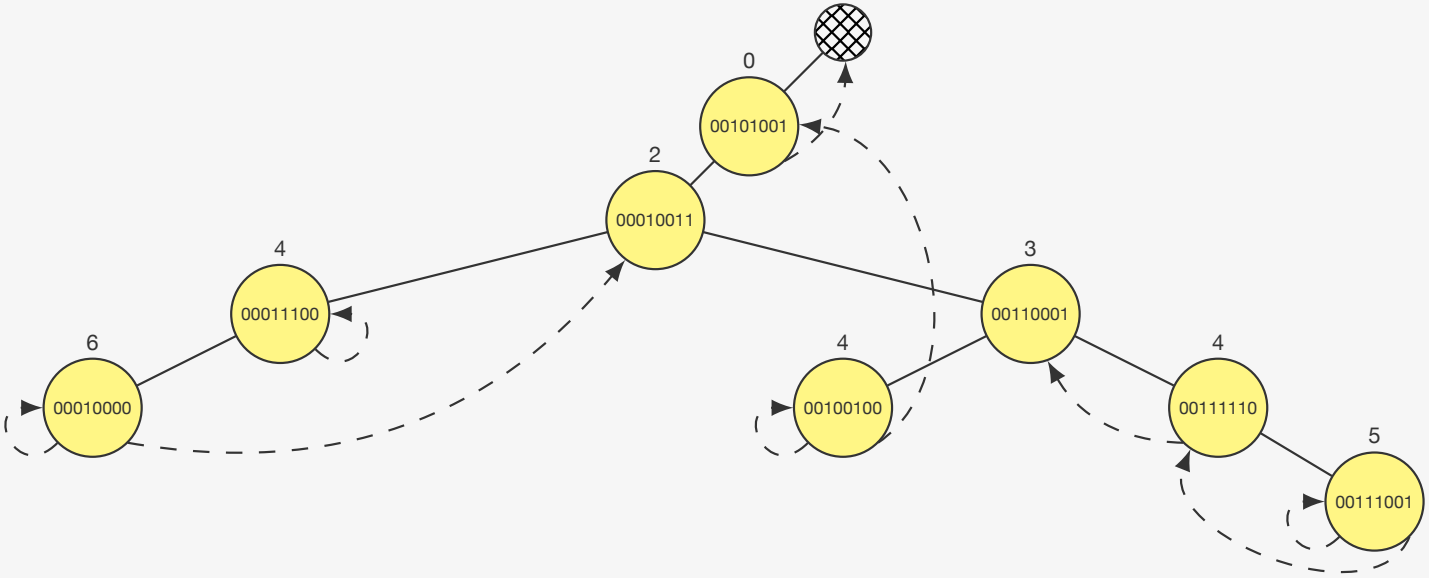
Patricia Trie



A busca é quase como numa Trie:

- descemos na árvore indo para a esquerda ou para a direita
- dependendo se o bit é zero ou um
  - mas podemos pular alguns bits

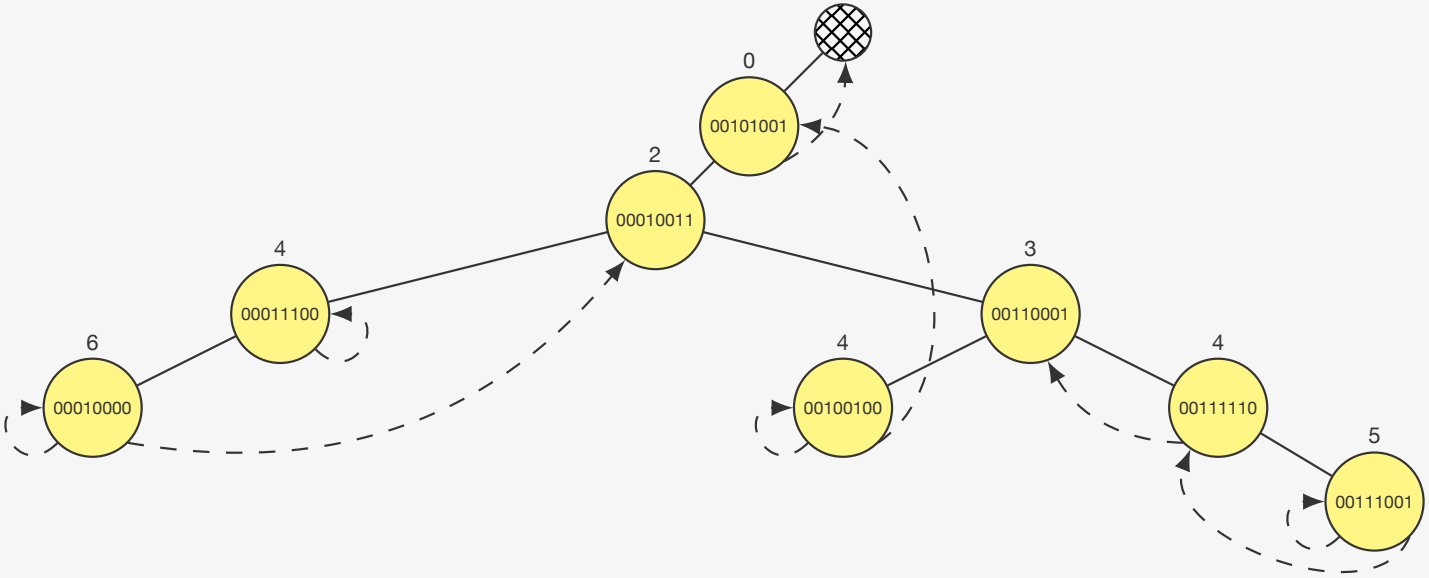
Patricia Trie



A busca é quase como numa Trie:

- descemos na árvore indo para a esquerda ou para a direita
- dependendo se o bit é zero ou um
  - mas podemos pular alguns bits
  - cada nó sabe qual é o bit que deve ser usado

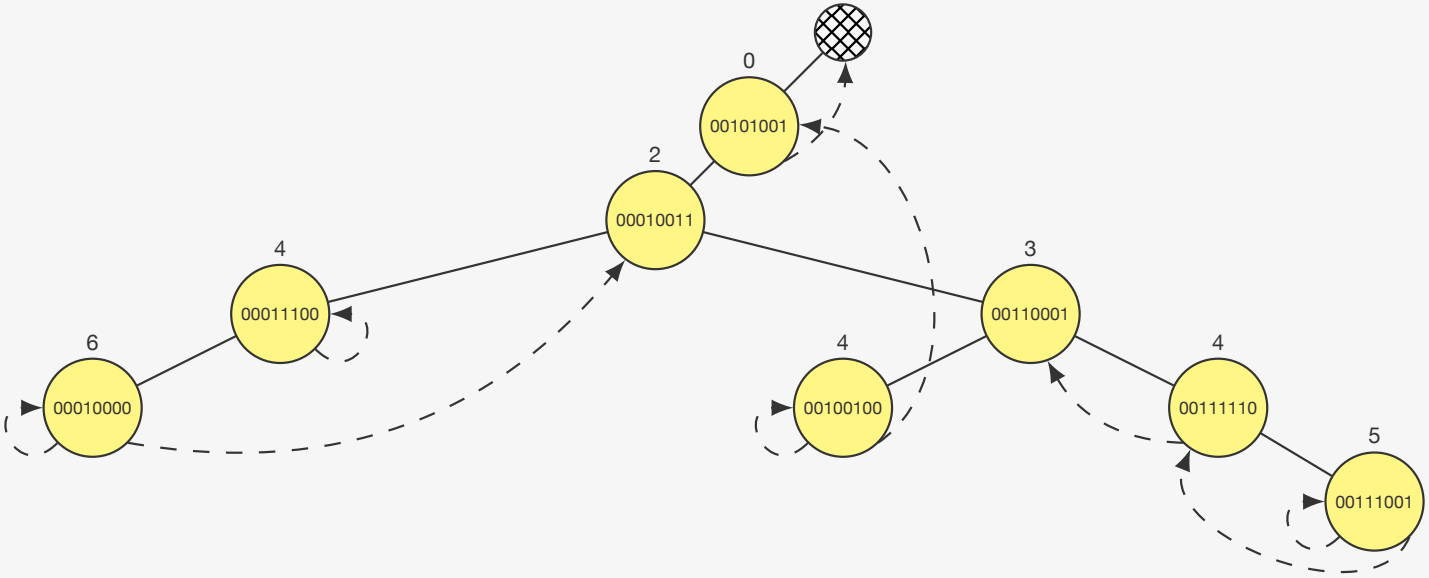
Patricia Trie



A busca é quase como numa Trie:

- descemos na árvore indo para a esquerda ou para a direita
- dependendo se o bit é zero ou um
  - mas podemos pular alguns bits
  - cada nó sabe qual é o bit que deve ser usado
  - isso evita caminhos longos desnecessários

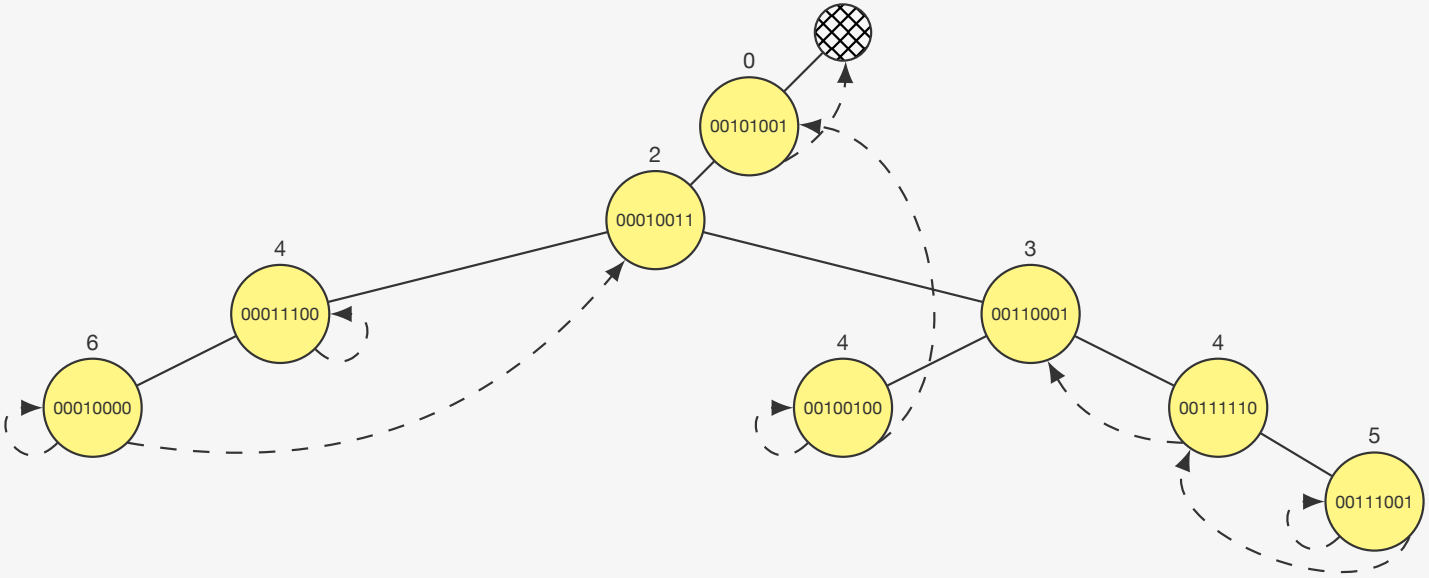
Patricia Trie



A busca é quase como numa Trie:

- descemos na árvore indo para a esquerda ou para a direita
- dependendo se o bit é zero ou um
  - mas podemos pular alguns bits
  - cada nó sabe qual é o bit que deve ser usado
  - isso evita caminhos longos desnecessários
- eventualmente, subiremos na árvore

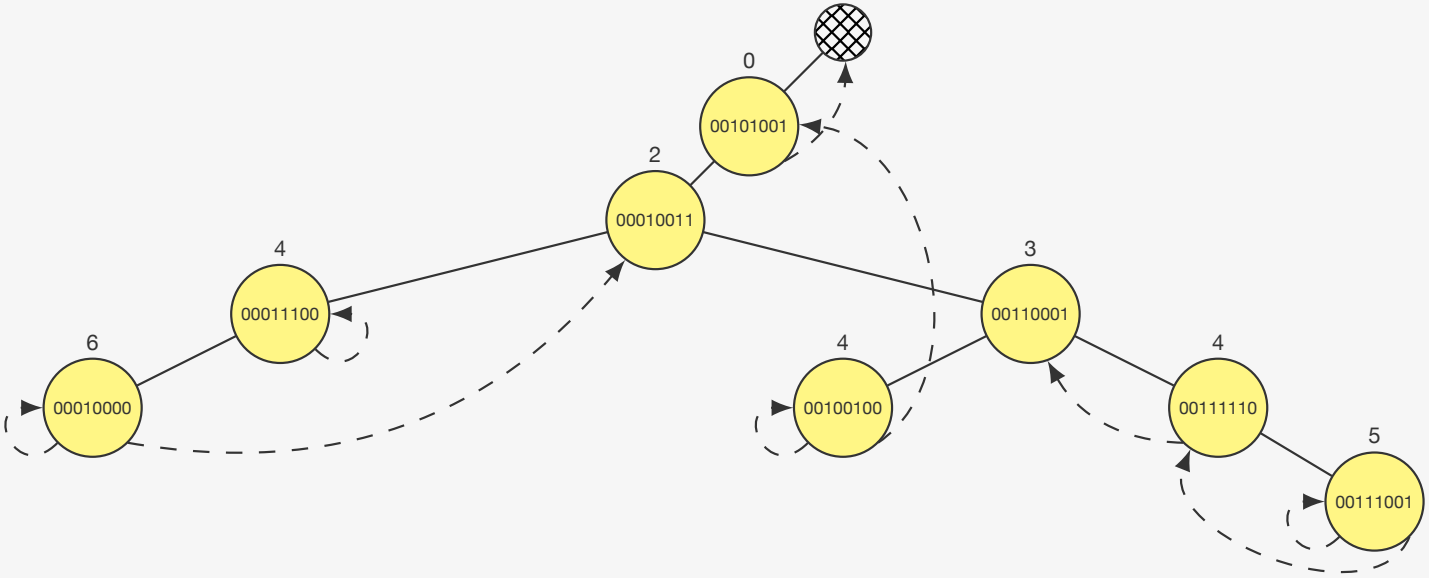
Patricia Trie



A busca é quase como numa Trie:

- descemos na árvore indo para a esquerda ou para a direita
- dependendo se o bit é zero ou um
  - mas podemos pular alguns bits
  - cada nó sabe qual é o bit que deve ser usado
  - isso evita caminhos longos desnecessários
- eventualmente, subiremos na árvore
  - basta comparar com a chave e encerrar a busca

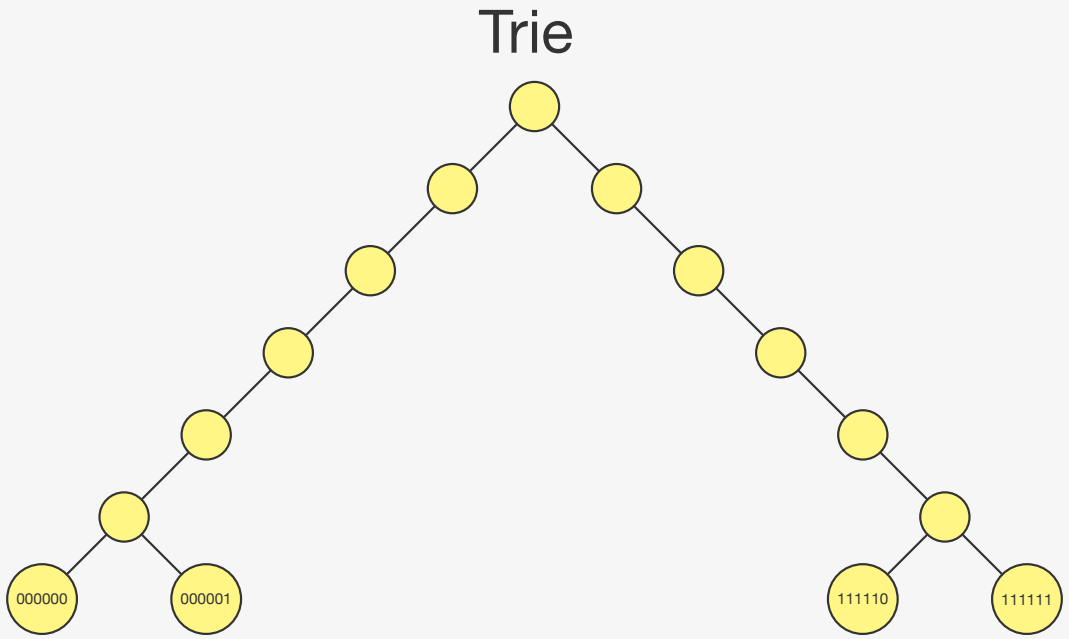
Patricia Trie

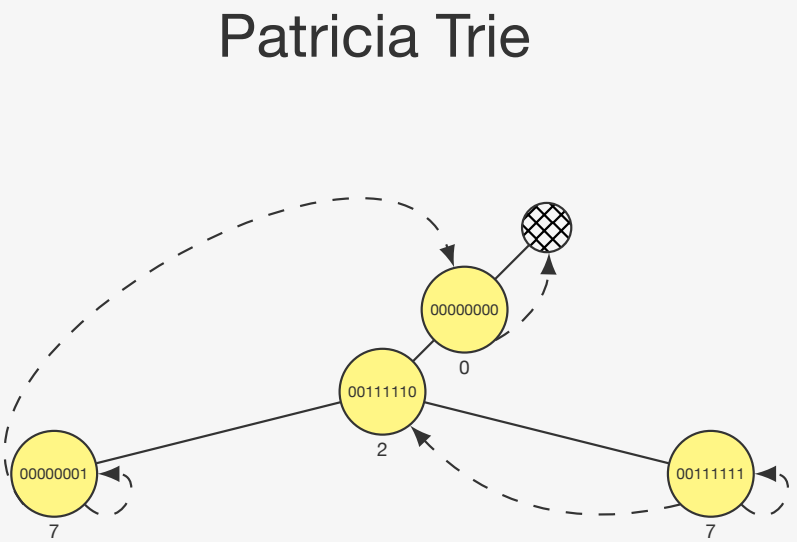


A busca é quase como numa Trie:

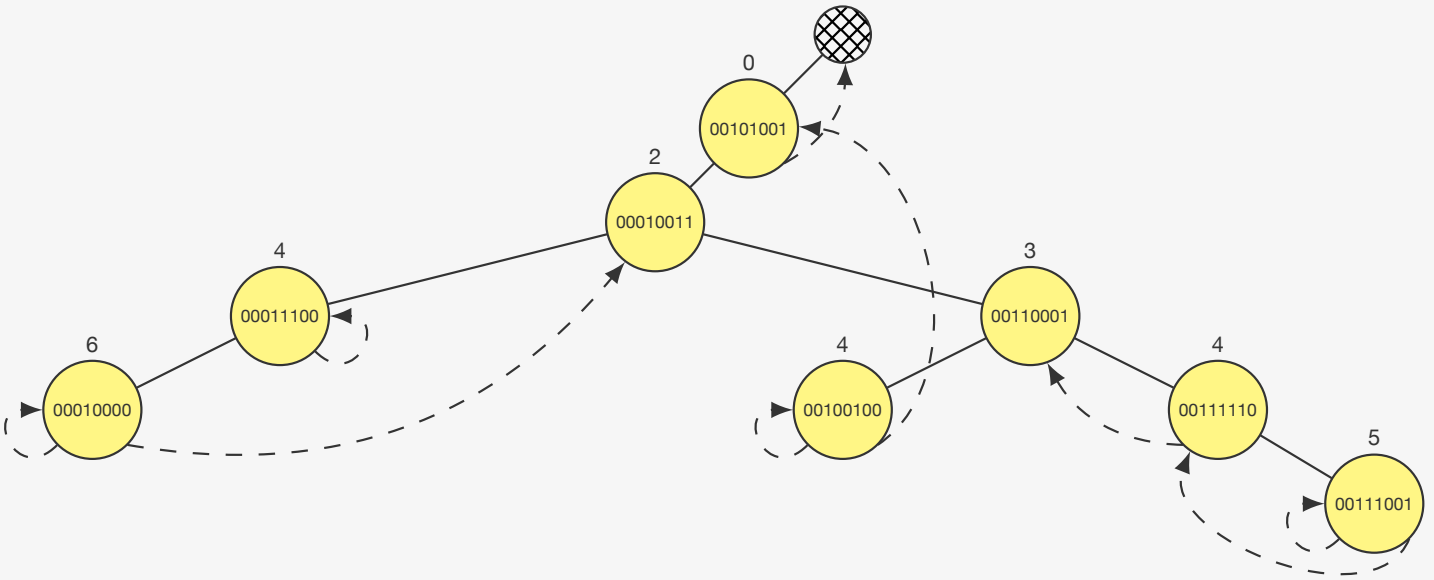
- descemos na árvore indo para a esquerda ou para a direita
- dependendo se o bit é zero ou um
  - mas podemos pular alguns bits
  - cada nó sabe qual é o bit que deve ser usado
  - isso evita caminhos longos desnecessários
- eventualmente, subiremos na árvore
  - basta comparar com a chave e encerrar a busca
  - é como se tivéssemos chegado na folha da Trie

Patricia Trie - Comparação com Trie



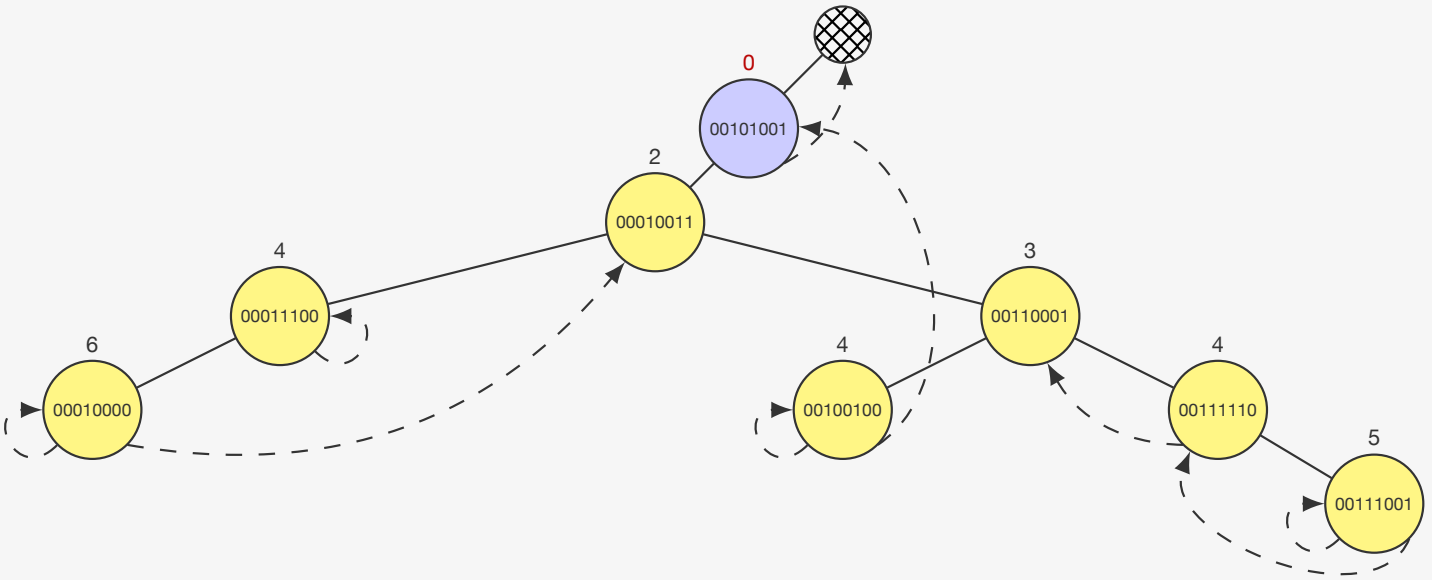


Patricia Trie - Simulação de Busca



Vamos procurar por 00101001

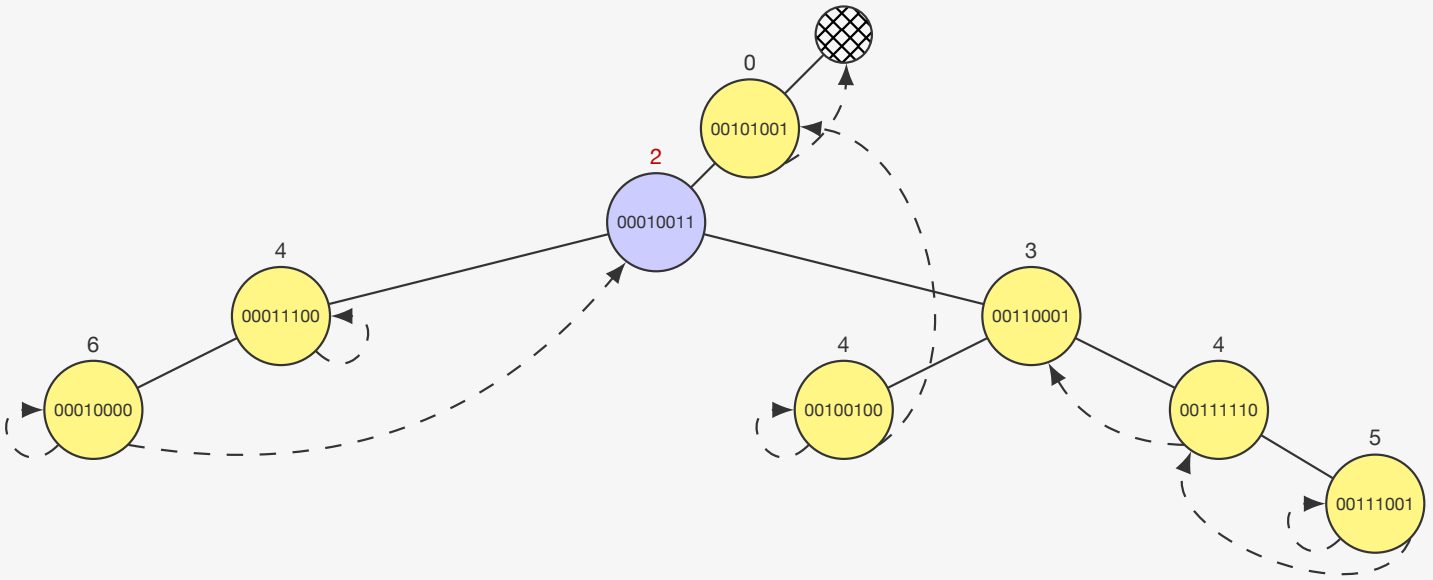
Patricia Trie - Simulação de Busca



Vamos procurar por 00101001

- O bit 0 de 00101001 é 0 - vá para a esquerda

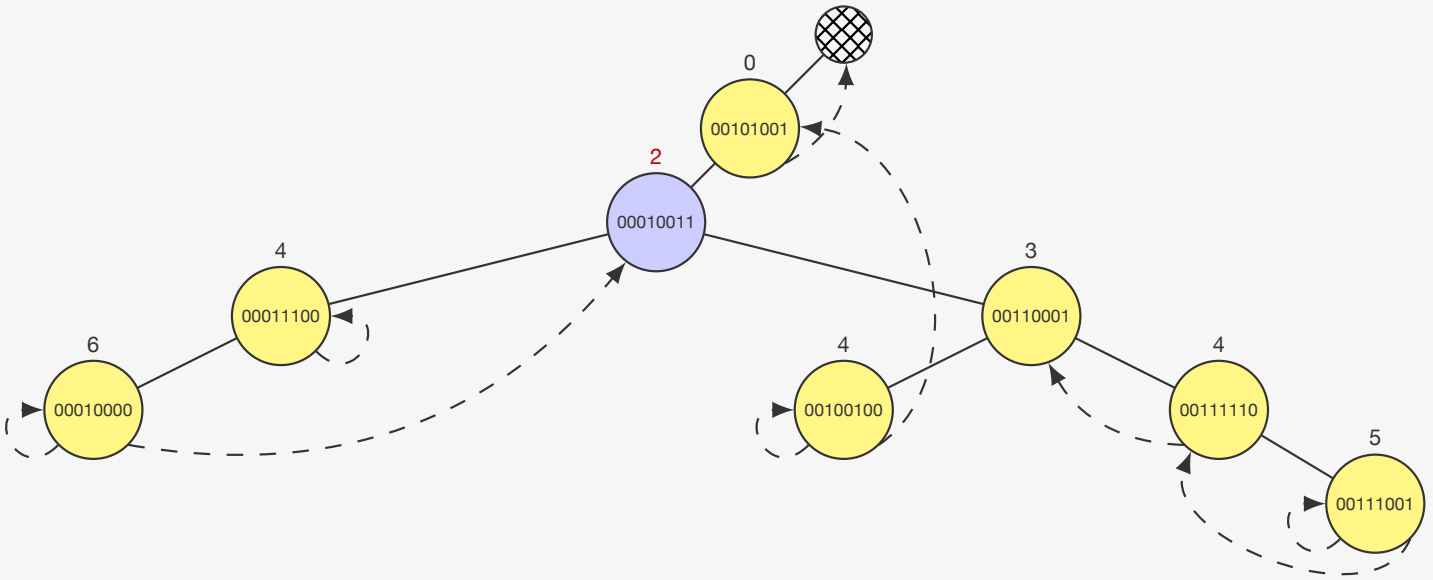
Patricia Trie - Simulação de Busca



Vamos procurar por 00101001

- O bit 0 de 00101001 é 0 - vá para a esquerda

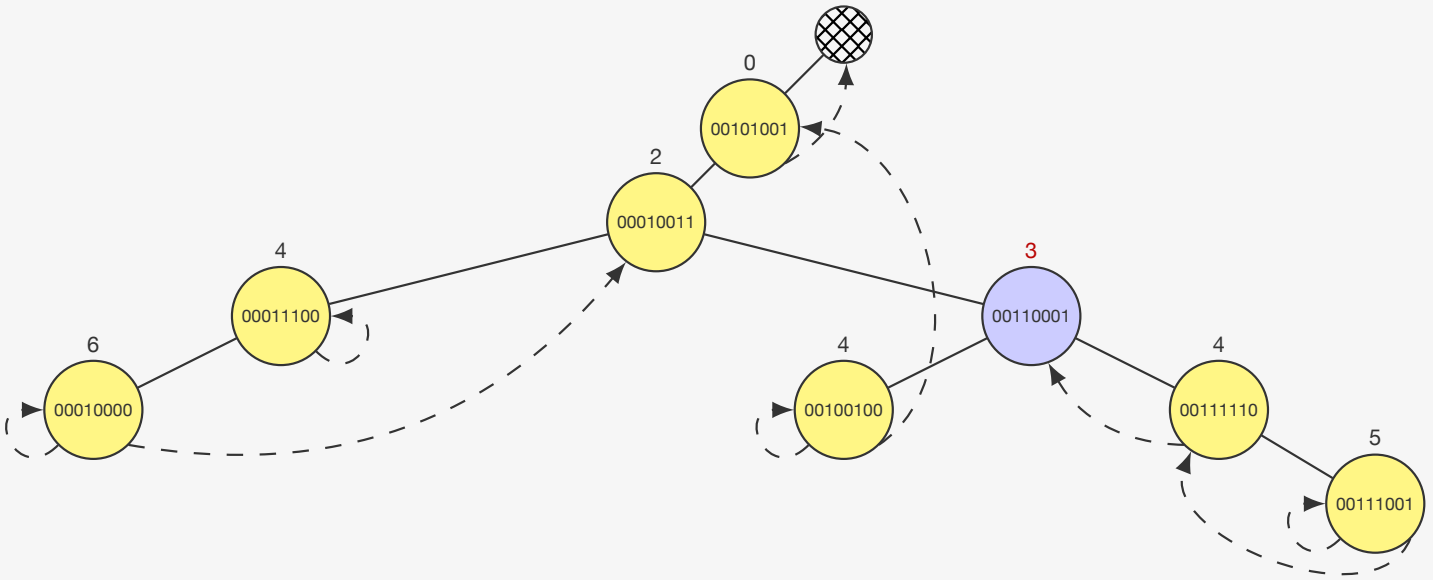
Patricia Trie - Simulação de Busca



Vamos procurar por 00101001

- O bit 0 de 00101001 é 0 - vá para a esquerda
- O bit 2 de 00101001 é 1 - vá para a direita

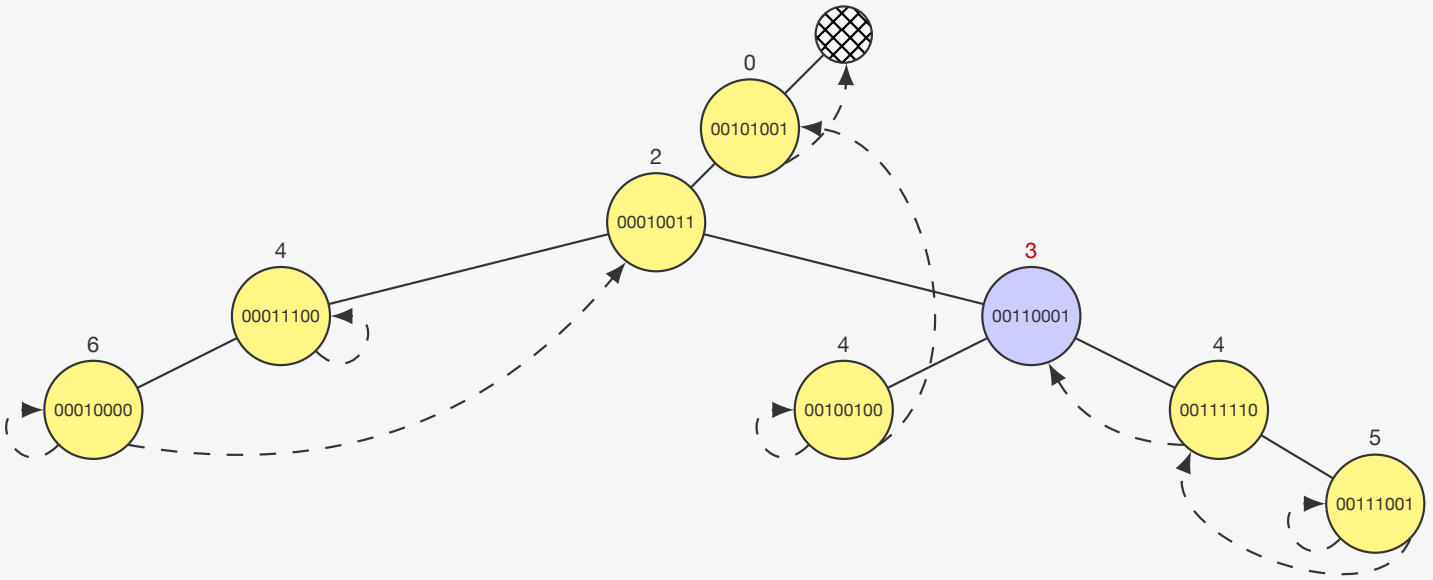
Patricia Trie - Simulação de Busca



Vamos procurar por `00101001`

- O bit `0` de `00101001` é `0` - vá para a esquerda
- O bit `2` de `00101001` é `1` - vá para a direita

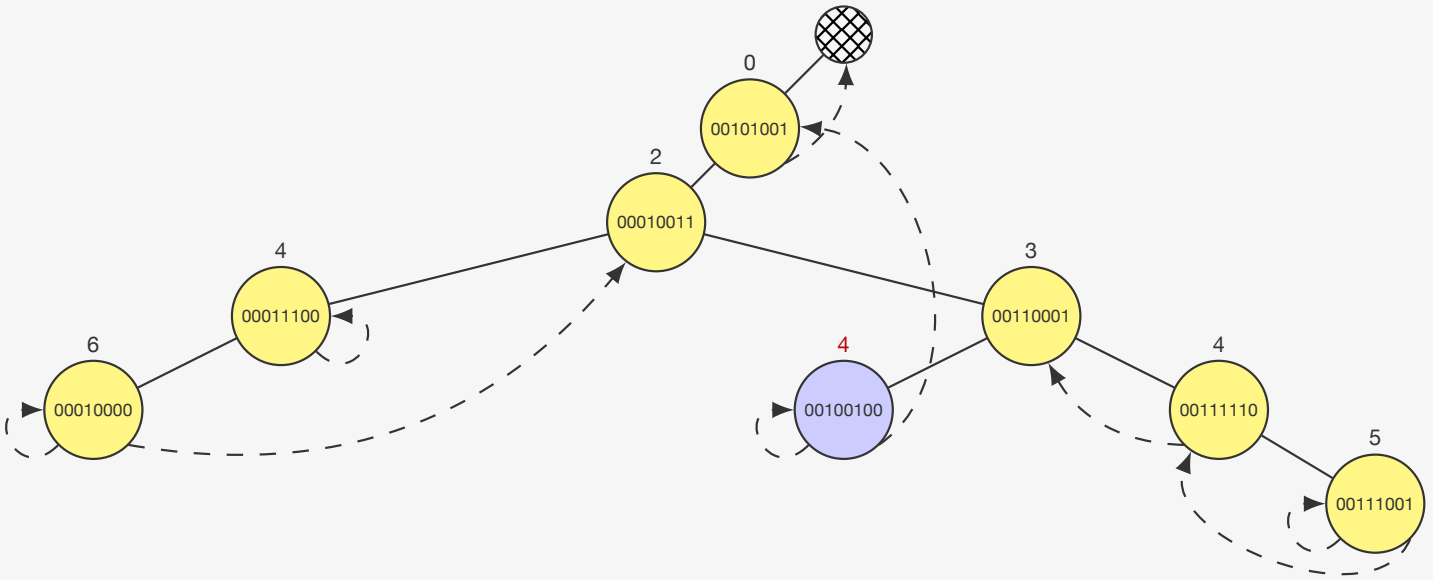
Patricia Trie - Simulação de Busca



Vamos procurar por `00101001`

- O bit `0` de `00101001` é `0` - vá para a esquerda
- O bit `2` de `00101001` é `1` - vá para a direita
- O bit `3` de `00101001` é `0` - vá para a esquerda

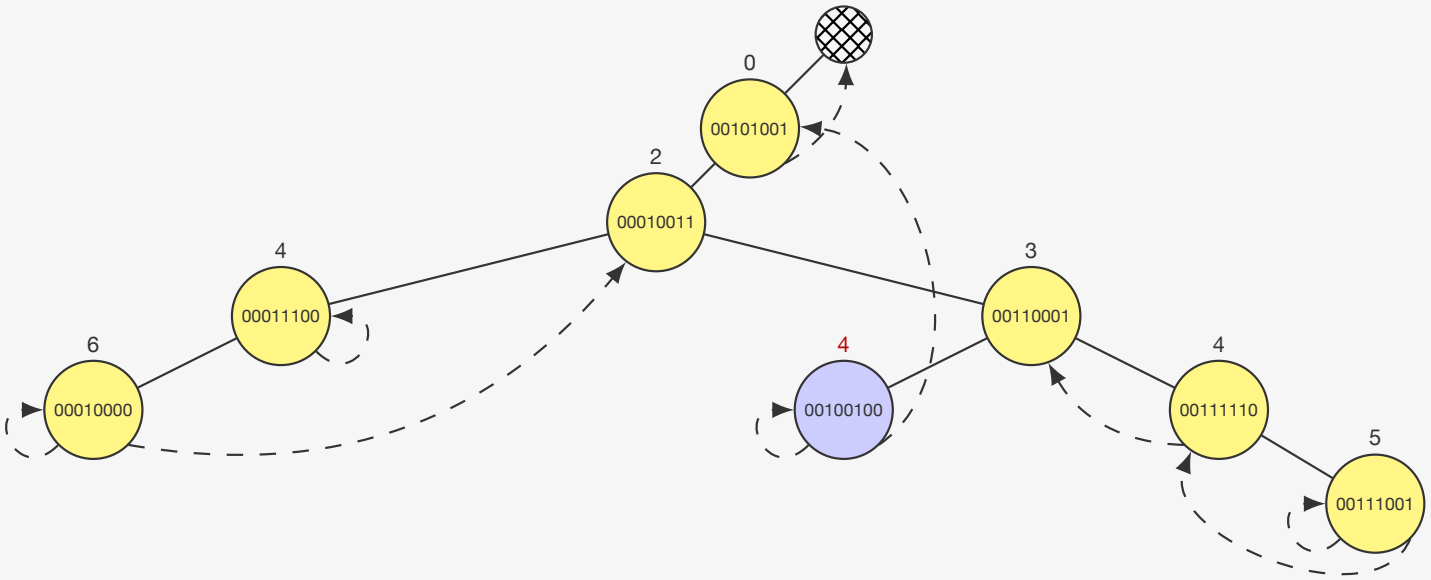
Patricia Trie - Simulação de Busca



Vamos procurar por `00101001`

- O bit `0` de `00101001` é `0` - vá para a esquerda
- O bit `2` de `00101001` é `1` - vá para a direita
- O bit `3` de `00101001` é `0` - vá para a esquerda

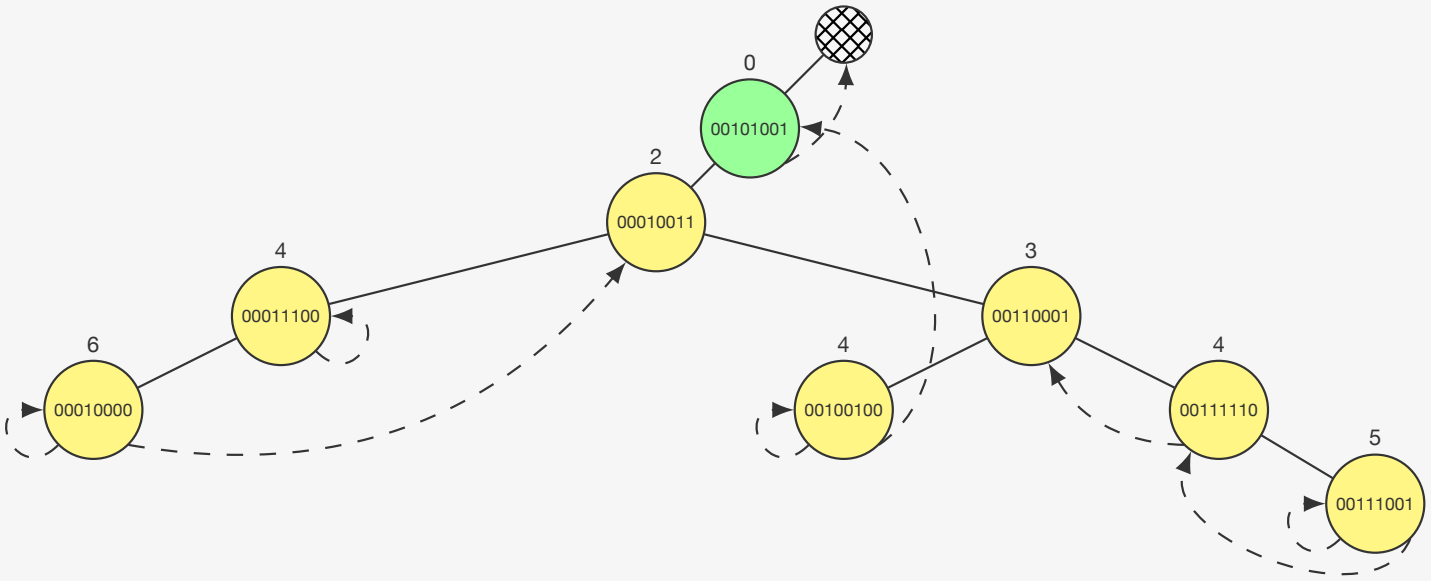
Patricia Trie - Simulação de Busca



Vamos procurar por `00101001`

- O bit `0` de `00101001` é `0` - vá para a esquerda
- O bit `2` de `00101001` é `1` - vá para a direita
- O bit `3` de `00101001` é `0` - vá para a esquerda
- O bit `4` de `00101001` é `1` - vá para a direita

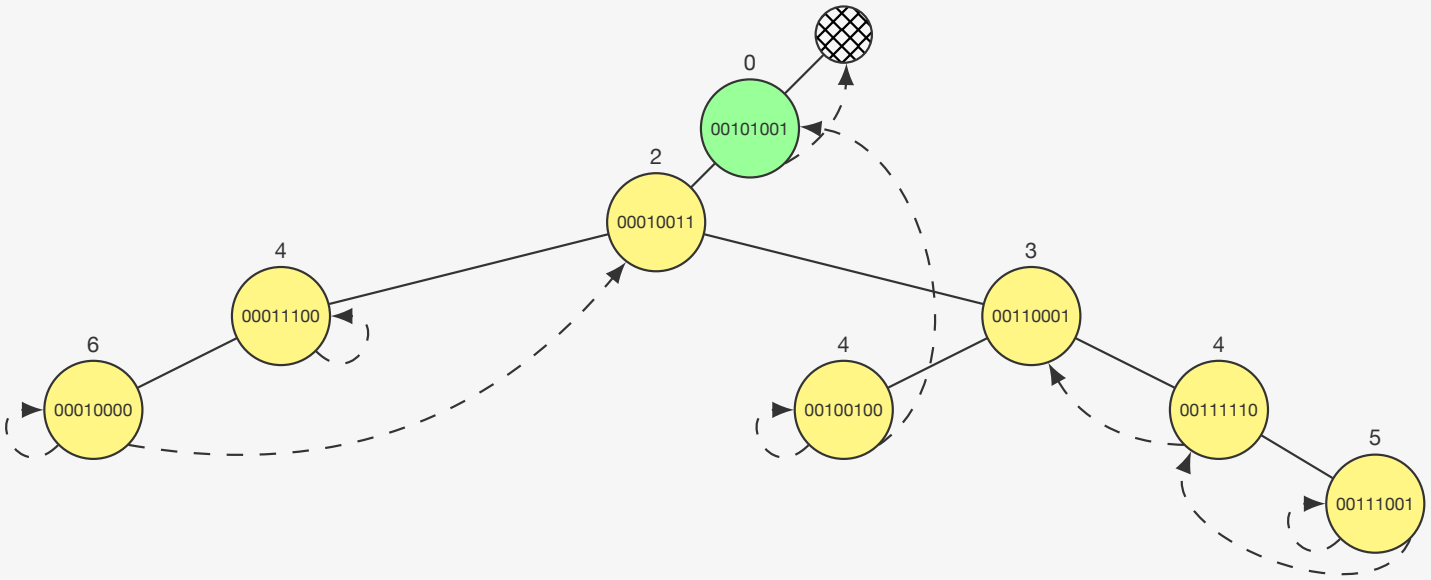
Patricia Trie - Simulação de Busca



Vamos procurar por `00101001`

- O bit `0` de `00101001` é `0` - vá para a esquerda
- O bit `2` de `00101001` é `1` - vá para a direita
- O bit `3` de `00101001` é `0` - vá para a esquerda
- O bit `4` de `00101001` é `1` - vá para a direita

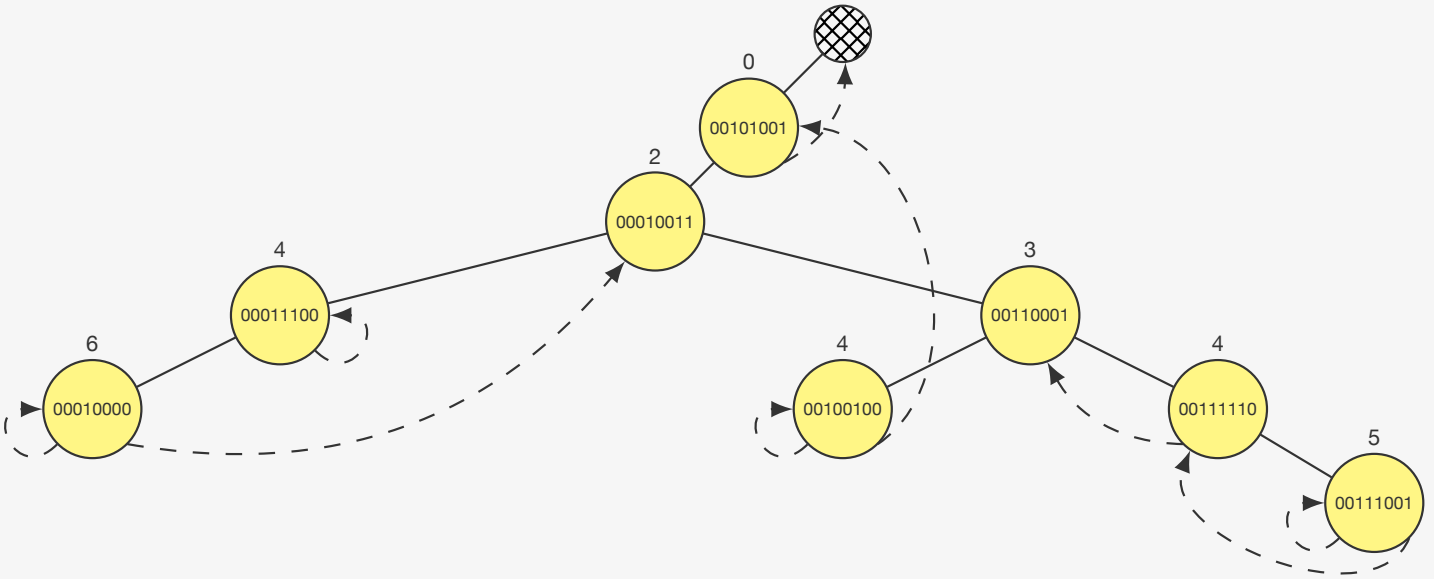
Patricia Trie - Simulação de Busca



Vamos procurar por `00101001`

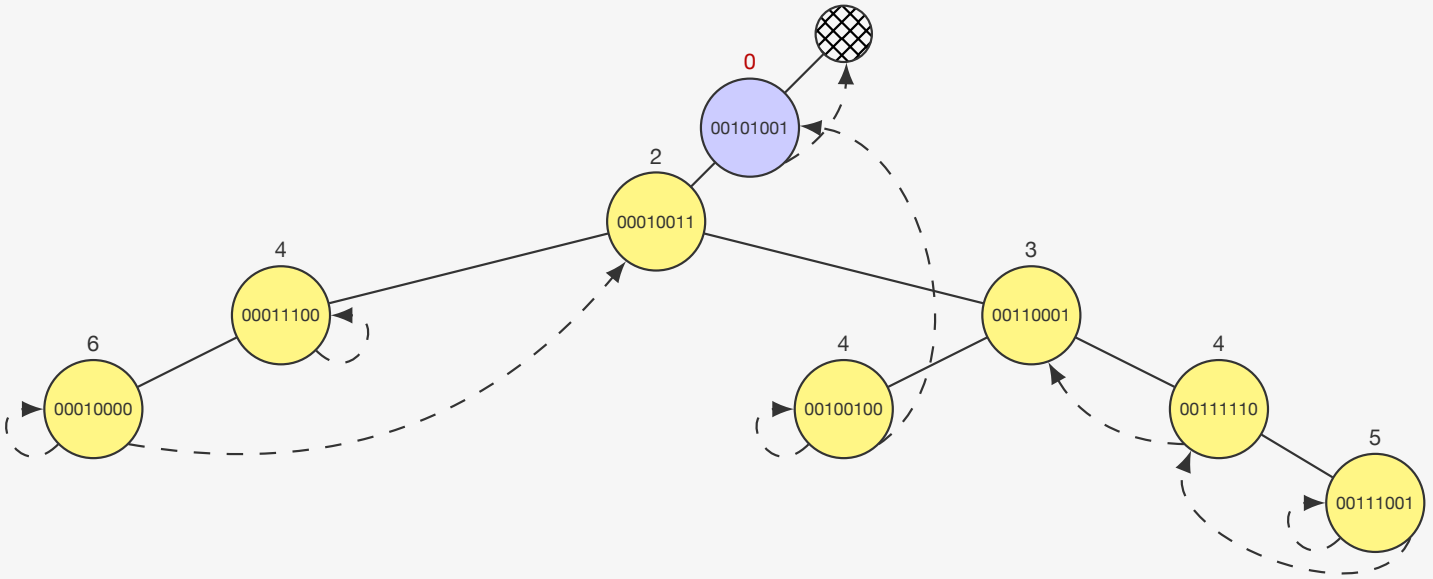
- O bit `0` de `00101001` é `0` - vá para a esquerda
- O bit `2` de `00101001` é `1` - vá para a direita
- O bit `3` de `00101001` é `0` - vá para a esquerda
- O bit `4` de `00101001` é `1` - vá para a direita
- Subiu na árvore - compare com a chave do nó atual
  - encontrou `00101001`

Patricia Trie - Simulação de Busca



Vamos procurar por 000111100

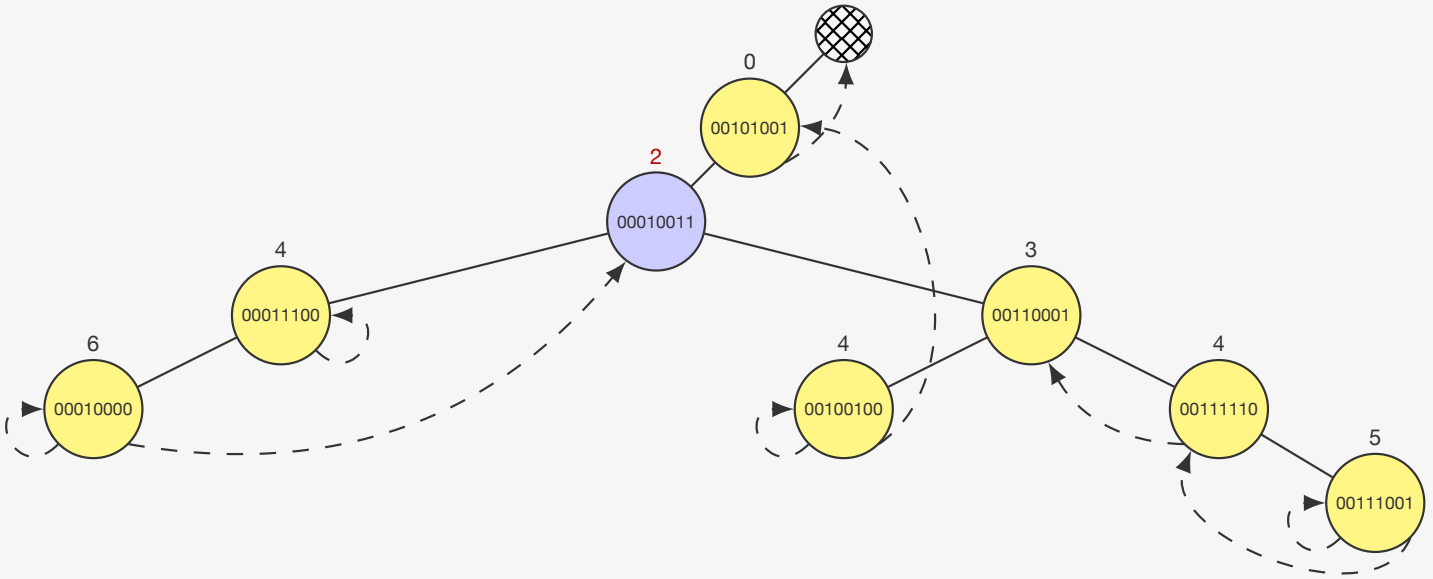
Patricia Trie - Simulação de Busca



Vamos procurar por 000111100

- O bit 0 de 00101001 é 0 - vá para a esquerda

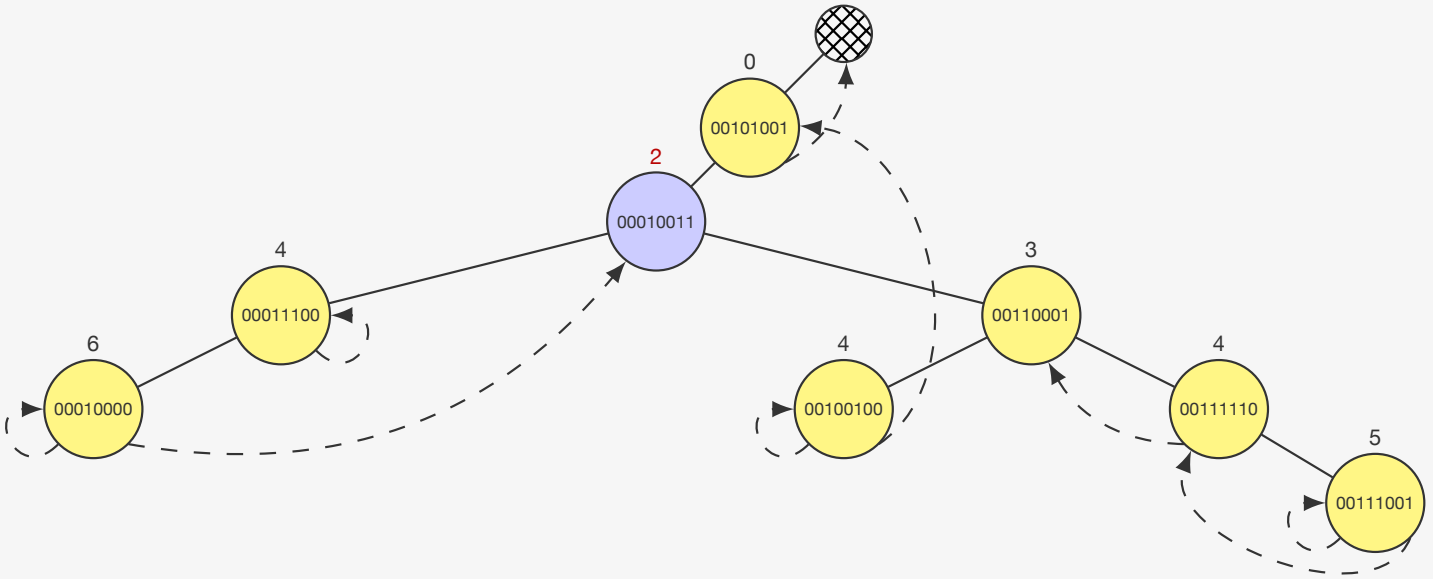
Patricia Trie - Simulação de Busca



Vamos procurar por 000111100

- O bit 0 de 00101001 é 0 - vá para a esquerda

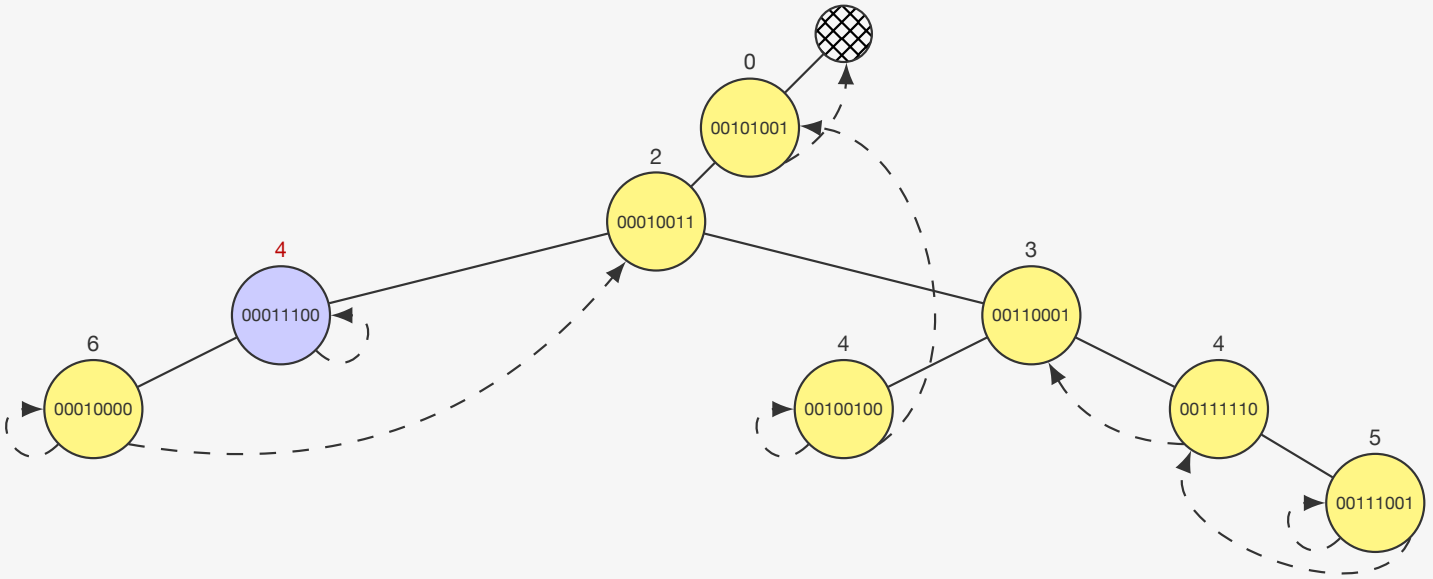
Patricia Trie - Simulação de Busca



Vamos procurar por `000111100`

- O bit `0` de `00101001` é `0` - vá para a esquerda
- O bit `2` de `00101001` é `0` - vá para a esquerda

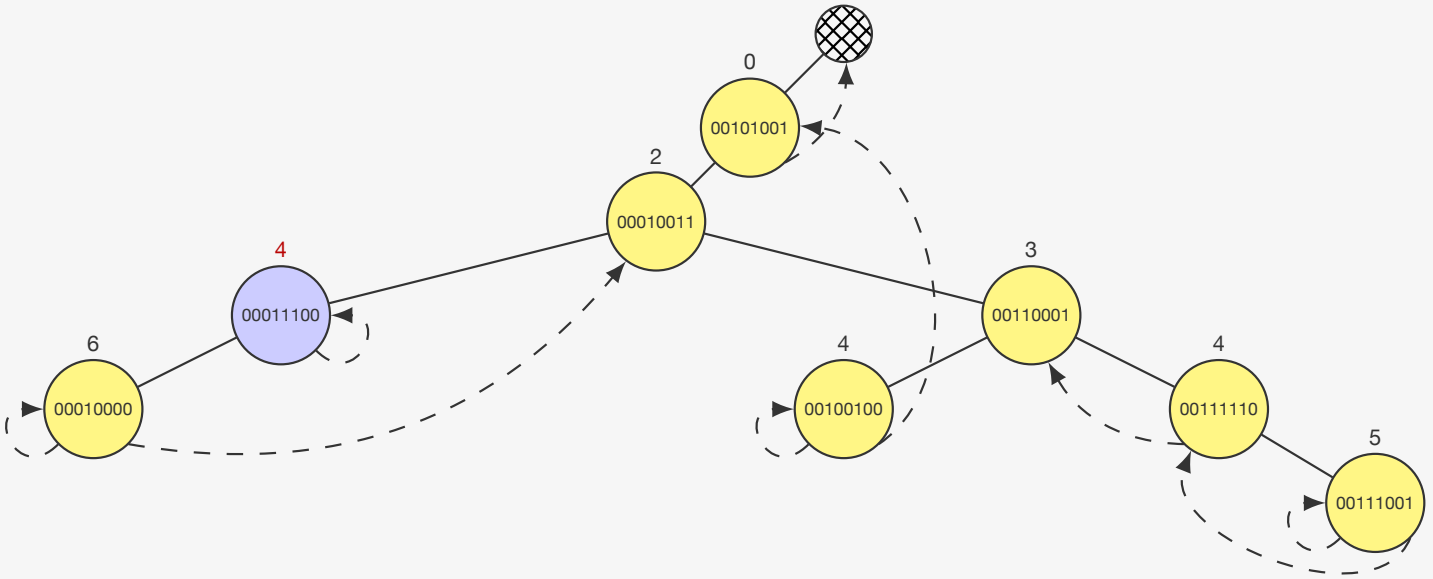
Patricia Trie - Simulação de Busca



Vamos procurar por `000111100`

- O bit `0` de `00101001` é `0` - vá para a esquerda
- O bit `2` de `00101001` é `0` - vá para a esquerda

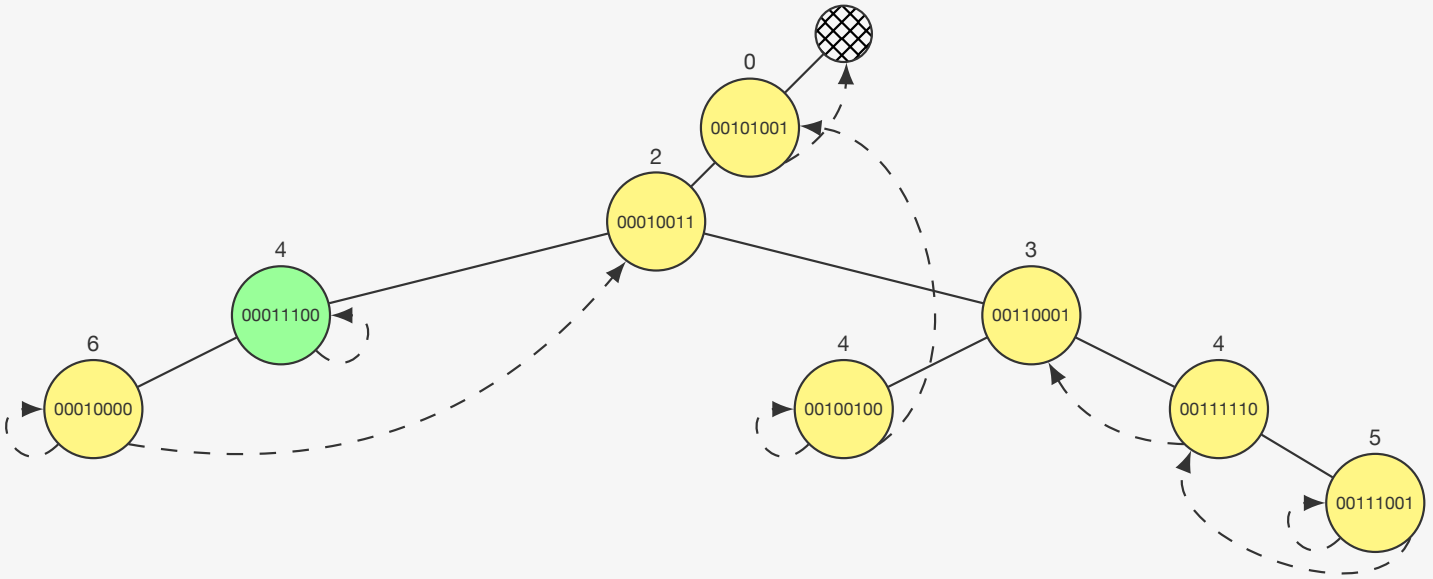
Patricia Trie - Simulação de Busca



Vamos procurar por `000111100`

- O bit `0` de `00101001` é `0` - vá para a esquerda
- O bit `2` de `00101001` é `0` - vá para a esquerda
- O bit `4` de `00101001` é `1` - vá para a direita

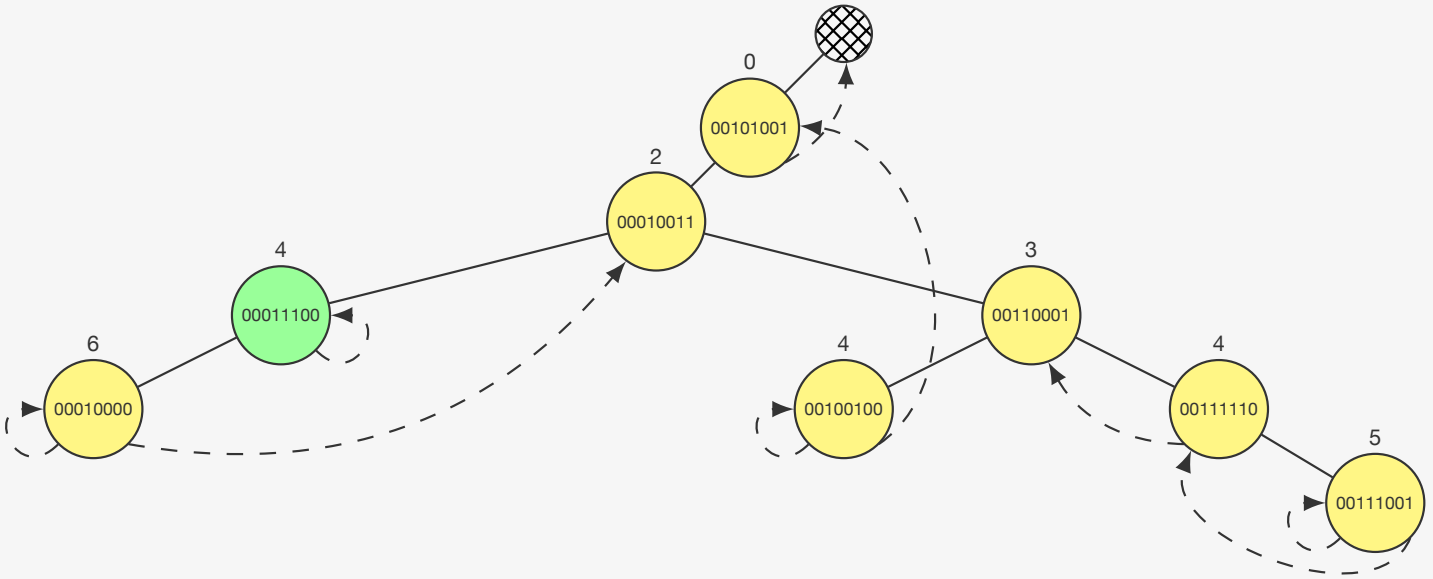
Patricia Trie - Simulação de Busca



Vamos procurar por `000111100`

- O bit `0` de `00101001` é `0` - vá para a esquerda
- O bit `2` de `00101001` é `0` - vá para a esquerda
- O bit `4` de `00101001` é `1` - vá para a direita

Patricia Trie - Simulação de Busca



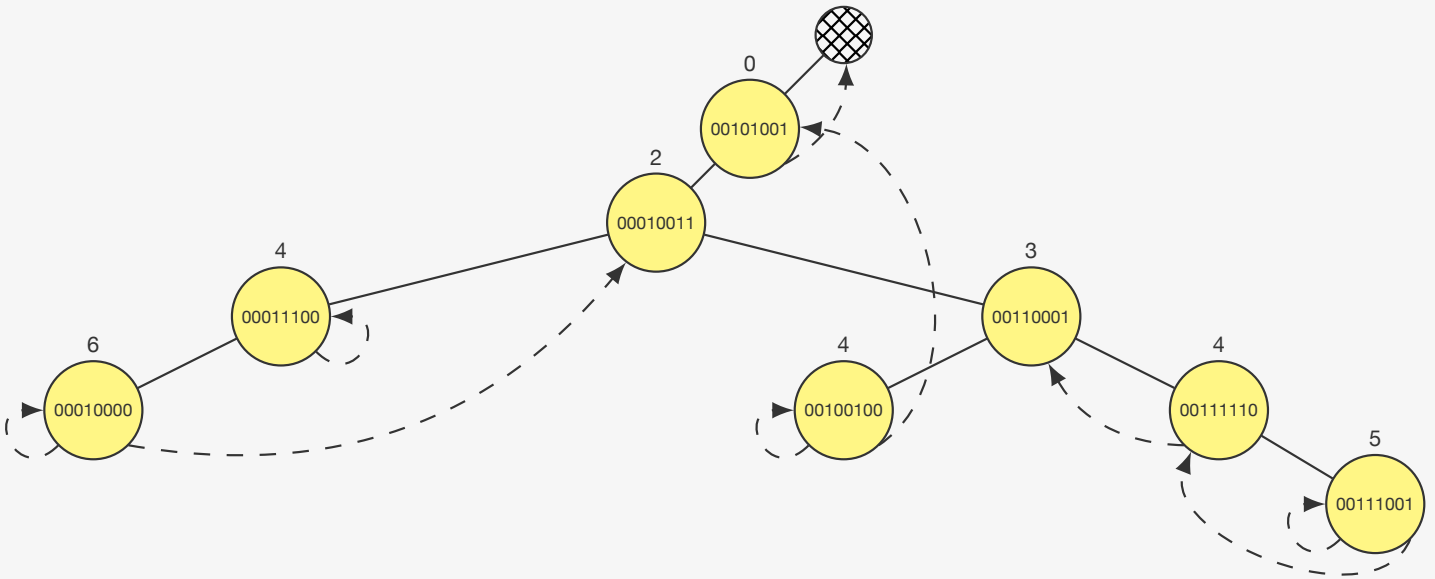
Vamos procurar por `000111100`

- O bit `0` de `00101001` é `0` - vá para a esquerda
- O bit `2` de `00101001` é `0` - vá para a esquerda
- O bit `4` de `00101001` é `1` - vá para a direita
- Subiu na árvore - compare com a chave do nó atual
  - não encontrou `000111100`

Busca - Implementação

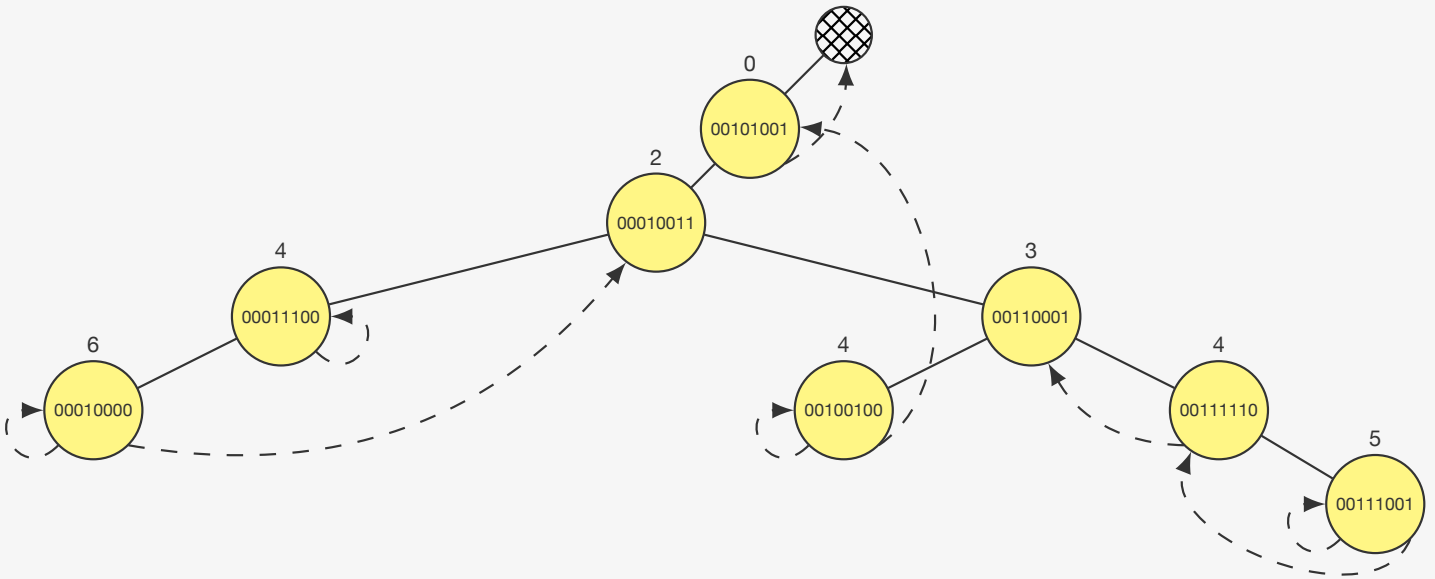
```
1  p_no busca_rec(p_no raiz, unsigned x, int w) {
2    if (raiz->bit <= w) /*subiu na árvore*/
3      return raiz;
4    if (bit(x, raiz->bit) == 0)
5      return busca_rec(raiz->esq, x, raiz->bit);
6    else
7      return busca_rec(raiz->dir, x, raiz->bit);
8  }
9
10 p_no busca(p_no raiz, unsigned x) {
11   p_no t = busca_rec(raiz->esq, x, -1);
12   return t->chave == x ? t : NULL;
13 }
```

Patricia Trie - Inserção



Para inserir `00111011`:

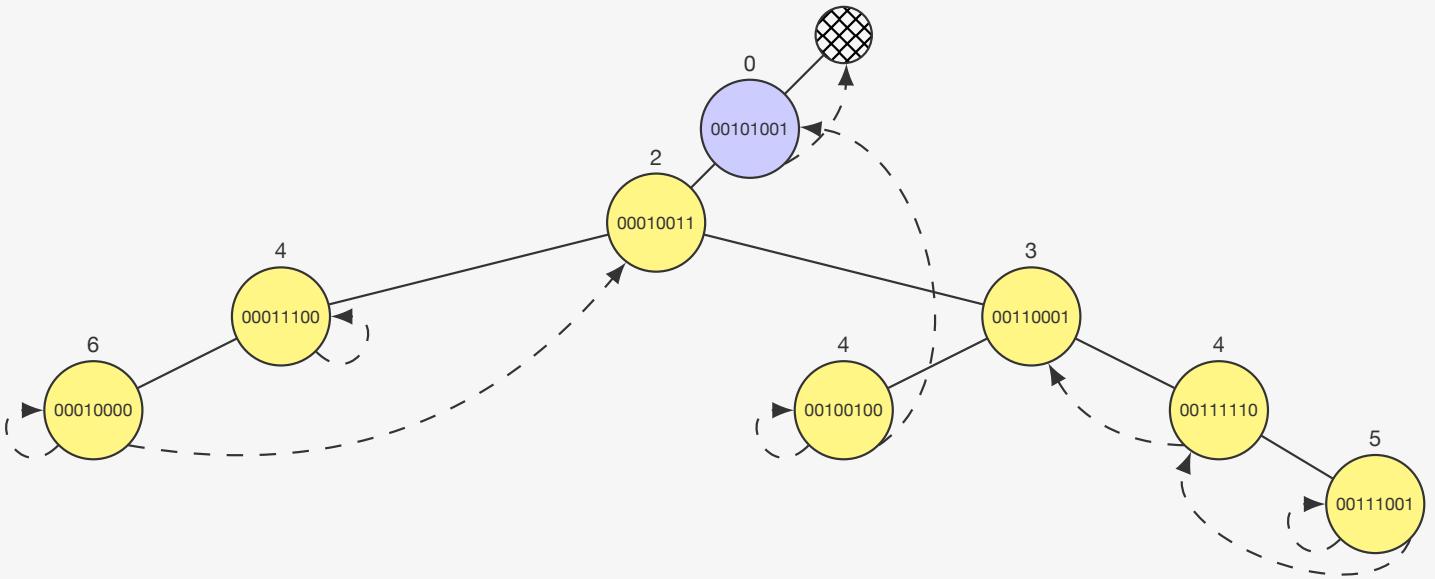
Patricia Trie - Inserção



Para inserir `00111011`:

- Procuramos por `00111011`

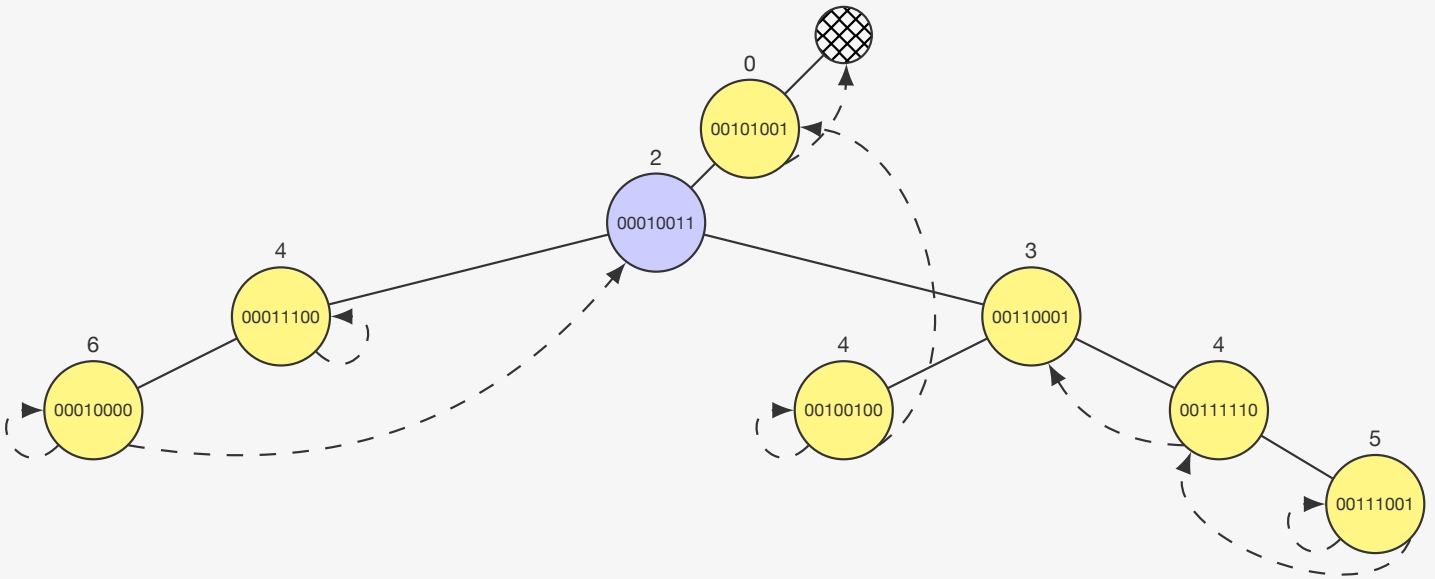
Patricia Trie - Inserção



Para inserir `00111011`:

- Procuramos por `00111011`

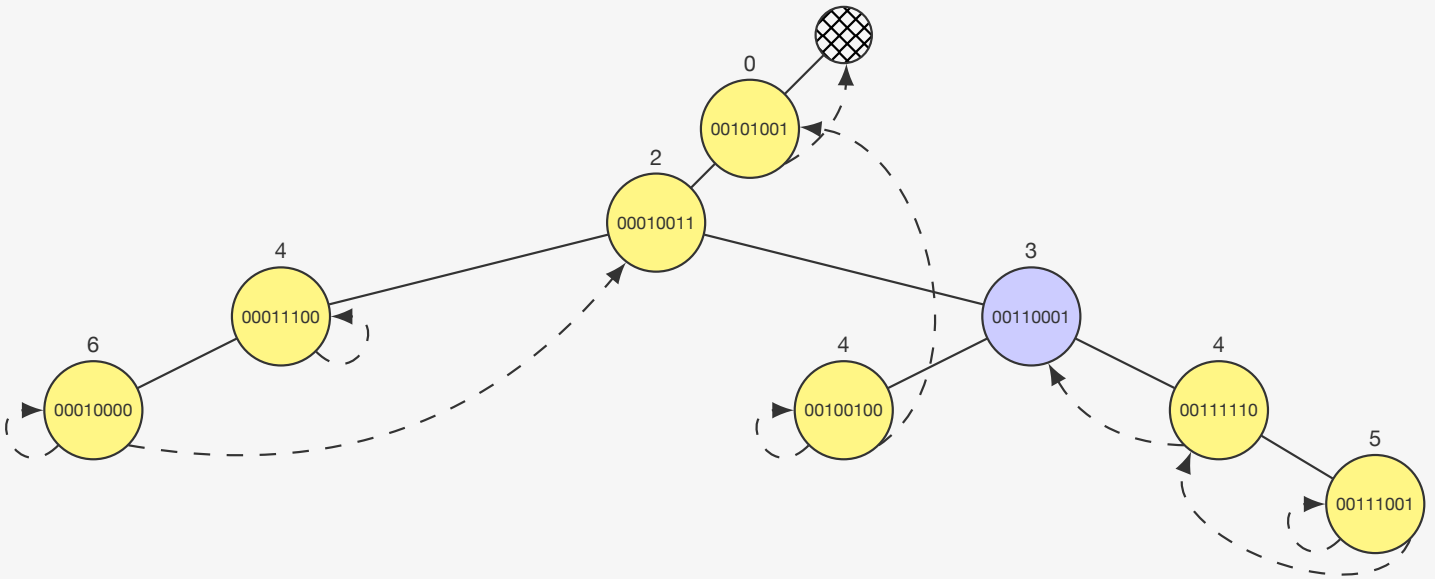
Patricia Trie - Inserção



Para inserir `00111011`:

- Procuramos por `00111011`

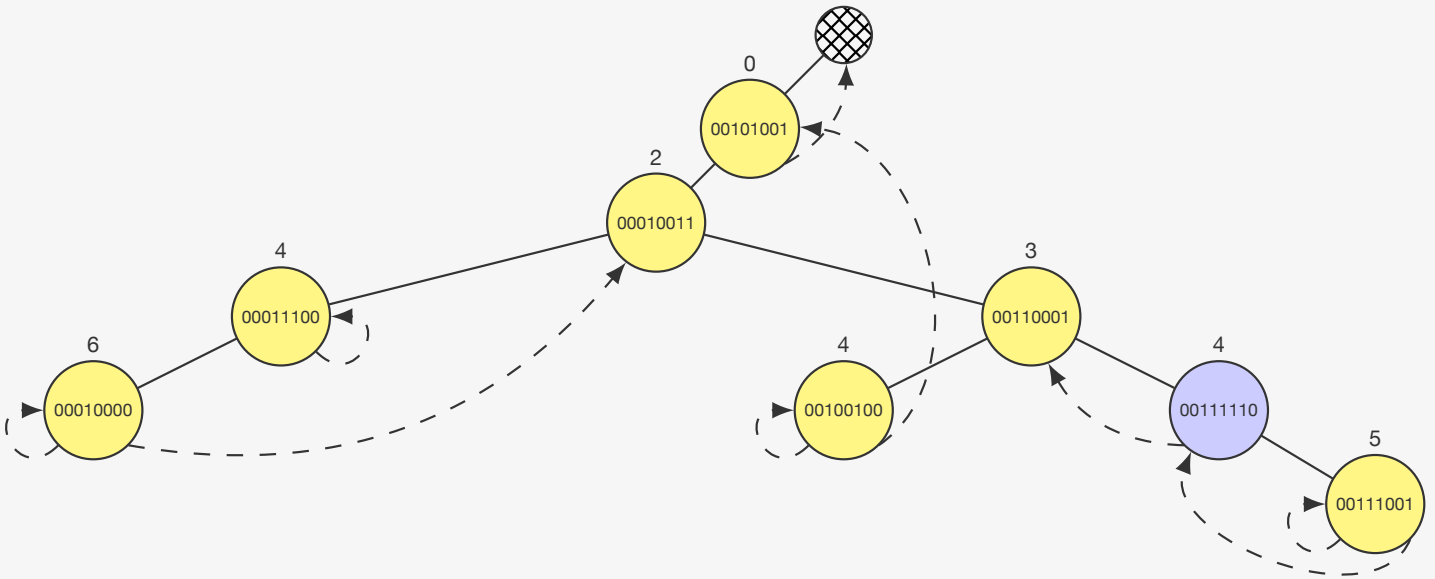
Patricia Trie - Inserção



Para inserir `00111011`:

- Procuramos por `00111011`

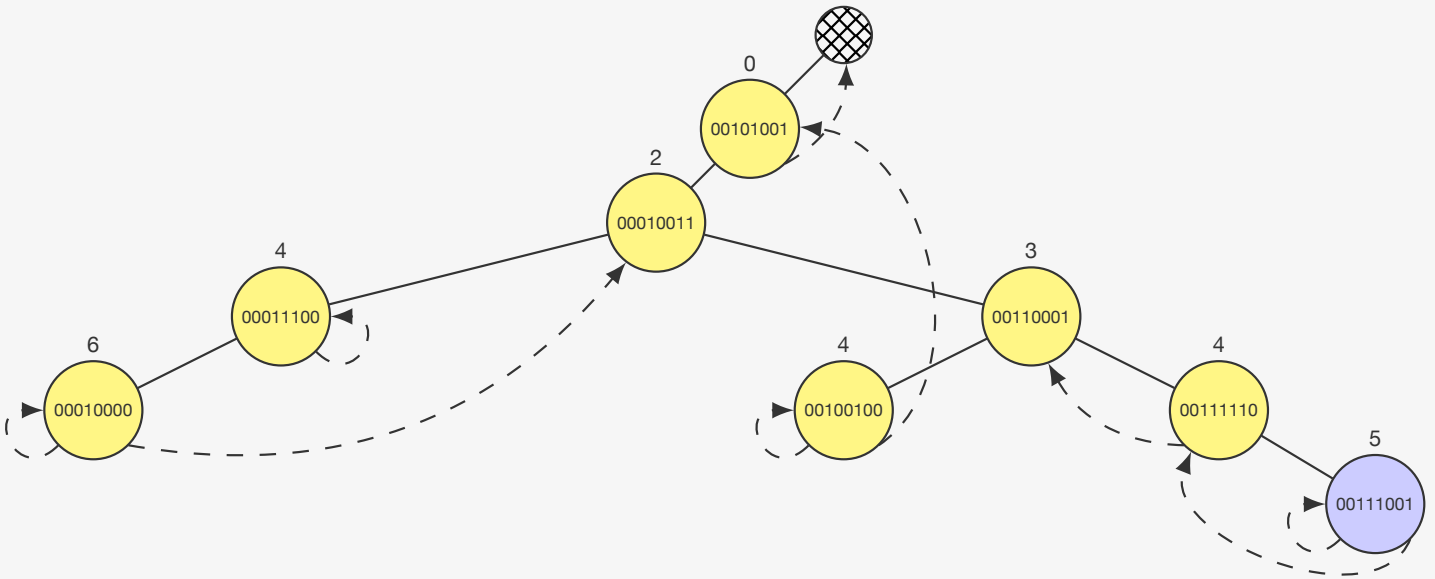
Patricia Trie - Inserção



Para inserir `00111011`:

- Procuramos por `00111011`

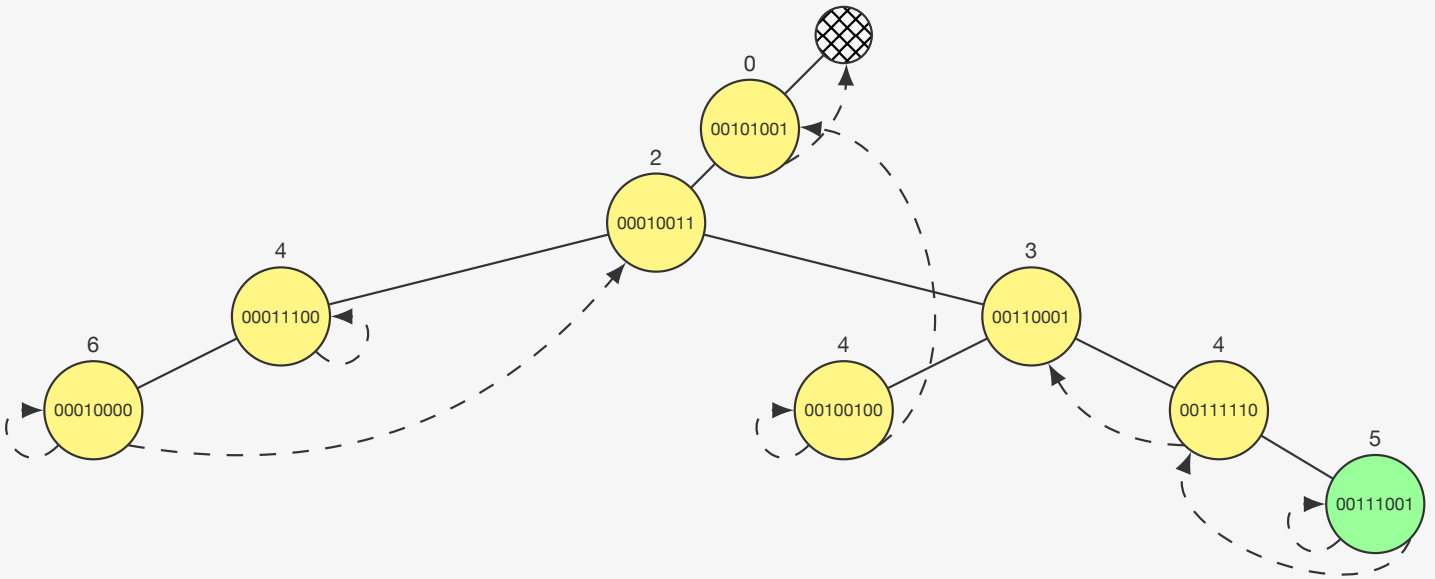
Patricia Trie - Inserção



Para inserir `00111011`:

- Procuramos por `00111011`

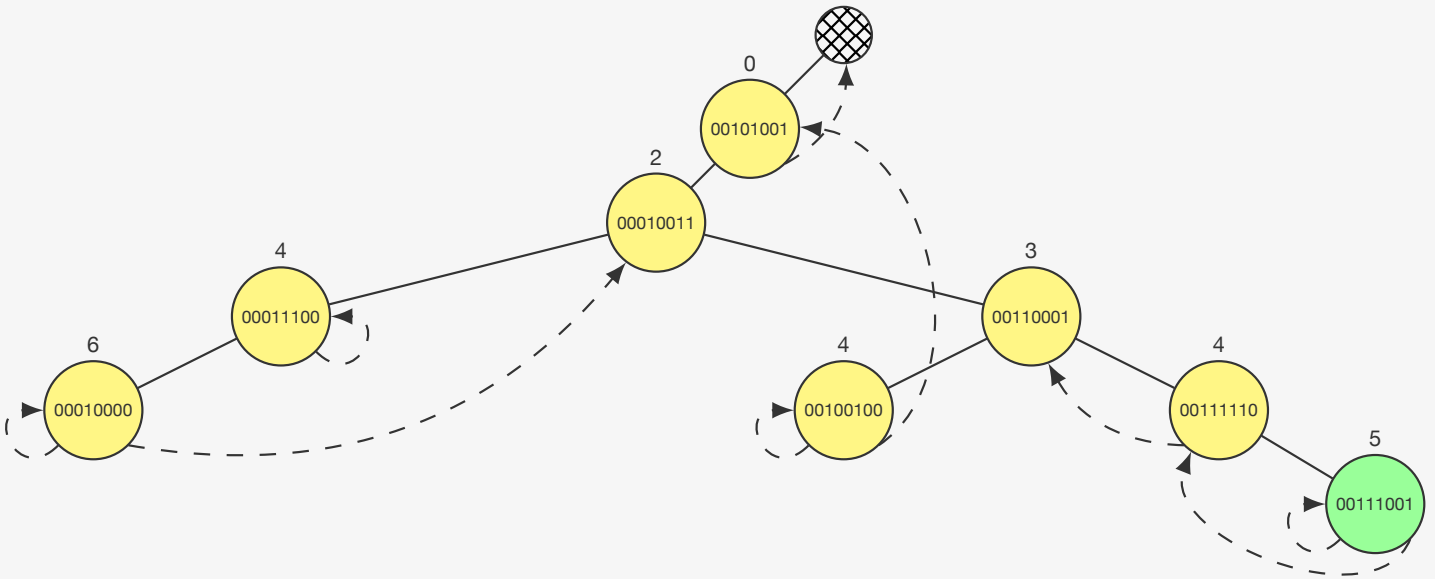
Patricia Trie - Inserção



Para inserir `00111011`:

- Procuramos por `00111011`
- Encontramos `00111001`

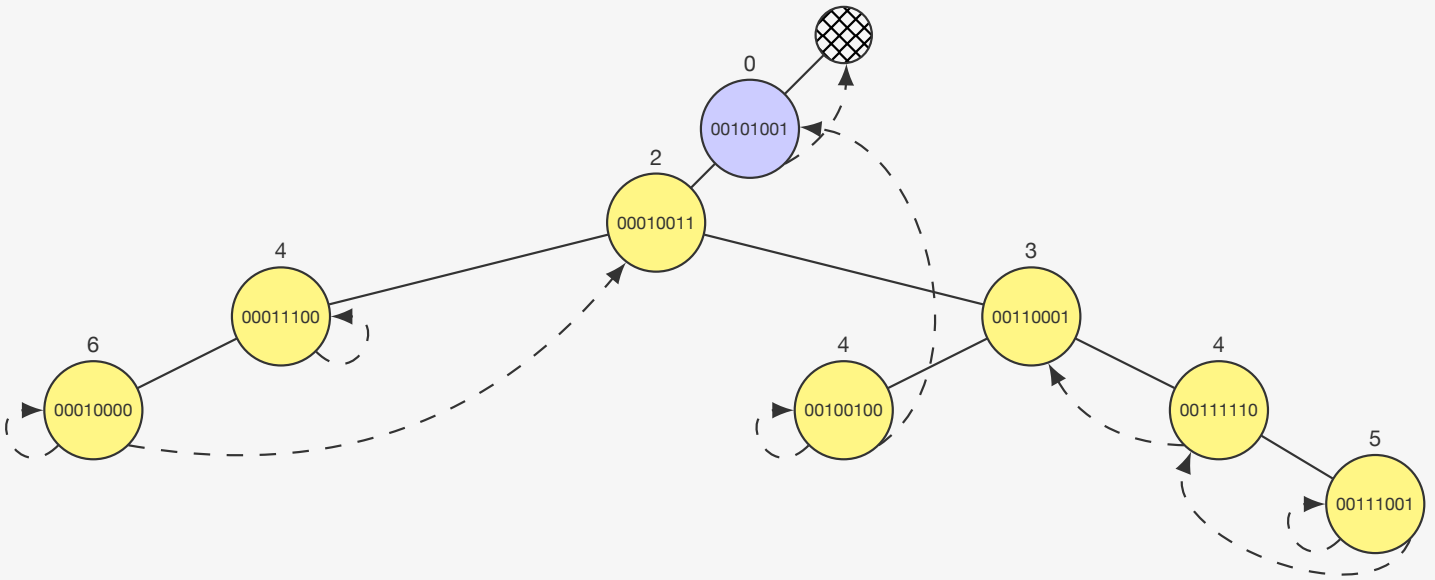
Patricia Trie - Inserção



Para inserir `00111011`:

- Procuramos por `00111011`
- Encontramos `00111001`
- Eles têm o mesmo prefixo até a posição `5`

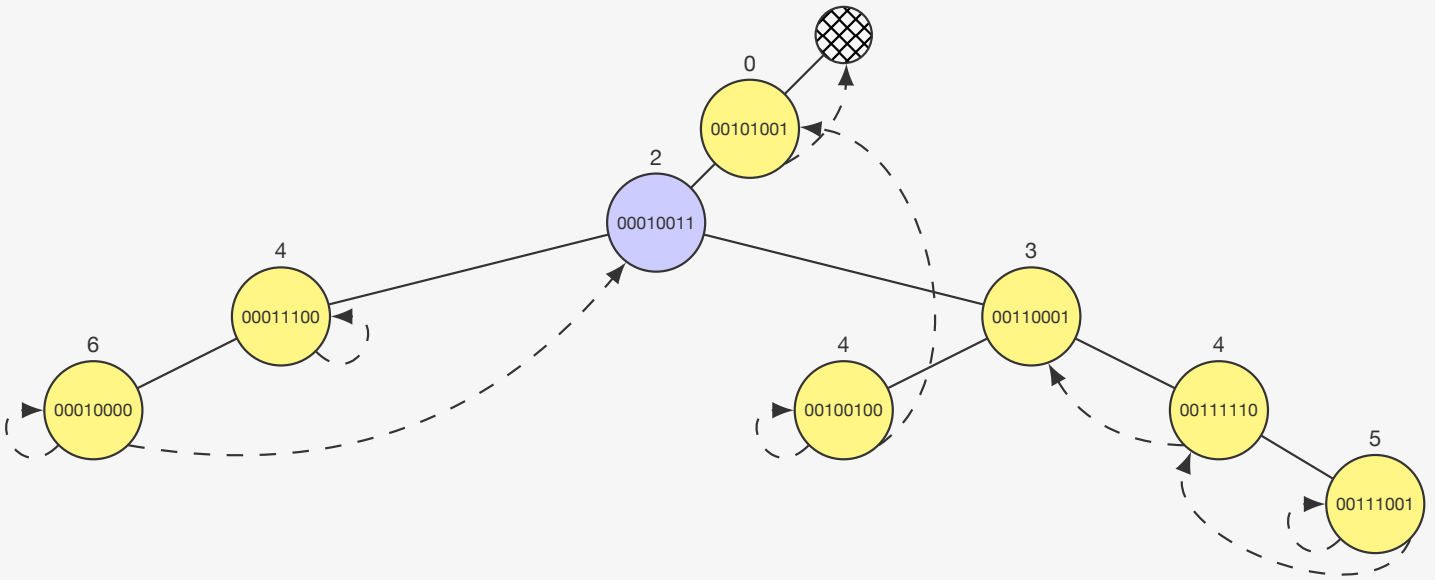
Patricia Trie - Inserção



Para inserir `00111011`:

- Procuramos por `00111011`
- Encontramos `00111001`
- Eles têm o mesmo prefixo até a posição `5`
- Fazemos uma nova busca verificando onde dividir a árvore

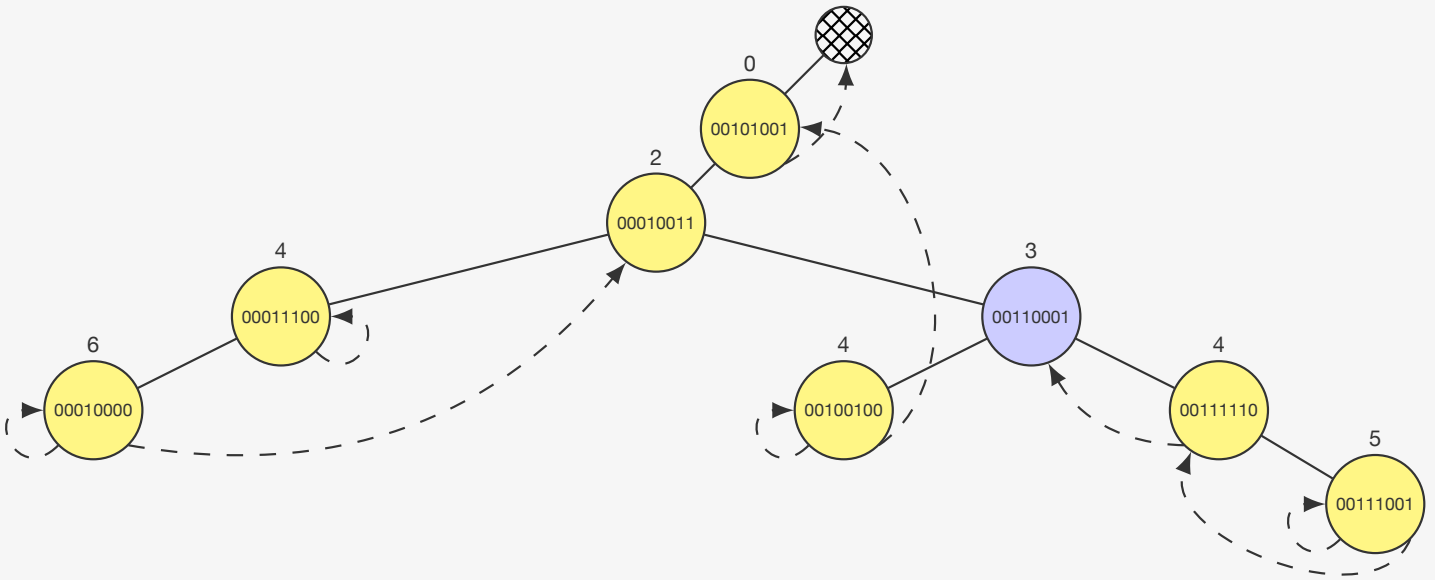
Patricia Trie - Inserção



Para inserir `00111011`:

- Procuramos por `00111011`
- Encontramos `00111001`
- Eles têm o mesmo prefixo até a posição `5`
- Fazemos uma nova busca verificando onde dividir a árvore

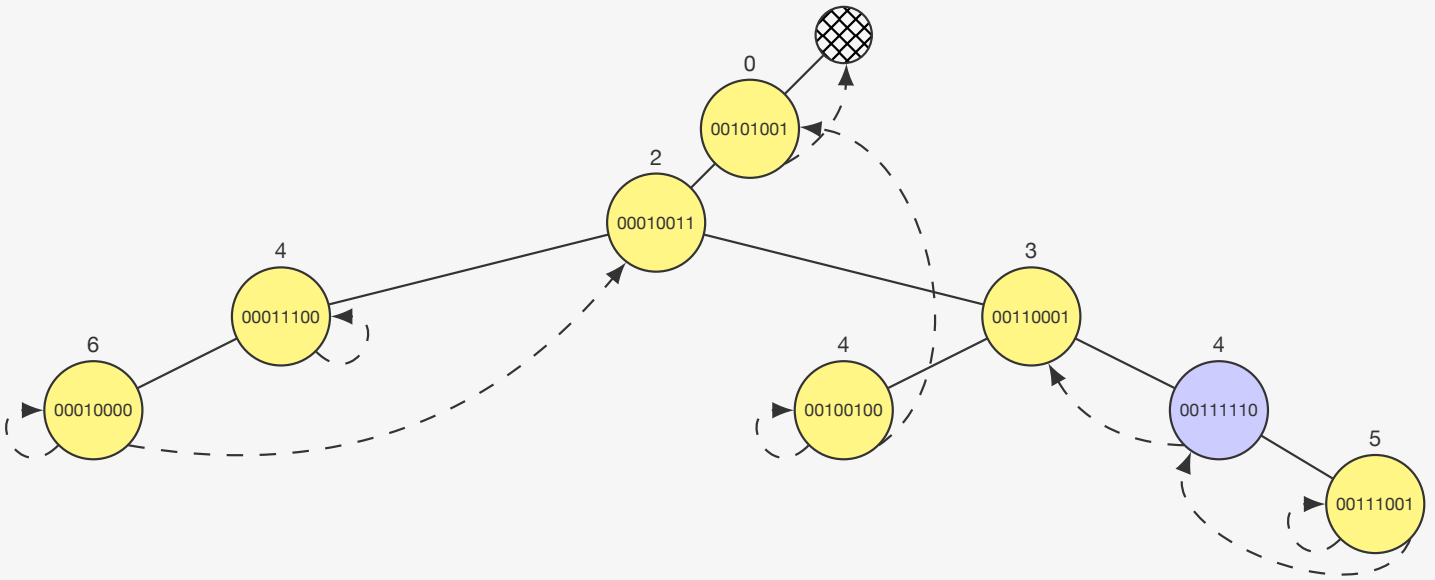
Patricia Trie - Inserção



Para inserir `00111011`:

- Procuramos por `00111011`
- Encontramos `00111001`
- Eles têm o mesmo prefixo até a posição `5`
- Fazemos uma nova busca verificando onde dividir a árvore

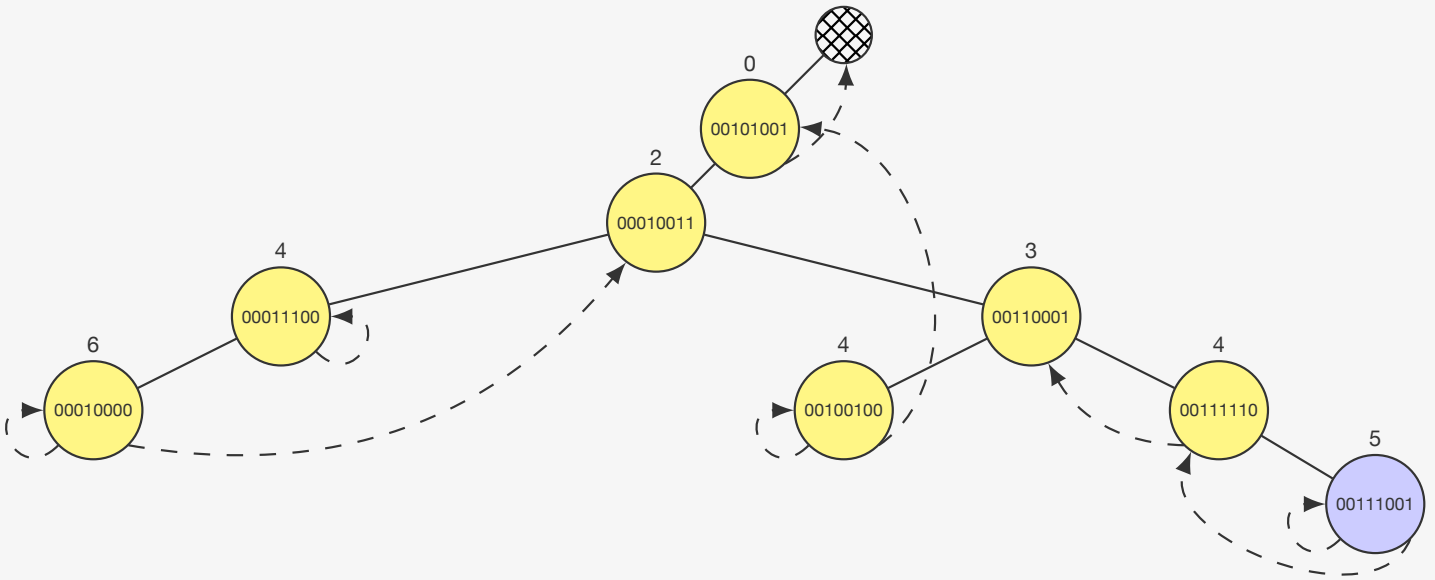
Patricia Trie - Inserção



Para inserir `00111011`:

- Procuramos por `00111011`
- Encontramos `00111001`
- Eles têm o mesmo prefixo até a posição `5`
- Fazemos uma nova busca verificando onde dividir a árvore

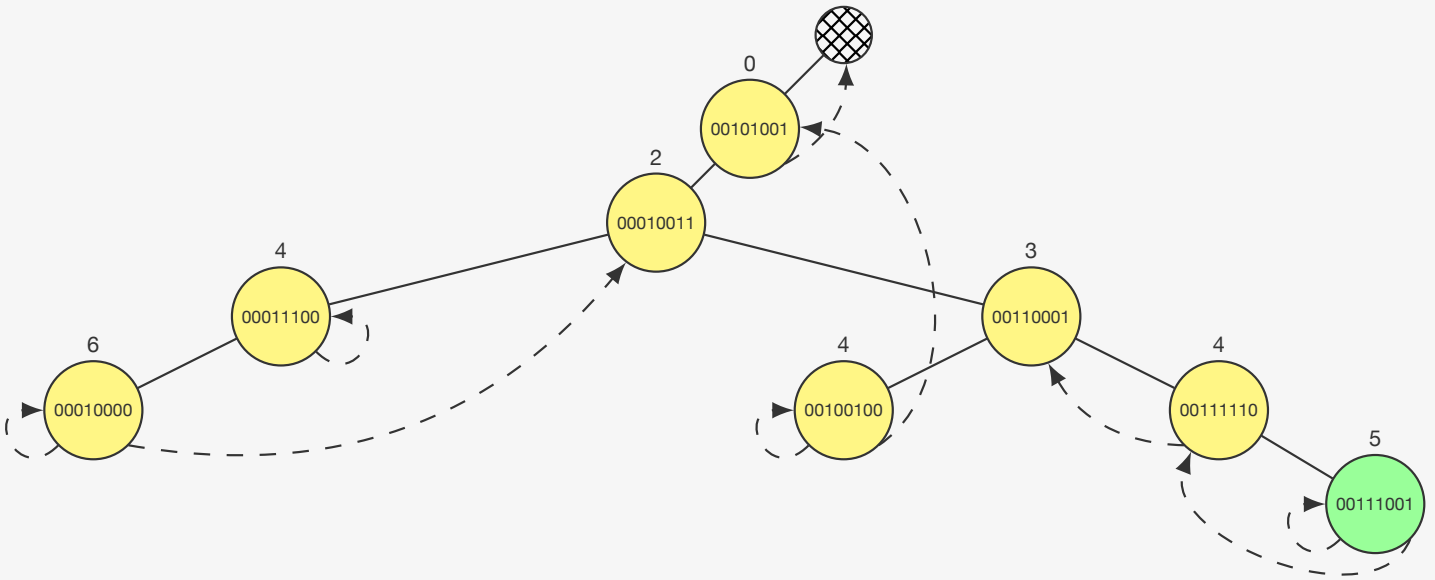
Patricia Trie - Inserção



Para inserir `00111011`:

- Procuramos por `00111011`
- Encontramos `00111001`
- Eles têm o mesmo prefixo até a posição `5`
- Fazemos uma nova busca verificando onde dividir a árvore

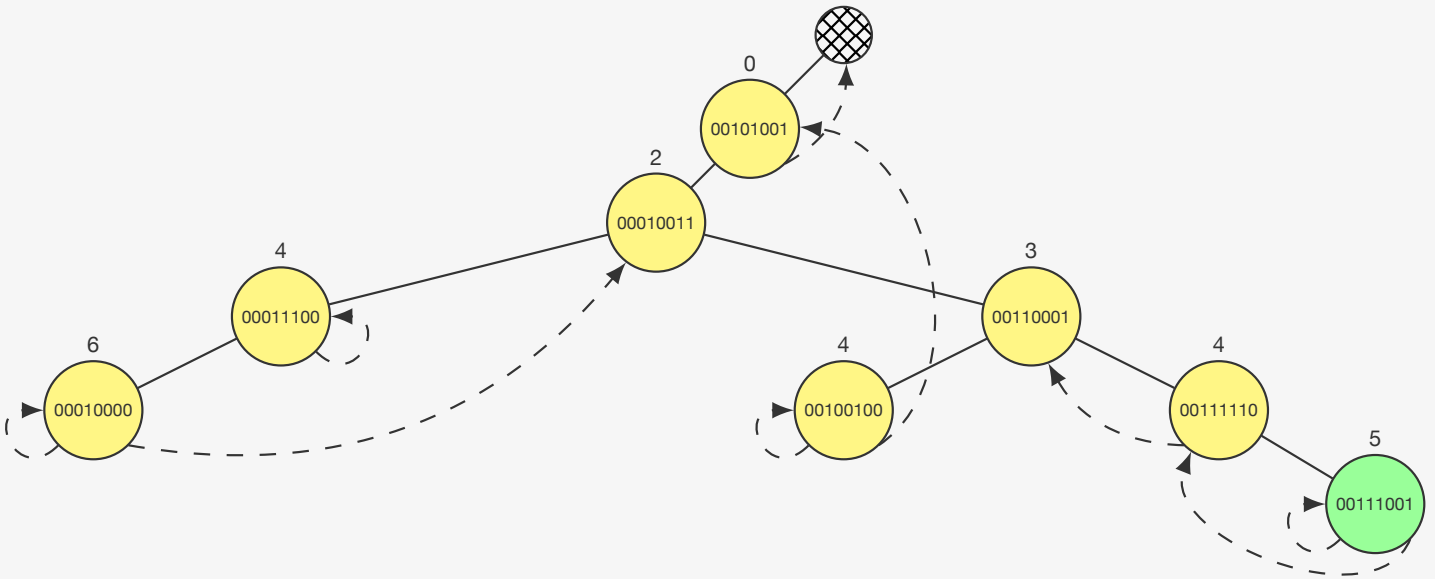
Patricia Trie - Inserção



Para inserir `00111011`:

- Procuramos por `00111011`
- Encontramos `00111001`
- Eles têm o mesmo prefixo até a posição `5`
- Fazemos uma nova busca verificando onde dividir a árvore

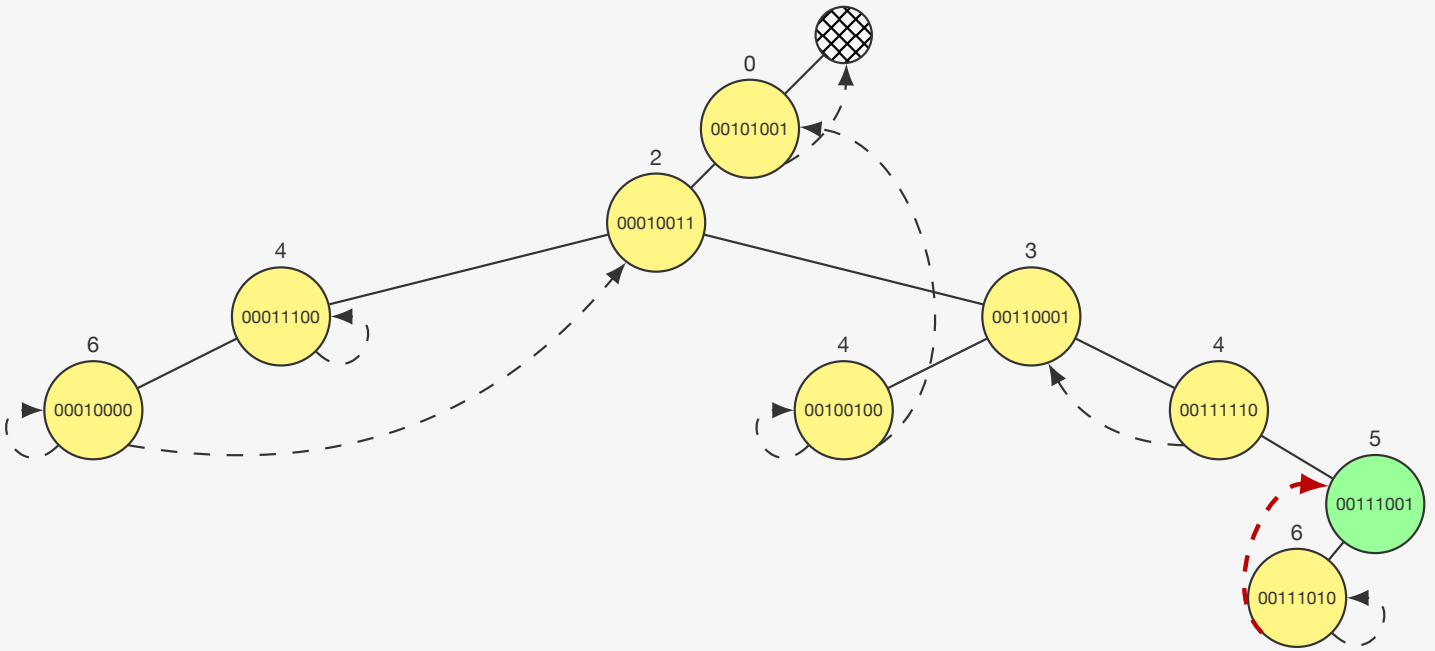
Patricia Trie - Inserção



Para inserir `00111011`:

- Procuramos por `00111011`
- Encontramos `00111001`
- Eles têm o mesmo prefixo até a posição `5`
- Fazemos uma nova busca verificando onde dividir a árvore
- Nesse caso, inserimos como uma folha

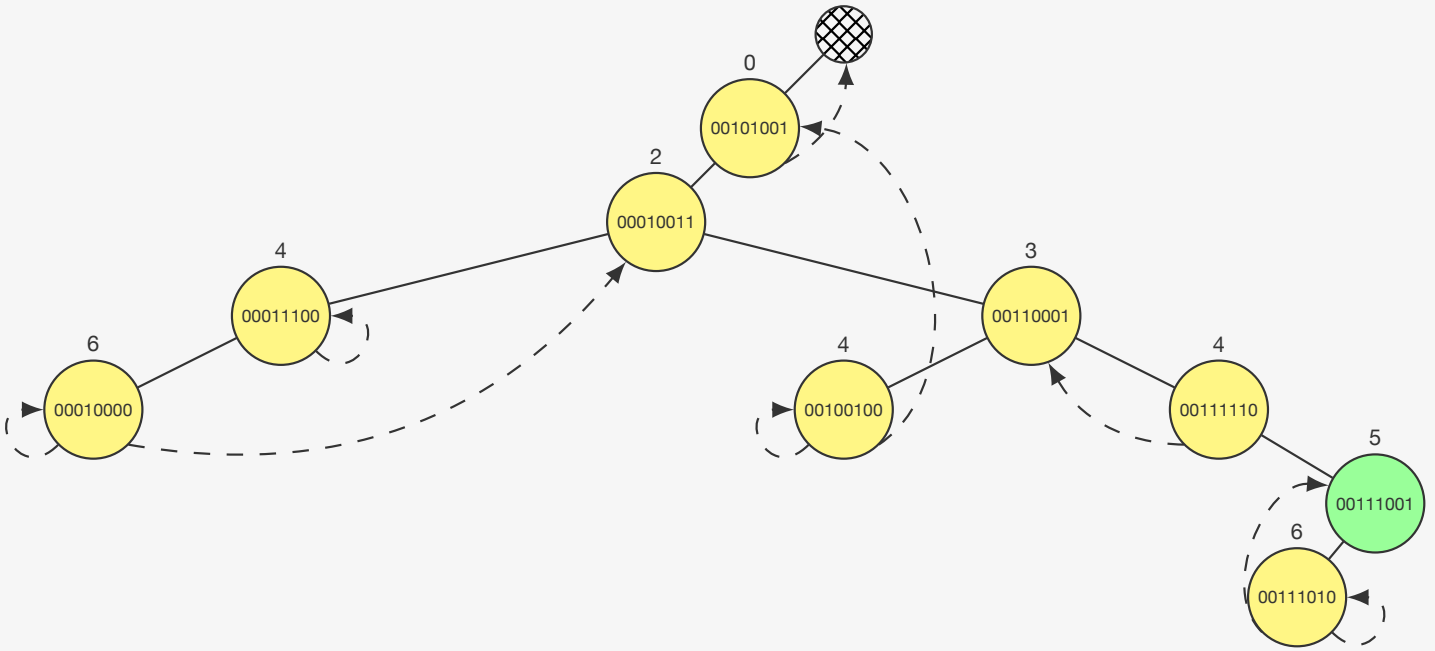
Patricia Trie - Inserção



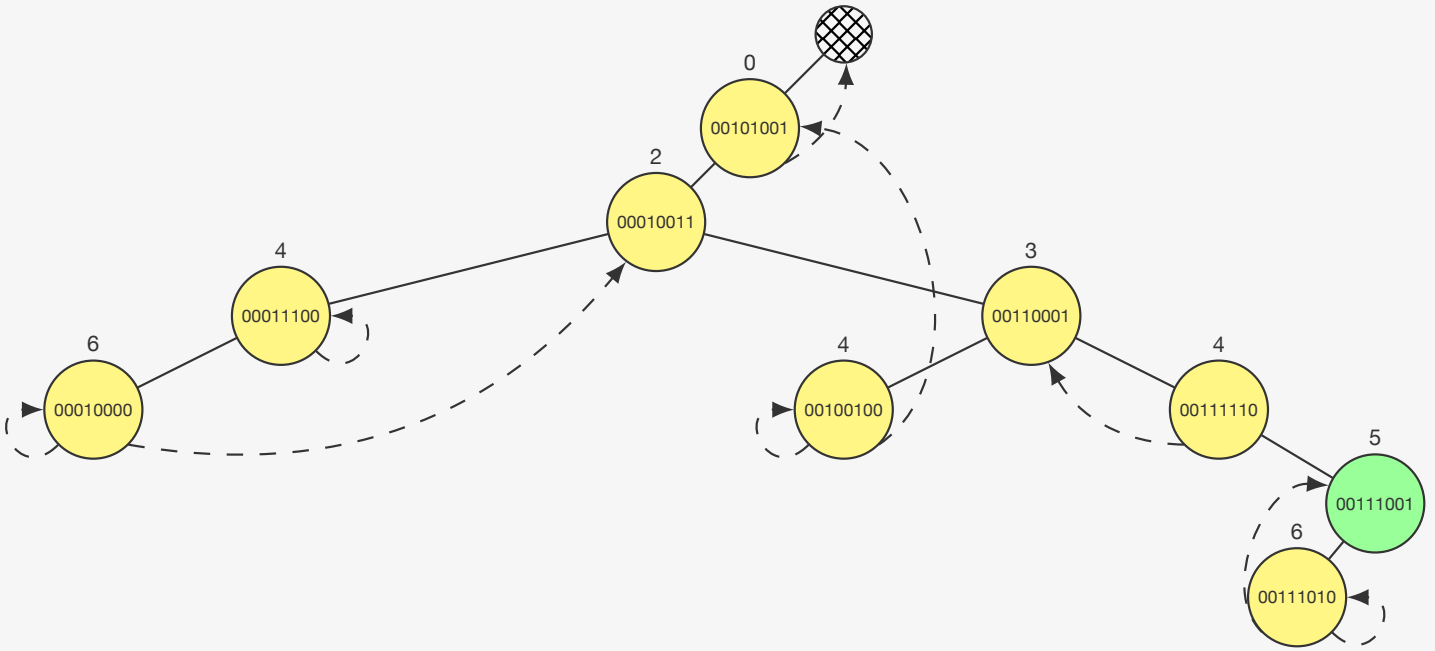
Para inserir `00111011`:

- Procuramos por `00111011`
- Encontramos `00111001`
- Eles têm o mesmo prefixo até a posição `5`
- Fazemos uma nova busca verificando onde dividir a árvore
- Nesse caso, inserimos como uma folha

Patricia Trie - Inserção

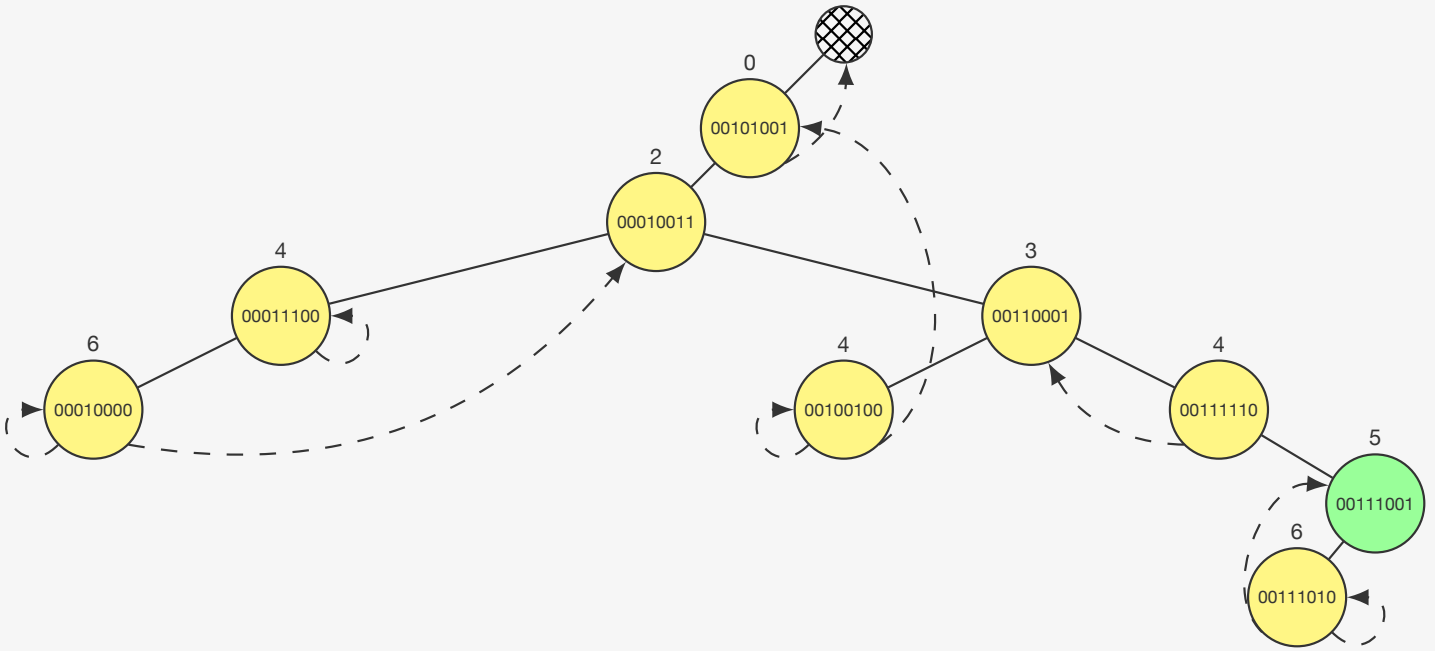


Patricia Trie - Inserção



Por que é um filho esquerdo?

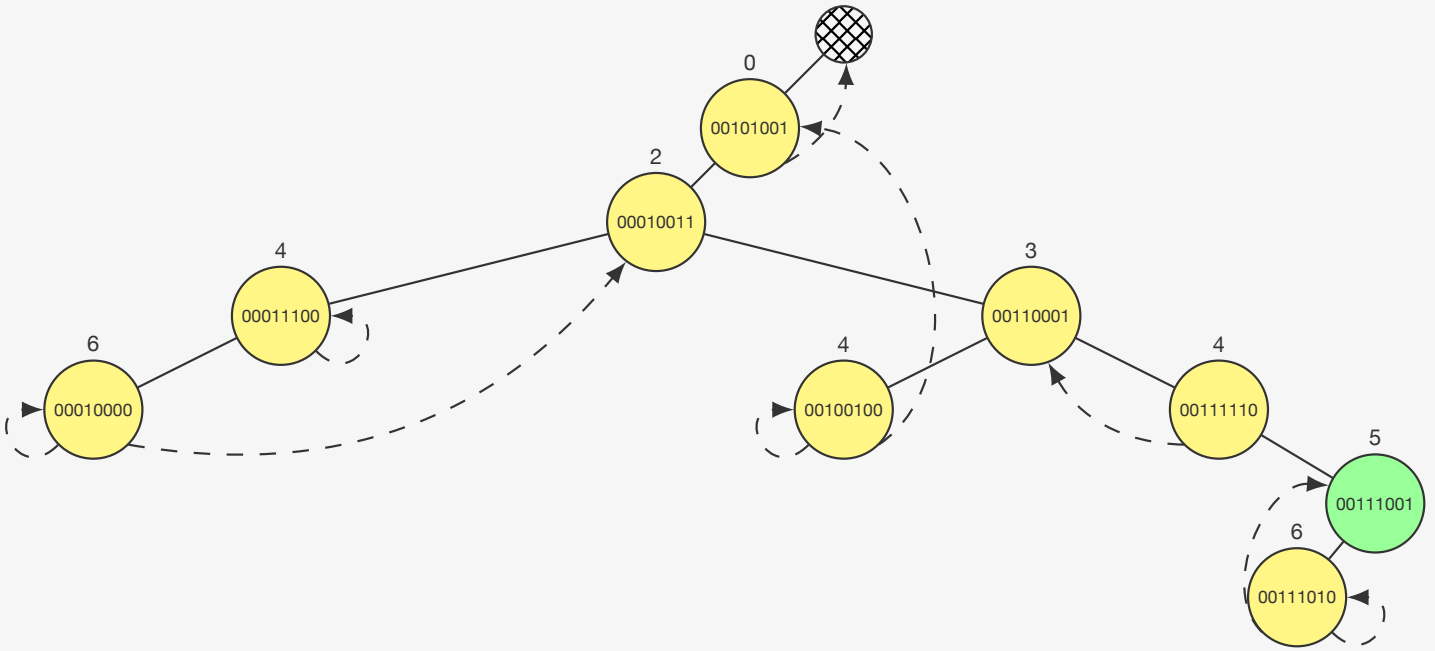
Patricia Trie - Inserção



Por que é um filho esquerdo?

- Porque o bit `5` é `0` e, por isso, a busca saiu pelo ponteiro esquerdo de `00111001`

Patricia Trie - Inserção

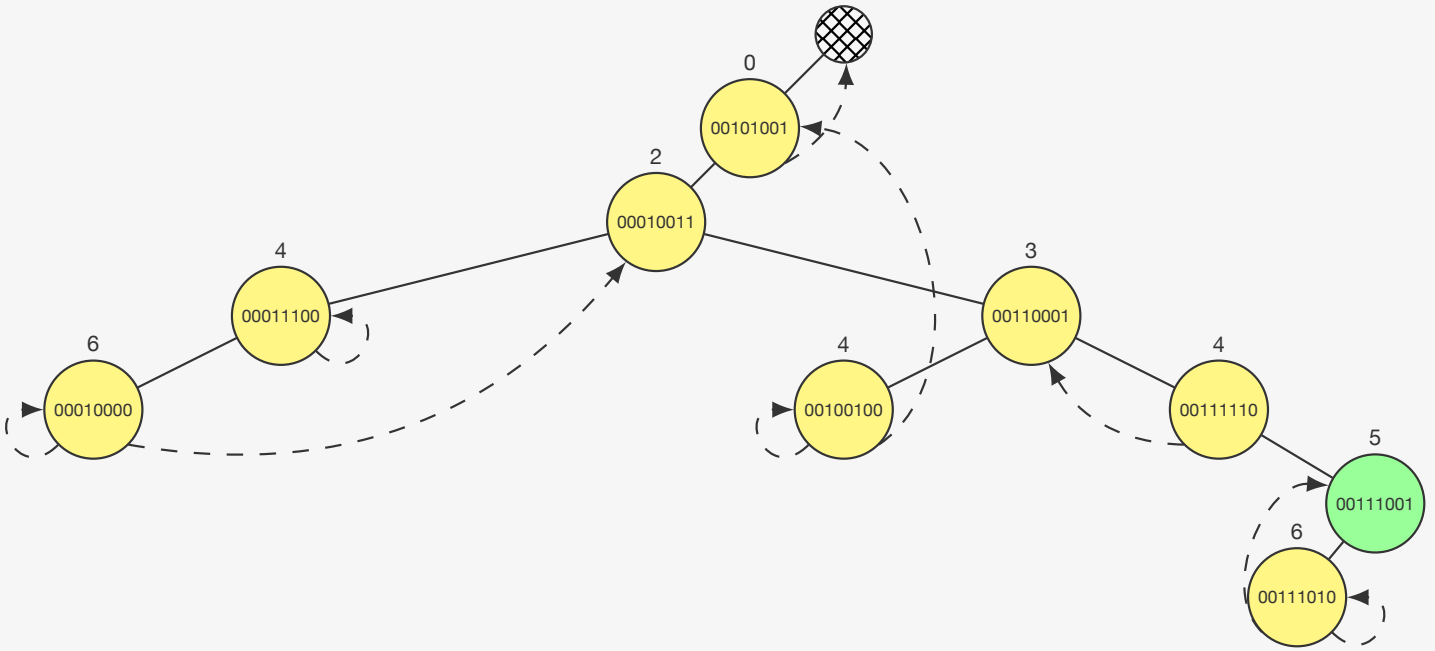


Por que é um filho esquerdo?

- Porque o bit `5` é `0` e, por isso, a busca saiu pelo ponteiro esquerdo de `00111001`

Por que o ponteiro esquerdo aponta para `00111001` e o direito para `00111010`?

Patricia Trie - Inserção



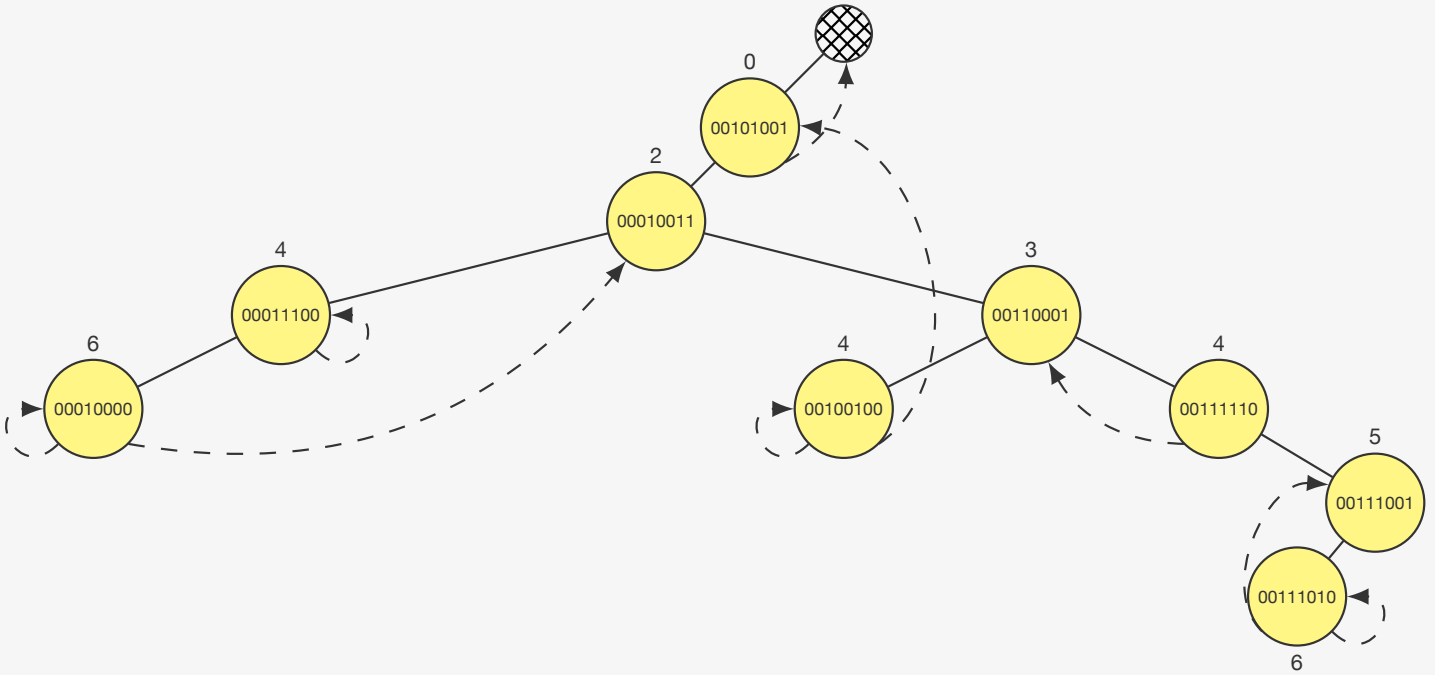
Por que é um filho esquerdo?

- Porque o bit `5` é `0` e, por isso, a busca saiu pelo ponteiro esquerdo de `00111001`

Por que o ponteiro esquerdo aponta para `00111001` e o direito para `00111010`?

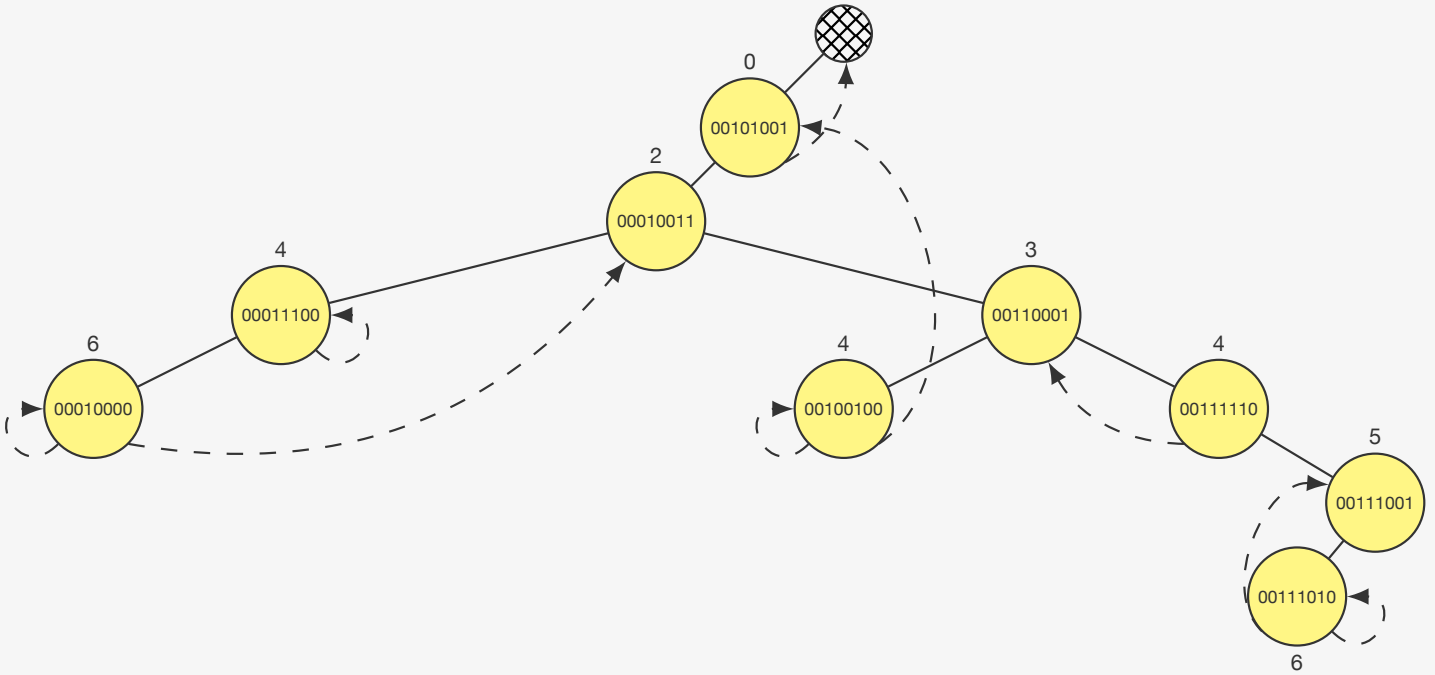
- Porque o bit `6` de `00111001` é `0` e o de `00111010` é `1`

Patricia Trie - Inserção



Para inserir 00000000:

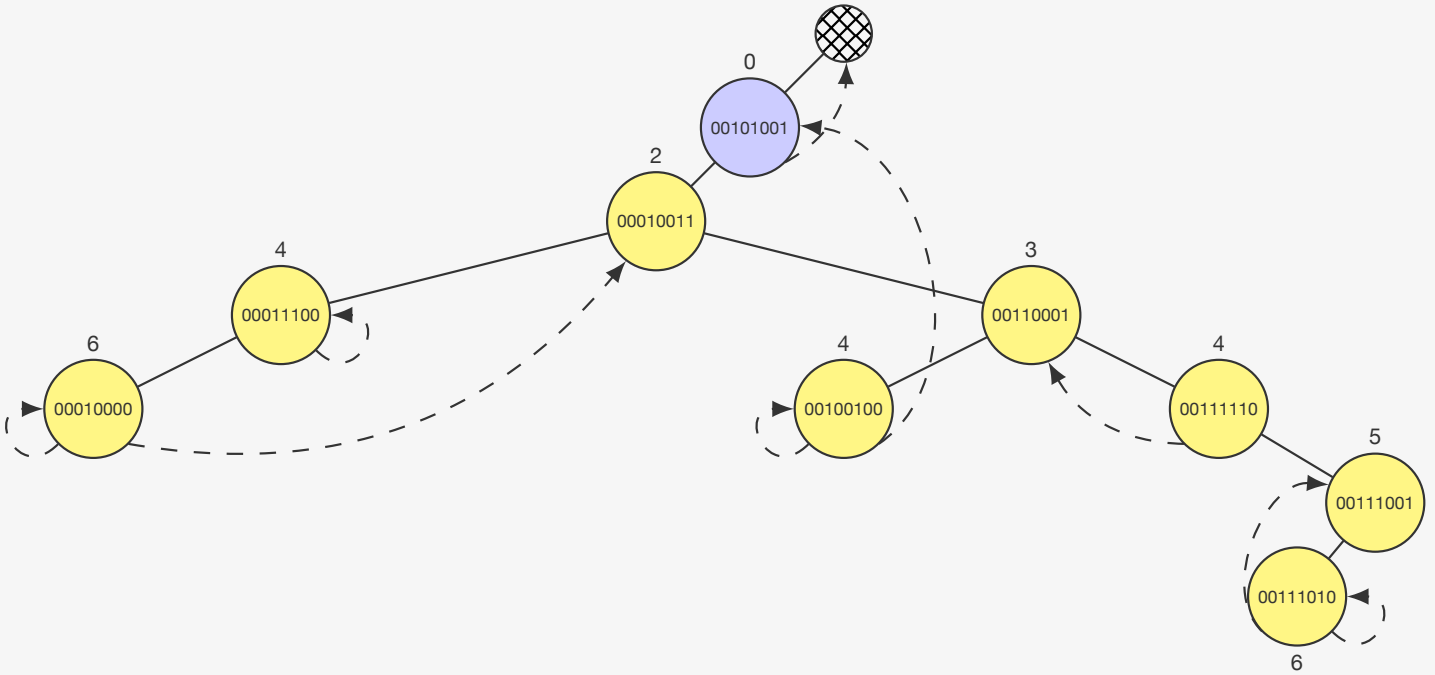
Patricia Trie - Inserção



Para inserir 00000000:

- Procuramos por 00000000

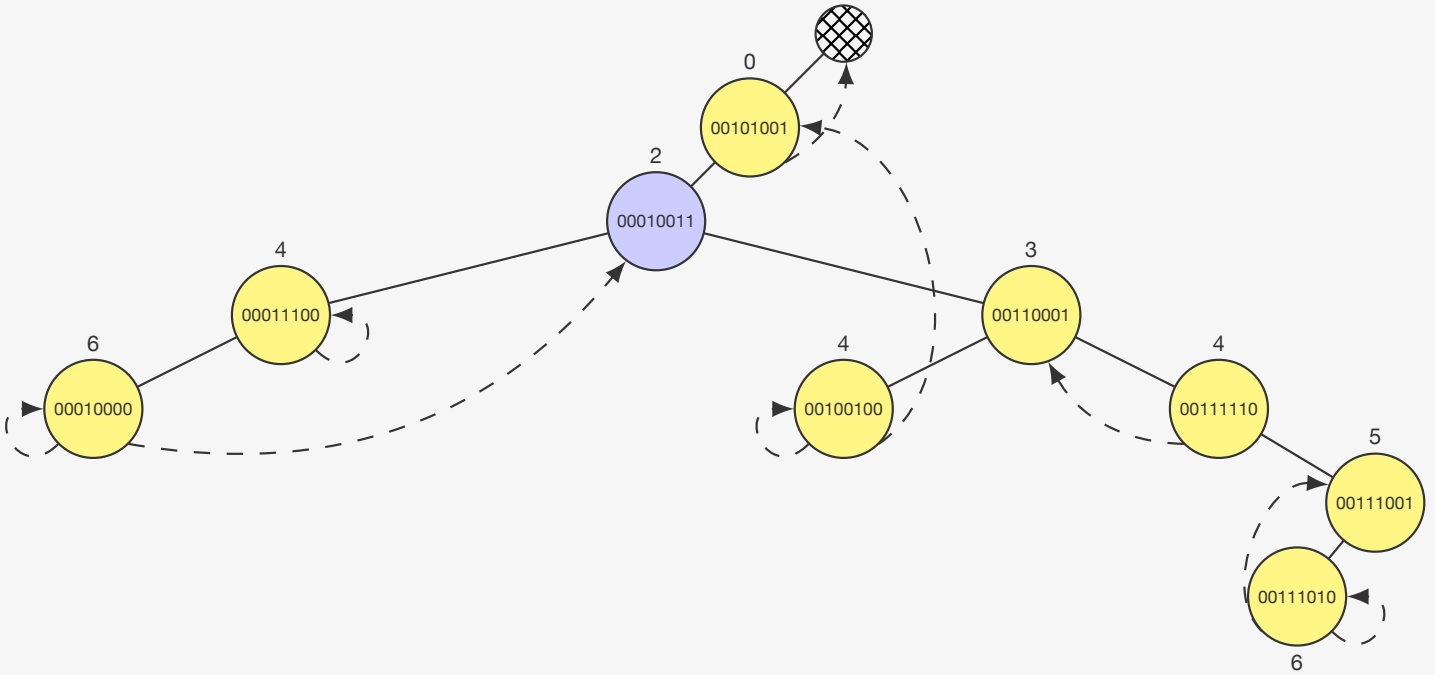
Patricia Trie - Inserção



Para inserir 00000000:

- Procuramos por 00000000

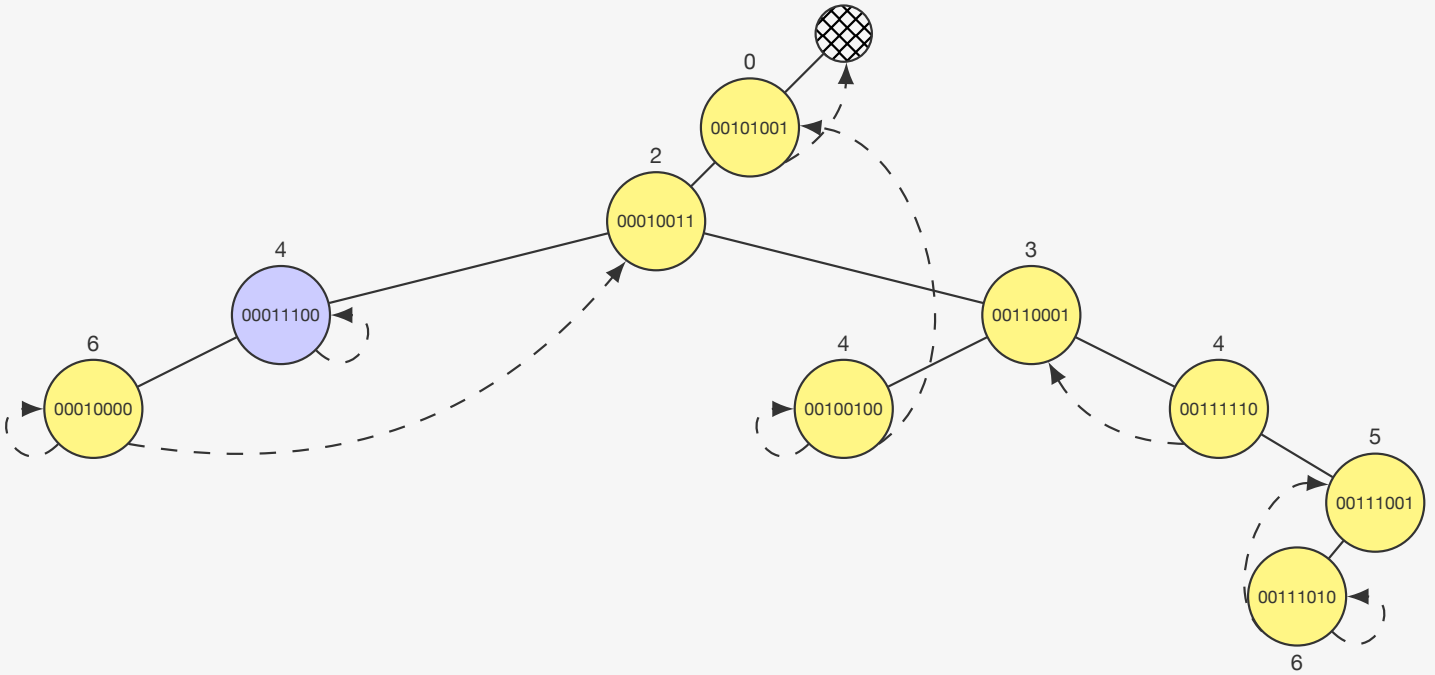
Patricia Trie - Inserção



Para inserir 00000000:

- Procuramos por 00000000

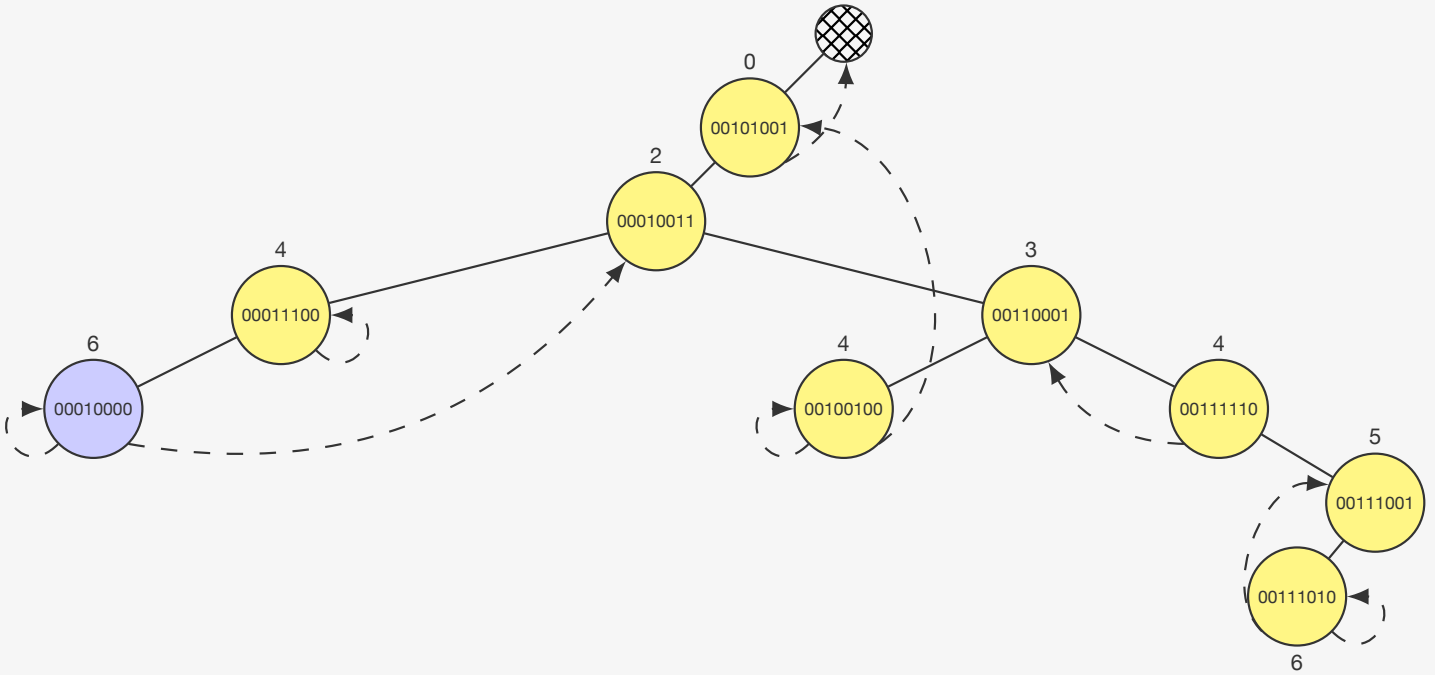
Patricia Trie - Inserção



Para inserir 00000000:

- Procuramos por 00000000

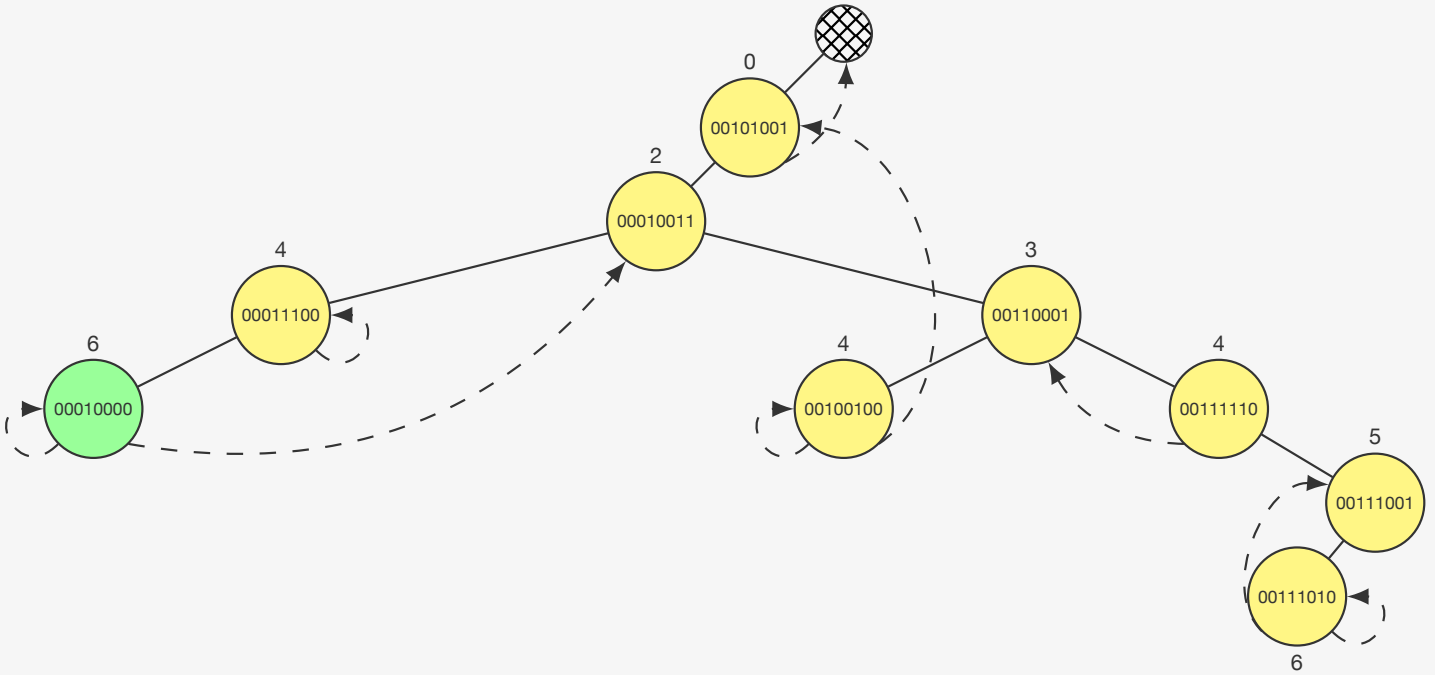
Patricia Trie - Inserção



Para inserir 00000000:

- Procuramos por 00000000

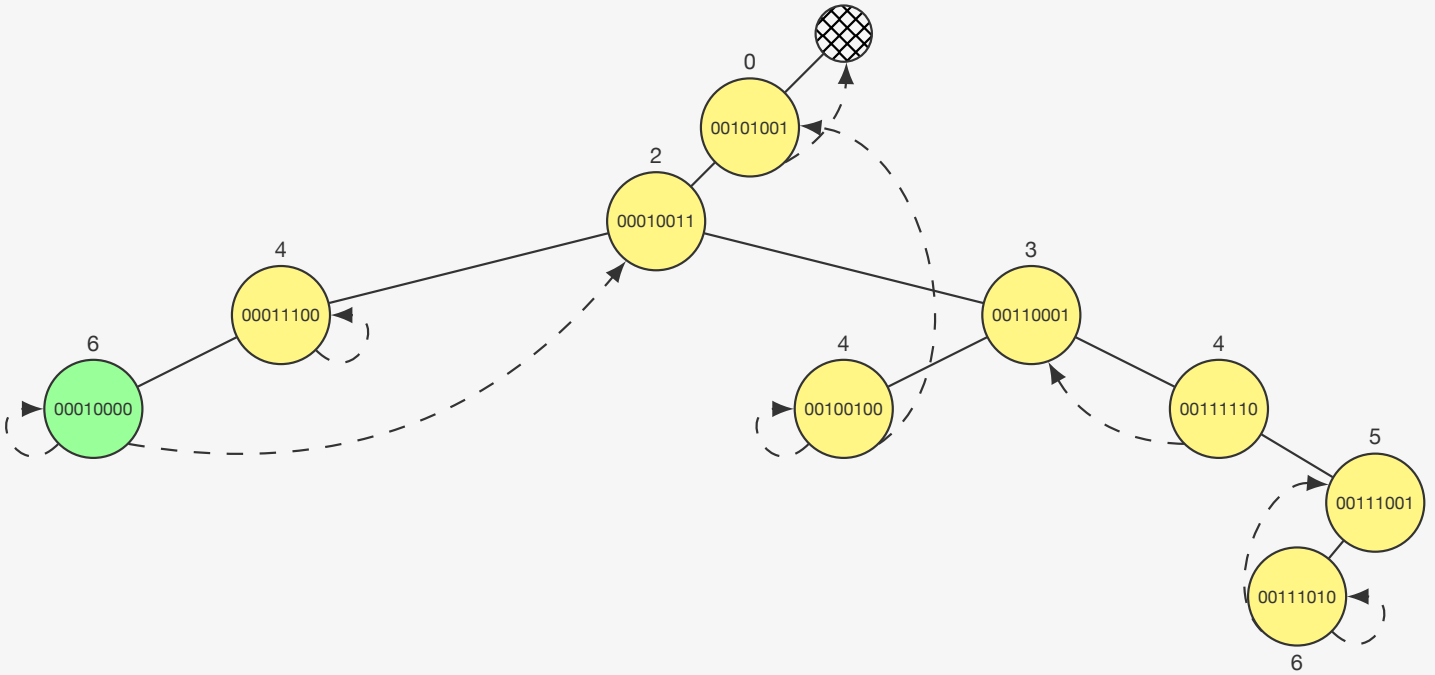
Patricia Trie - Inserção



Para inserir 00000000:

- Procuramos por 00000000

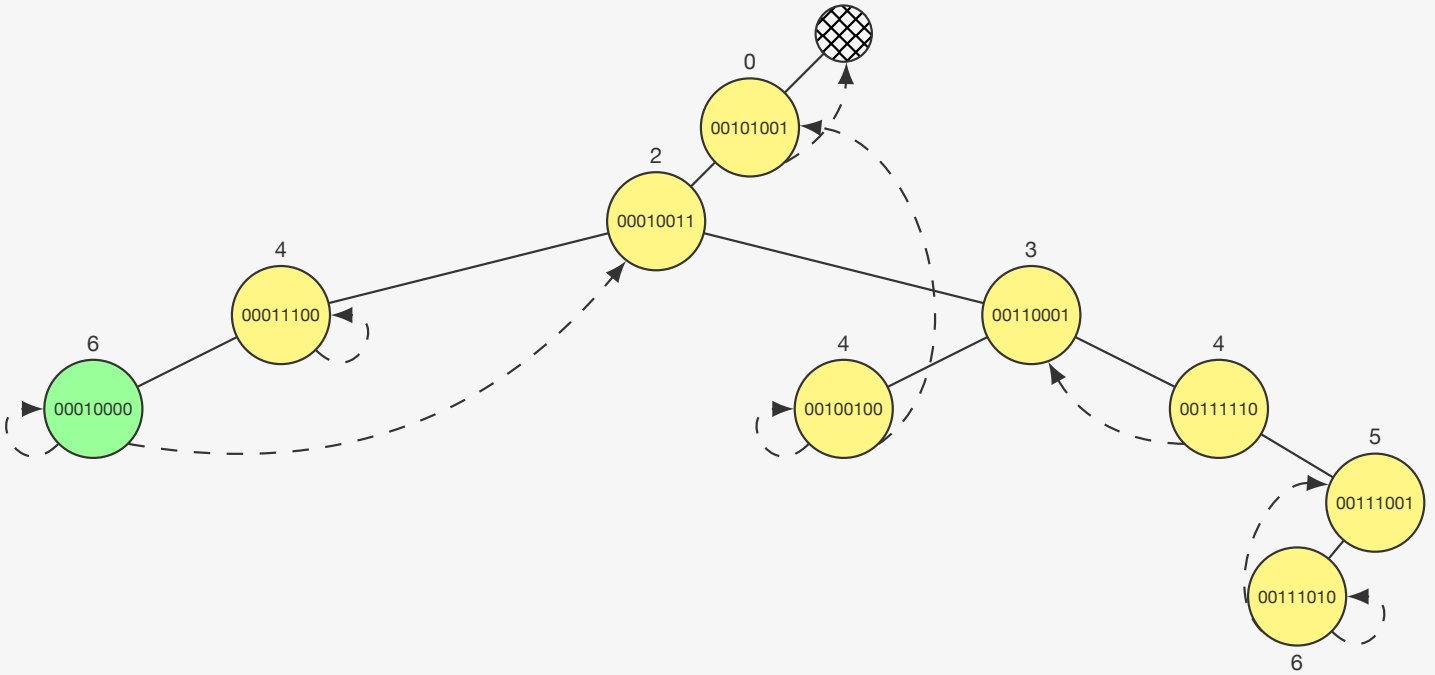
Patricia Trie - Inserção



Para inserir 00000000:

- Procuramos por 00000000
- Encontramos 00010000

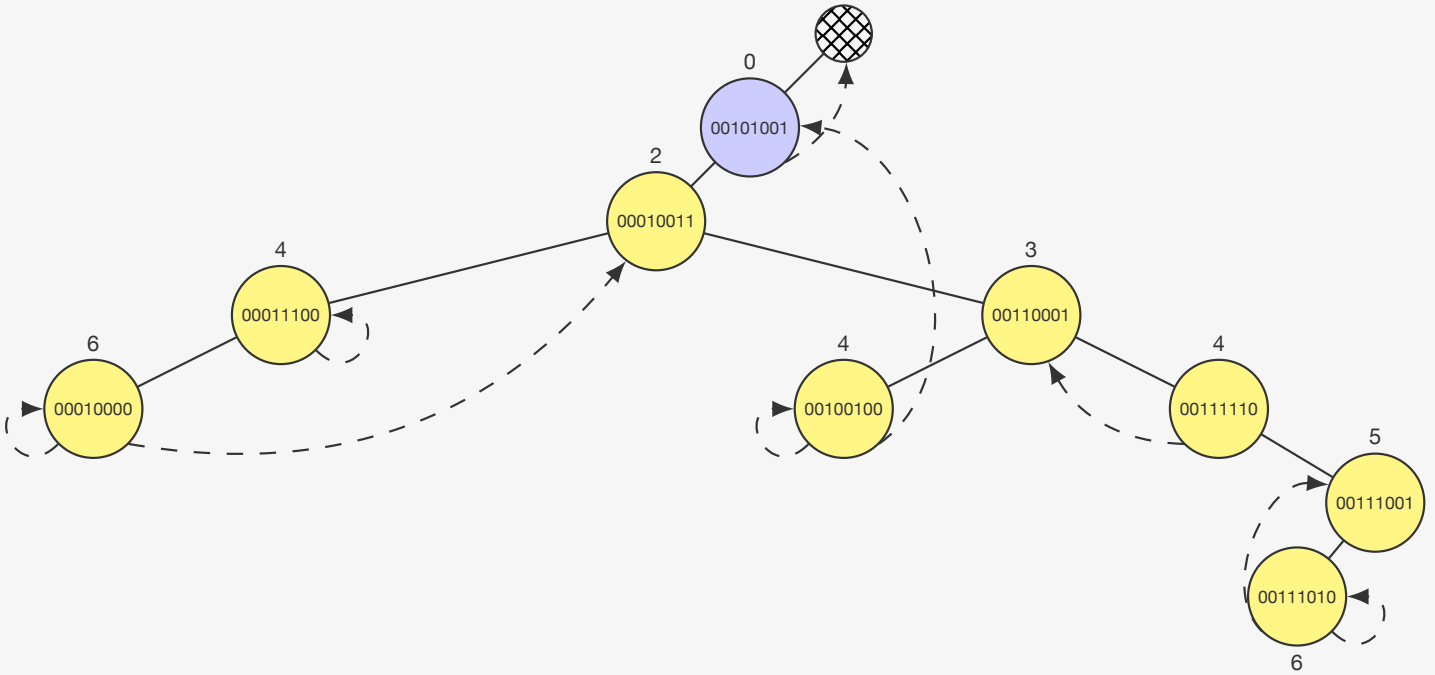
Patricia Trie - Inserção



Para inserir 00000000:

- Procuramos por 00000000
- Encontramos 00010000
- Eles têm o mesmo prefixo até a posição 2

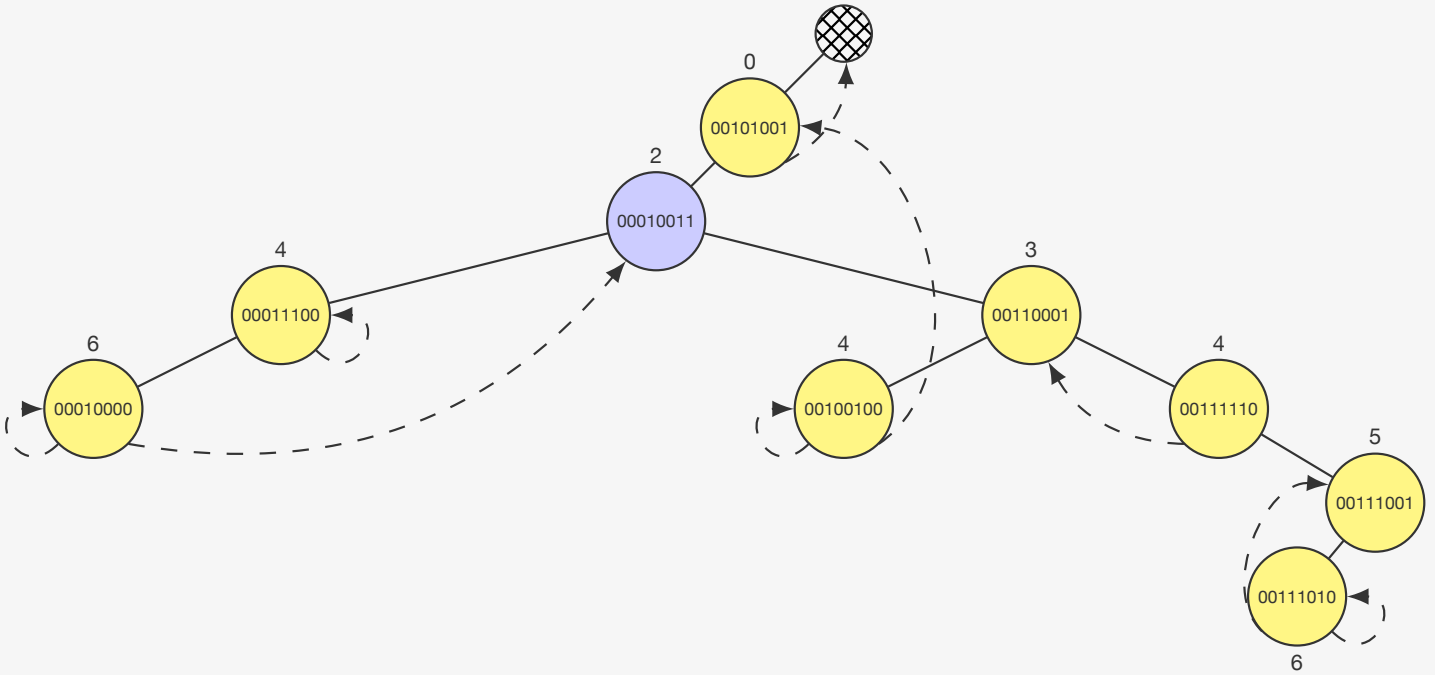
Patricia Trie - Inserção



Para inserir 00000000:

- Procuramos por 00000000
- Encontramos 00010000
- Eles têm o mesmo prefixo até a posição 2
- Fazemos uma nova busca por 00000000

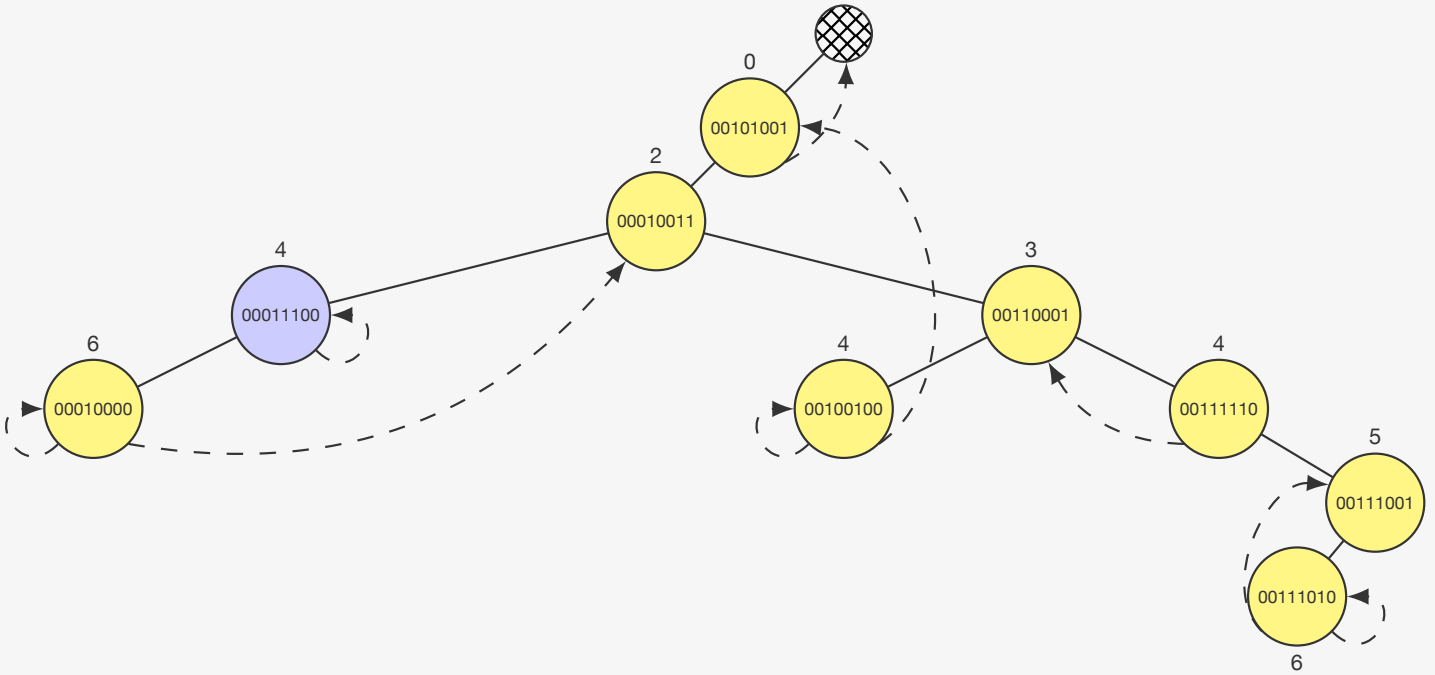
Patricia Trie - Inserção



Para inserir 00000000:

- Procuramos por 00000000
- Encontramos 00010000
- Eles têm o mesmo prefixo até a posição 2
- Fazemos uma nova busca por 00000000

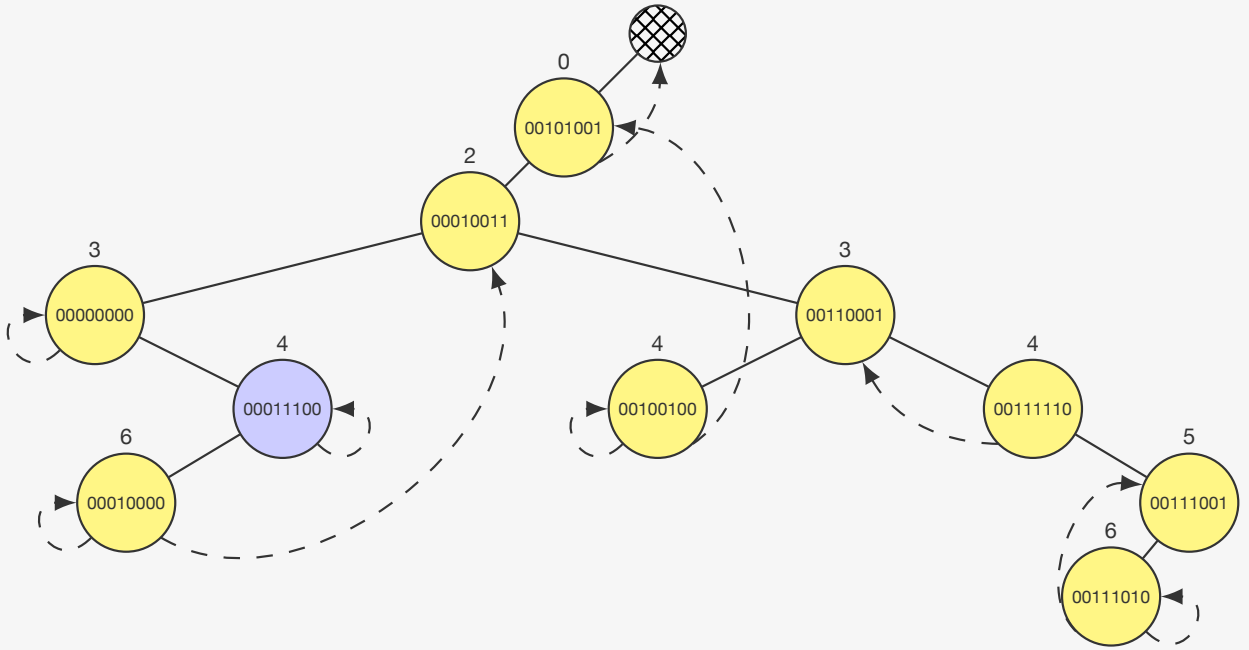
Patricia Trie - Inserção



Para inserir 00000000:

- Procuramos por 00000000
- Encontramos 00010000
- Eles têm o mesmo prefixo até a posição 2
- Fazemos uma nova busca por 00000000
- Precisamos diferenciar 00000000 de 00010000 no bit 3

Patricia Trie - Inserção



Para inserir 00000000:

- Procuramos por 00000000
- Encontramos 00010000
- Eles têm o mesmo prefixo até a posição 2
- Fazemos uma nova busca por 00000000
- Precisamos diferenciar 00000000 de 00010000 no bit 3

Inserção - Implementação

```
1 p_no insere_rec(p_no raiz, unsigned chave, int w, p_no pai);
```

Inserção - Implementação

```
1 p_no insere_rec(p_no raiz, unsigned chave, int w, p_no pai);
```

```
1 void insere(p_no raiz, unsigned chave) {
```

Inserção - Implementação

```
1 p_no insere_rec(p_no raiz, unsigned chave, int w, p_no pai);
```

```
1 void insere(p_no raiz, unsigned chave) {
2   int i;
3   p_no t = busca_rec(raiz->esq, chave, -1);
```

Inserção - Implementação

```
1 p_no insere_rec(p_no raiz, unsigned chave, int w, p_no pai);
```

```
1 void insere(p_no raiz, unsigned chave) {
2   int i;
3   p_no t = busca_rec(raiz->esq, chave, -1);
4   if (chave == t->chave)
5     return;
```

Inserção - Implementação

```
1 p_no insere_rec(p_no raiz, unsigned chave, int w, p_no pai);
```

```
1 void insere(p_no raiz, unsigned chave) {
2   int i;
3   p_no t = busca_rec(raiz->esq, chave, -1);
4   if (chave == t->chave)
5     return;
6   for (i = 0; bit(chave, i) == bit(t->chave, i); i++) ;
```

Inserção - Implementação

```
1 p_no insere_rec(p_no raiz, unsigned chave, int w, p_no pai);
```

```
1 void insere(p_no raiz, unsigned chave) {
2   int i;
3   p_no t = busca_rec(raiz->esq, chave, -1);
4   if (chave == t->chave)
5     return;
6   for (i = 0; bit(chave, i) == bit(t->chave, i); i++) ;
7   raiz->esq = insere_rec(raiz->esq, chave, i, raiz);
8 }
```

Inserção - Implementação

```
1 p_no insere_rec(p_no raiz, unsigned chave, int w, p_no pai) {
```

Inserção - Implementação

```
1 p_no insere_rec(p_no raiz, unsigned chave, int w, p_no pai) {
2   p_no novo;
3   if ((raiz->bit >= w) || (raiz->bit <= pai->bit)) {
```

Inserção - Implementação

```
1 p_no insere_rec(p_no raiz, unsigned chave, int w, p_no pai) {
2   p_no novo;
3   if ((raiz->bit >= w) || (raiz->bit <= pai->bit)) {
4     novo = malloc(sizeof(No));
5     novo->chave = chave;
6     novo->bit = w;
```

Inserção - Implementação

```
1 p_no insere_rec(p_no raiz, unsigned chave, int w, p_no pai) {
2   p_no novo;
3   if ((raiz->bit >= w) || (raiz->bit <= pai->bit)) {
4     novo = malloc(sizeof(No));
5     novo->chave = chave;
6     novo->bit = w;
7     if (bit(chave, novo->bit) == 1) {
```

Inserção - Implementação

```
1 p_no insere_rec(p_no raiz, unsigned chave, int w, p_no pai) {
2   p_no novo;
3   if ((raiz->bit >= w) || (raiz->bit <= pai->bit)) {
4     novo = malloc(sizeof(No));
5     novo->chave = chave;
6     novo->bit = w;
7     if (bit(chave, novo->bit) == 1) {
8       novo->esq = raiz;
9       novo->dir = novo;
```

Inserção - Implementação

```
1  p_no insere_rec(p_no raiz, unsigned chave, int w, p_no pai) {
2    p_no novo;
3    if ((raiz->bit >= w) || (raiz->bit <= pai->bit)) {
4      novo = malloc(sizeof(No));
5      novo->chave = chave;
6      novo->bit = w;
7      if (bit(chave, novo->bit) == 1) {
8        novo->esq = raiz;
9        novo->dir = novo;
10     } else {
11       novo->esq = novo;
12       novo->dir = raiz;
13     }
```

Inserção - Implementação

```
1  p_no insere_rec(p_no raiz, unsigned chave, int w, p_no pai) {
2    p_no novo;
3    if ((raiz->bit >= w) || (raiz->bit <= pai->bit)) {
4      novo = malloc(sizeof(No));
5      novo->chave = chave;
6      novo->bit = w;
7      if (bit(chave, novo->bit) == 1) {
8        novo->esq = raiz;
9        novo->dir = novo;
10     } else {
11       novo->esq = novo;
12       novo->dir = raiz;
13     }
14     return novo;
15   }
```

Inserção - Implementação

```
1  p_no insere_rec(p_no raiz, unsigned chave, int w, p_no pai) {
2    p_no novo;
3    if ((raiz->bit >= w) || (raiz->bit <= pai->bit)) {
4      novo = malloc(sizeof(No));
5      novo->chave = chave;
6      novo->bit = w;
7      if (bit(chave, novo->bit) == 1) {
8        novo->esq = raiz;
9        novo->dir = novo;
10     } else {
11       novo->esq = novo;
12       novo->dir = raiz;
13     }
14     return novo;
15   }
16   if (bit(chave, raiz->bit) == 0)
17     raiz->esq = insere_rec(raiz->esq, chave, w, raiz);
18   else
19     raiz->dir = insere_rec(raiz->dir, chave, w, raiz);
```

Inserção - Implementação

```
1  p_no insere_rec(p_no raiz, unsigned chave, int w, p_no pai) {
2    p_no novo;
3    if ((raiz->bit >= w) || (raiz->bit <= pai->bit)) {
4      novo = malloc(sizeof(No));
5      novo->chave = chave;
6      novo->bit = w;
7      if (bit(chave, novo->bit) == 1) {
8        novo->esq = raiz;
9        novo->dir = novo;
10     } else {
11       novo->esq = novo;
12       novo->dir = raiz;
13     }
14     return novo;
15   }
16   if (bit(chave, raiz->bit) == 0)
17     raiz->esq = insere_rec(raiz->esq, chave, w, raiz);
18   else
19     raiz->dir = insere_rec(raiz->dir, chave, w, raiz);
20   return raiz;
21 }
```

Conclusão

Árvores Digitais de Busca:

Conclusão

Árvores Digitais de Busca:

- Altura $\mathrm{O}(k)$ onde k é o número de bits das chaves

Conclusão

Árvores Digitais de Busca:

- Altura $\mathrm{O}(k)$ onde k é o número de bits das chaves
- Isto é, algoritmos rodam em $\mathrm{O}(k)$

Conclusão

Árvores Digitais de Busca:

- Altura $\mathrm{O}(k)$ onde k é o número de bits das chaves
- Isto é, algoritmos rodam em $\mathrm{O}(k)$
- Mas não tem uma ordenação das chaves...

Conclusão

Árvores Digitais de Busca:

- Altura $\mathrm{O}(k)$ onde k é o número de bits das chaves
- Isto é, algoritmos rodam em $\mathrm{O}(k)$
- Mas não tem uma ordenação das chaves...

Tries:

Conclusão

Árvores Digitais de Busca:

- Altura $\mathrm{O}(k)$ onde k é o número de bits das chaves
- Isto é, algoritmos rodam em $\mathrm{O}(k)$
- Mas não tem uma ordenação das chaves...

Tries:

- Resolvem o problema das árvores digitais de busca

Conclusão

Árvores Digitais de Busca:

- Altura $\mathrm{O}(k)$ onde k é o número de bits das chaves
- Isto é, algoritmos rodam em $\mathrm{O}(k)$
- Mas não tem uma ordenação das chaves...

Tries:

- Resolvem o problema das árvores digitais de busca
- Mas gastam muito espaço e tempo para diferenciar chaves

Conclusão

Árvores Digitais de Busca:

- Altura $\mathrm{O}(k)$ onde k é o número de bits das chaves
- Isto é, algoritmos rodam em $\mathrm{O}(k)$
- Mas não tem uma ordenação das chaves...

Tries:

- Resolvem o problema das árvores digitais de busca
- Mas gastam muito espaço e tempo para diferenciar chaves

Patricia Tries:

Conclusão

Árvores Digitais de Busca:

- Altura $\mathrm{O}(k)$ onde k é o número de bits das chaves
- Isto é, algoritmos rodam em $\mathrm{O}(k)$
- Mas não tem uma ordenação das chaves...

Tries:

- Resolvem o problema das árvores digitais de busca
- Mas gastam muito espaço e tempo para diferenciar chaves

Patricia Tries:

- Economizam espaço e tempo

Conclusão

Árvores Digitais de Busca:

- Altura $\mathrm{O}(k)$ onde k é o número de bits das chaves
- Isto é, algoritmos rodam em $\mathrm{O}(k)$
- Mas não tem uma ordenação das chaves...

Tries:

- Resolvem o problema das árvores digitais de busca
- Mas gastam muito espaço e tempo para diferenciar chaves

Patricia Tries:

- Economizam espaço e tempo
- Podem ser usadas para indexar chaves de tamanho variável

Conclusão

Árvores Digitais de Busca:

- Altura $\mathrm{O}(k)$ onde k é o número de bits das chaves
- Isto é, algoritmos rodam em $\mathrm{O}(k)$
- Mas não tem uma ordenação das chaves...

Tries:

- Resolvem o problema das árvores digitais de busca
- Mas gastam muito espaço e tempo para diferenciar chaves

Patricia Tries:

- Economizam espaço e tempo
- Podem ser usadas para indexar chaves de tamanho variável
- Podem ser usadas em Radix maiores que 2

Conclusão

Árvores Digitais de Busca:

- Altura $\mathrm{O}(k)$ onde k é o número de bits das chaves
- Isto é, algoritmos rodam em $\mathrm{O}(k)$
- Mas não tem uma ordenação das chaves...

Tries:

- Resolvem o problema das árvores digitais de busca
- Mas gastam muito espaço e tempo para diferenciar chaves

Patricia Tries:

- Economizam espaço e tempo
- Podem ser usadas para indexar chaves de tamanho variável
- Podem ser usadas em Radix maiores que 2
  - Por exemplo, 256 para indexar palavras

Conclusão

Árvores Digitais de Busca:

- Altura $\mathrm{O}(k)$ onde k é o número de bits das chaves
- Isto é, algoritmos rodam em $\mathrm{O}(k)$
- Mas não tem uma ordenação das chaves...

Tries:

- Resolvem o problema das árvores digitais de busca
- Mas gastam muito espaço e tempo para diferenciar chaves

Patricia Tries:

- Economizam espaço e tempo
- Podem ser usadas para indexar chaves de tamanho variável
- Podem ser usadas em Radix maiores que 2
  - Por exemplo, 256 para indexar palavras
  - Nó precisa ter até 256 filhos...