MC-202 — Unidade 1
Revisão de recursão

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

1º semestre/2018

Recursão

Recursão

A ideia é que um problema pode ser resolvido da seguinte maneira:

Recursão

A ideia é que um problema pode ser resolvido da seguinte maneira:

- Primeiro, definimos as soluções para casos básicos

Recursão

A ideia é que um problema pode ser resolvido da seguinte maneira:

- Primeiro, definimos as soluções para casos básicos
- Em seguida, tentamos reduzir o problema para instâncias menores do problema

Recursão

A ideia é que um problema pode ser resolvido da seguinte maneira:

- Primeiro, definimos as soluções para casos básicos
- Em seguida, tentamos reduzir o problema para instâncias menores do problema
- Finalmente, combinamos o resultado das instâncias menores para obter um resultado do problema original

Genericamente

Caso base:

Genericamente

Caso base:

- resolve instâncias pequenas diretamente

Genericamente

Caso base:

- resolve instâncias pequenas diretamente

Caso geral:

Genericamente

Caso base:

- resolve instâncias pequenas diretamente

Caso geral:

- reduz o problema para instâncias menores do mesmo problema

Genericamente

Caso base:

- resolve instâncias pequenas diretamente

Caso geral:

- reduz o problema para instâncias menores do mesmo problema
- chama a função recursivamente

Genericamente

Caso base:

- resolve instâncias pequenas diretamente

Caso geral:

- reduz o problema para instâncias menores do mesmo problema
- chama a função recursivamente

```
1 int fat(int n) {
```

Genericamente

Caso base:

- resolve instâncias pequenas diretamente

Caso geral:

- reduz o problema para instâncias menores do mesmo problema
- chama a função recursivamente

```
1 int fat(int n) {
```

Genericamente

Caso base:

- resolve instâncias pequenas diretamente

Caso geral:

- reduz o problema para instâncias menores do mesmo problema
- chama a função recursivamente

```
1 int fat(int n) {
2   if (n == 0) /* caso base */
3     return 1;
```

Genericamente

Caso base:

- resolve instâncias pequenas diretamente

Caso geral:

- reduz o problema para instâncias menores do mesmo problema
- chama a função recursivamente

```
1 int fat(int n) {
2   if (n == 0) /* caso base */
3     return 1;
4   else /* caso geral */
5     return n * fat(n-1); /* instância menor */
6 }
```

Definições recursivas

Algumas operações matemáticas ou objetos matemáticas têm uma definição recursiva

Definições recursivas

Algumas operações matemáticas ou objetos matemáticas têm uma definição recursiva

- Ex: fatorial, sequência de Fibonacci, palíndromos, etc...

Definições recursivas

Algumas operações matemáticas ou objetos matemáticas têm uma definição recursiva

- Ex: fatorial, sequência de Fibonacci, palíndromos, etc...
- ou podem ser vistos do ponto de vista da recursão

Definições recursivas

Algumas operações matemáticas ou objetos matemáticas têm uma definição recursiva

- Ex: fatorial, sequência de Fibonacci, palíndromos, etc...
- ou podem ser vistos do ponto de vista da recursão
  - multiplicação, divisão, exponenciação, etc...

Definições recursivas

Algumas operações matemáticas ou objetos matemáticas têm uma definição recursiva

- Ex: fatorial, sequência de Fibonacci, palíndromos, etc...
- ou podem ser vistos do ponto de vista da recursão
  - multiplicação, divisão, exponenciação, etc...

Isso nos permite projetar algoritmos para lidar com essas operações/objetos

Definições recursivas

Algumas operações matemáticas ou objetos matemáticas têm uma definição recursiva

- Ex: fatorial, sequência de Fibonacci, palíndromos, etc...
- ou podem ser vistos do ponto de vista da recursão
  - multiplicação, divisão, exponenciação, etc...

Isso nos permite projetar algoritmos para lidar com essas operações/objetos

Ex: Exponenciação

Definições recursivas

Algumas operações matemáticas ou objetos matemáticas têm uma definição recursiva

- Ex: fatorial, sequência de Fibonacci, palíndromos, etc...
- ou podem ser vistos do ponto de vista da recursão
  - multiplicação, divisão, exponenciação, etc...

Isso nos permite projetar algoritmos para lidar com essas operações/objetos

Ex: Exponenciação

Seja a é um número real e b é um número inteiro não-negativo

Definições recursivas

Algumas operações matemáticas ou objetos matemáticas têm uma definição recursiva

- Ex: fatorial, sequência de Fibonacci, palíndromos, etc...
- ou podem ser vistos do ponto de vista da recursão
  - multiplicação, divisão, exponenciação, etc...

Isso nos permite projetar algoritmos para lidar com essas operações/objetos

Ex: Exponenciação

Seja a é um número real e b é um número inteiro não-negativo

- Se $b = 0$, então $a^b = 1$

Definições recursivas

Algumas operações matemáticas ou objetos matemáticas têm uma definição recursiva

- Ex: fatorial, sequência de Fibonacci, palíndromos, etc...
- ou podem ser vistos do ponto de vista da recursão
  - multiplicação, divisão, exponenciação, etc...

Isso nos permite projetar algoritmos para lidar com essas operações/objetos

Ex: Exponenciação

Seja a é um número real e b é um número inteiro não-negativo

- Se $b = 0$, então $a^b = 1$
- Se $b > 0$, então $a^b = a \cdot a^{b-1}$

Definições recursivas

Algumas operações matemáticas ou objetos matemáticas têm uma definição recursiva

- Ex: fatorial, sequência de Fibonacci, palíndromos, etc...
- ou podem ser vistos do ponto de vista da recursão
  - multiplicação, divisão, exponenciação, etc...

Isso nos permite projetar algoritmos para lidar com essas operações/objetos

Ex: Exponenciação

Seja a é um número real e b é um número inteiro não-negativo

- Se $b = 0$, então $a^b = 1$
- Se $b > 0$, então $a^b = a \cdot a^{b-1}$

```
1 double potencia(double a, int b) {
2   if (b == 0)
3     return 1;
4   else
5     return a * potencia(a, b-1);
6 }
```

Palíndromos

Uma palavra é um palíndromo se ela é igual ao seu reverso

Palíndromos

Uma palavra é um palíndromo se ela é igual ao seu reverso

- Ex: ana, ovo, osso, radar

Palíndromos

Uma palavra é um palíndromo se ela é igual ao seu reverso

- Ex: ana, ovo, osso, radar

Matematicamente, uma palavra é palíndromo se:

Palíndromos

Uma palavra é um palíndromo se ela é igual ao seu reverso

- Ex: ana, ovo, osso, radar

Matematicamente, uma palavra é palíndromo se:

- ou tem zero letras (palavra vazia)

Palíndromos

Uma palavra é um palíndromo se ela é igual ao seu reverso

- Ex: ana, ovo, osso, radar

Matematicamente, uma palavra é palíndromo se:

- ou tem zero letras (palavra vazia)
- ou tem uma letra

Palíndromos

Uma palavra é um palíndromo se ela é igual ao seu reverso

- Ex: ana, ovo, osso, radar

Matematicamente, uma palavra é palíndromo se:

- ou tem zero letras (palavra vazia)
- ou tem uma letra
- ou é da forma $\alpha p \alpha$ onde

Palíndromos

Uma palavra é um palíndromo se ela é igual ao seu reverso

- Ex: ana, ovo, osso, radar

Matematicamente, uma palavra é palíndromo se:

- ou tem zero letras (palavra vazia)
- ou tem uma letra
- ou é da forma $\alpha p \alpha$ onde
  - α é uma letra

Palíndromos

Uma palavra é um palíndromo se ela é igual ao seu reverso

- Ex: ana, ovo, osso, radar

Matematicamente, uma palavra é palíndromo se:

- ou tem zero letras (palavra vazia)
- ou tem uma letra
- ou é da forma $\alpha p \alpha$ onde
  - α é uma letra
  - p é um palíndromo

Palíndromos

Uma palavra é um palíndromo se ela é igual ao seu reverso

- Ex: ana, ovo, osso, radar

Matematicamente, uma palavra é palíndromo se:

- ou tem zero letras (palavra vazia)
- ou tem uma letra
- ou é da forma $\alpha p \alpha$ onde
  - α é uma letra
  - p é um palíndromo

```
1 int eh_palindromo(char *palavra, int ini, int fim) {
2   if (ini >= fim)
3     return 1;
```

Palíndromos

Uma palavra é um palíndromo se ela é igual ao seu reverso

- Ex: ana, ovo, osso, radar

Matematicamente, uma palavra é palíndromo se:

- ou tem zero letras (palavra vazia)
- ou tem uma letra
- ou é da forma $\alpha p \alpha$ onde
  - α é uma letra
  - p é um palíndromo

```
1 int eh_palindromo(char *palavra, int ini, int fim) {
2   if (ini >= fim)
3     return 1;
```

Palíndromos

Uma palavra é um palíndromo se ela é igual ao seu reverso

- Ex: ana, ovo, osso, radar

Matematicamente, uma palavra é palíndromo se:

- ou tem zero letras (palavra vazia)
- ou tem uma letra
- ou é da forma $\alpha p \alpha$ onde
  - α é uma letra
  - p é um palíndromo

```
1 int eh_palindromo(char *palavra, int ini, int fim) {
2   if (ini >= fim)
3     return 1;
4   return (palavra[ini] == palavra[fim]) &&
5          eh_palindromo(palavra, ini+1, fim-1);
6 }
```

Palíndromos

Uma palavra é um palíndromo se ela é igual ao seu reverso

- Ex: ana, ovo, osso, radar

Matematicamente, uma palavra é palíndromo se:

- ou tem zero letras (palavra vazia)
- ou tem uma letra
- ou é da forma $\alpha p \alpha$ onde
  - α é uma letra
  - p é um palíndromo

```
1 int eh_palindromo(char *palavra, int ini, int fim) {
2   if (ini >= fim)
3     return 1;
4   return (palavra[ini] == palavra[fim]) &&
5          eh_palindromo(palavra, ini+1, fim-1);
6 }
7
8 eh_palindromo(palavra, 0, strlen(palavra)-1);
```

Busca Binária

Para buscar `x` no vetor ordenado `dados` entre as posições `l` e `r`

Busca Binária

Para buscar `x` no vetor ordenado `dados` entre as posições `l` e `r`

Casos base:

Busca Binária

Para buscar `x` no vetor ordenado `dados` entre as posições `l` e `r`

Casos base:

- Se o intervalo for vazio (`l > r`), `x` não está no vetor

Busca Binária

Para buscar `x` no vetor ordenado `dados` entre as posições `l` e `r`

Casos base:

- Se o intervalo for vazio (`l > r`), `x` não está no vetor
- Se `dados[m] == x`, onde `m = (l+r)/2`

Busca Binária

Para buscar `x` no vetor ordenado `dados` entre as posições `l` e `r`

Casos base:

- Se o intervalo for vazio (`l > r`), `x` não está no vetor
- Se `dados[m] == x`, onde `m = (l+r)/2`
  - Devolvemos `m`

Busca Binária

Para buscar `x` no vetor ordenado `dados` entre as posições `l` e `r`

Casos base:

- Se o intervalo for vazio (`l > r`), `x` não está no vetor
- Se `dados[m] == x`, onde `m = (l+r)/2`
  - Devolvemos `m`

Caso geral:

Busca Binária

Para buscar `x` no vetor ordenado `dados` entre as posições `l` e `r`

Casos base:

- Se o intervalo for vazio (`l > r`), `x` não está no vetor
- Se `dados[m] == x`, onde `m = (l+r)/2`
  - Devolvemos `m`

Caso geral:

- Se `dados[m] < x`, então `x` só pode estar entre `m + 1` e `r`

Busca Binária

Para buscar `x` no vetor ordenado `dados` entre as posições `l` e `r`

Casos base:

- Se o intervalo for vazio (`l > r`), `x` não está no vetor
- Se `dados[m] == x`, onde `m = (l+r)/2`
  - Devolvemos `m`

Caso geral:

- Se `dados[m] < x`, então `x` só pode estar entre `m + 1` e `r`
  - Devolvemos o resultado da chamada recursiva

Busca Binária

Para buscar `x` no vetor ordenado `dados` entre as posições `l` e `r`

Casos base:

- Se o intervalo for vazio (`l > r`), `x` não está no vetor
- Se `dados[m] == x`, onde `m = (l+r)/2`
  - Devolvemos `m`

Caso geral:

- Se `dados[m] < x`, então `x` só pode estar entre `m + 1` e `r`
  - Devolvemos o resultado da chamada recursiva
- Se `dados[m] > x`, então `x` só pode estar entre `l` e `m - 1`

Busca Binária

Para buscar `x` no vetor ordenado `dados` entre as posições `l` e `r`

Casos base:

- Se o intervalo for vazio (`l > r`), `x` não está no vetor
- Se `dados[m] == x`, onde `m = (l+r)/2`
  - Devolvemos `m`

Caso geral:

- Se `dados[m] < x`, então `x` só pode estar entre `m + 1` e `r`
  - Devolvemos o resultado da chamada recursiva
- Se `dados[m] > x`, então `x` só pode estar entre `l` e `m - 1`
  - Devolvemos o resultado da chamada recursiva

Busca Binária

Para buscar `x` no vetor ordenado `dados` entre as posições `l` e `r`

Casos base:

- Se o intervalo for vazio (`l > r`), `x` não está no vetor
- Se `dados[m] == x`, onde `m = (l+r)/2`
  - Devolvemos `m`

Caso geral:

- Se `dados[m] < x`, então `x` só pode estar entre `m + 1` e `r`
  - Devolvemos o resultado da chamada recursiva
- Se `dados[m] > x`, então `x` só pode estar entre `l` e `m - 1`
  - Devolvemos o resultado da chamada recursiva

```
1 int busca_binaria(int *dados, int l, int r, int x) {
2   int m = (l+r)/2;
```

Busca Binária

Para buscar `x` no vetor ordenado `dados` entre as posições `l` e `r`

Casos base:

- Se o intervalo for vazio (`l > r`), `x` não está no vetor
- Se `dados[m] == x`, onde `m = (l+r)/2`
  - Devolvemos `m`

Caso geral:

- Se `dados[m] < x`, então `x` só pode estar entre `m + 1` e `r`
  - Devolvemos o resultado da chamada recursiva
- Se `dados[m] > x`, então `x` só pode estar entre `l` e `m - 1`
  - Devolvemos o resultado da chamada recursiva

```
1 int busca_binaria(int *dados, int l, int r, int x) {
2   int m = (l+r)/2;
```

Busca Binária

Para buscar `x` no vetor ordenado `dados` entre as posições `l` e `r`

Casos base:

- Se o intervalo for vazio (`l > r`), `x` não está no vetor
- Se `dados[m] == x`, onde `m = (l+r)/2`
  - Devolvemos `m`

Caso geral:

- Se `dados[m] < x`, então `x` só pode estar entre `m + 1` e `r`
  - Devolvemos o resultado da chamada recursiva
- Se `dados[m] > x`, então `x` só pode estar entre `l` e `m - 1`
  - Devolvemos o resultado da chamada recursiva

```
1 int busca_binaria(int *dados, int l, int r, int x) {
2   int m = (l+r)/2;
3   if (l > r)
4     return -1;
```

Busca Binária

Para buscar `x` no vetor ordenado `dados` entre as posições `l` e `r`

Casos base:

- Se o intervalo for vazio (`l > r`), `x` não está no vetor
- Se `dados[m] == x`, onde `m = (l+r)/2`
  - Devolvemos `m`

Caso geral:

- Se `dados[m] < x`, então `x` só pode estar entre `m + 1` e `r`
  - Devolvemos o resultado da chamada recursiva
- Se `dados[m] > x`, então `x` só pode estar entre `l` e `m - 1`
  - Devolvemos o resultado da chamada recursiva

```
1 int busca_binaria(int *dados, int l, int r, int x) {
2   int m = (l+r)/2;
3   if (l > r)
4     return -1;
5   if (dados[m] == x)
6     return m;
```

Busca Binária

Para buscar `x` no vetor ordenado `dados` entre as posições `l` e `r`

Casos base:

- Se o intervalo for vazio (`l > r`), `x` não está no vetor
- Se `dados[m] == x`, onde `m = (l+r)/2`
  - Devolvemos `m`

Caso geral:

- Se `dados[m] < x`, então `x` só pode estar entre `m + 1` e `r`
  - Devolvemos o resultado da chamada recursiva
- Se `dados[m] > x`, então `x` só pode estar entre `l` e `m - 1`
  - Devolvemos o resultado da chamada recursiva

```
1 int busca_binaria(int *dados, int l, int r, int x) {
2   int m = (l+r)/2;
3   if (l > r)
4     return -1;
5   if (dados[m] == x)
6     return m;
7   else if (dados[m] < x)
8     return busca_binaria(dados, m + 1, r, x);
```

Busca Binária

Para buscar `x` no vetor ordenado `dados` entre as posições `l` e `r`

Casos base:

- Se o intervalo for vazio (`l > r`), `x` não está no vetor
- Se `dados[m] == x`, onde `m = (l+r)/2`
  - Devolvemos `m`

Caso geral:

- Se `dados[m] < x`, então `x` só pode estar entre `m + 1` e `r`
  - Devolvemos o resultado da chamada recursiva
- Se `dados[m] > x`, então `x` só pode estar entre `l` e `m - 1`
  - Devolvemos o resultado da chamada recursiva

```
1  int busca_binaria(int *dados, int l, int r, int x) {
2    int m = (l+r)/2;
3    if (l > r)
4      return -1;
5    if (dados[m] == x)
6      return m;
7    else if (dados[m] < x)
8      return busca_binaria(dados, m + 1, r, x);
9    else
10     return busca_binaria(dados, l, m - 1, x);
11 }
```

Comparando recursão e algoritmos iterativos

Normalmente algoritmos recursivos são:

Comparando recursão e algoritmos iterativos

Normalmente algoritmos recursivos são:

- mais simples de entender

Comparando recursão e algoritmos iterativos

Normalmente algoritmos recursivos são:

- mais simples de entender
- menores e mais fáceis de programar

Comparando recursão e algoritmos iterativos

Normalmente algoritmos recursivos são:

- mais simples de entender
- menores e mais fáceis de programar
- mais “elegantes”

Comparando recursão e algoritmos iterativos

Normalmente algoritmos recursivos são:

- mais simples de entender
- menores e mais fáceis de programar
- mais “elegantes”

Mas algumas vezes podem ser

Comparando recursão e algoritmos iterativos

Normalmente algoritmos recursivos são:

- mais simples de entender
- menores e mais fáceis de programar
- mais “elegantes”

Mas algumas vezes podem ser

- muito ineficientes (quando comparados a algoritmos iterativos para o mesmo problema)

Comparando recursão e algoritmos iterativos

Normalmente algoritmos recursivos são:

- mais simples de entender
- menores e mais fáceis de programar
- mais “elegantes”

Mas algumas vezes podem ser

- muito ineficientes (quando comparados a algoritmos iterativos para o mesmo problema)

Estratégia ideal:

Comparando recursão e algoritmos iterativos

Normalmente algoritmos recursivos são:

- mais simples de entender
- menores e mais fáceis de programar
- mais “elegantes”

Mas algumas vezes podem ser

- muito ineficientes (quando comparados a algoritmos iterativos para o mesmo problema)

Estratégia ideal:

1. encontrar algoritmo recursivo para o problema

Comparando recursão e algoritmos iterativos

Normalmente algoritmos recursivos são:

- mais simples de entender
- menores e mais fáceis de programar
- mais “elegantes”

Mas algumas vezes podem ser

- muito ineficientes (quando comparados a algoritmos iterativos para o mesmo problema)

Estratégia ideal:

1. encontrar algoritmo recursivo para o problema
2. reescrevê-lo como um algoritmo iterativo

Comparando recursão e algoritmos iterativos

Normalmente algoritmos recursivos são:

- mais simples de entender
- menores e mais fáceis de programar
- mais “elegantes”

Mas algumas vezes podem ser

- muito ineficientes (quando comparados a algoritmos iterativos para o mesmo problema)

Estratégia ideal:

1. encontrar algoritmo recursivo para o problema
2. reescrevê-lo como um algoritmo iterativo

Isso sempre é possível? Quando for possível, sempre melhora a eficiência do algoritmo?

Comparando recursão e algoritmos iterativos

Normalmente algoritmos recursivos são:

- mais simples de entender
- menores e mais fáceis de programar
- mais “elegantes”

Mas algumas vezes podem ser

- muito ineficientes (quando comparados a algoritmos iterativos para o mesmo problema)

Estratégia ideal:

1. encontrar algoritmo recursivo para o problema
2. reescrevê-lo como um algoritmo iterativo

Isso sempre é possível? Quando for possível, sempre melhora a eficiência do algoritmo?

- Veremos mais sobre isso no curso...

Fibonacci: recursivo vs. iterativo

Sequência de Fibonacci:

Fibonacci: recursivo vs. iterativo

Sequência de Fibonacci: 1, 1,

Fibonacci: recursivo vs. iterativo

Sequência de Fibonacci: 1, 1, 2,

Fibonacci: recursivo vs. iterativo

Sequência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3,

Fibonacci: recursivo vs. iterativo

Sequência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5,

Fibonacci: recursivo vs. iterativo

Sequência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8,

Fibonacci: recursivo vs. iterativo

Sequência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,

Fibonacci: recursivo vs. iterativo

Sequência de Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

```
1 int fib_rec(int n) {
```

Fibonacci: recursivo vs. iterativo

Sequência de Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

```
1 int fib_rec(int n) {
2   if (n == 1)
3     return 1;
```

Fibonacci: recursivo vs. iterativo

Sequência de Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

```
1 int fib_rec(int n) {
2   if (n == 1)
3     return 1;
4   else if (n == 2)
5     return 1;
```

Fibonacci: recursivo vs. iterativo

Sequência de Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

```
1 int fib_rec(int n) {
2   if (n == 1)
3     return 1;
4   else if (n == 2)
5     return 1;
6   else
7     return fib_rec(n-2)+
      fib_rec(n-1);
8 }
```

Fibonacci: recursivo vs. iterativo

Sequência de Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

```c
int fib_rec(int n) {
  if (n == 1)
    return 1;
  else if (n == 2)
    return 1;
  else
    return fib_rec(n-2)+
    fib_rec(n-1);
}
```

```c
int fib_iterativo(int n) {
```

Fibonacci: recursivo vs. iterativo

Sequência de Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

```
1 int fib_rec(int n) {
2   if (n == 1)
3     return 1;
4   else if (n == 2)
5     return 1;
6   else
7     return fib_rec(n-2)+
      fib_rec(n-1);
8 }
```

```
1 int fib_iterativo(int n) {
2   int ant, atual, prox, i;
```

Fibonacci: recursivo vs. iterativo

Sequência de Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

```
1 int fib_rec(int n) {
2   if (n == 1)
3     return 1;
4   else if (n == 2)
5     return 1;
6   else
7     return fib_rec(n-2)+
      fib_rec(n-1);
8 }
```

```
1 int fib_iterativo(int n) {
2   int ant, atual, prox, i;
3   ant = atual = 1;
```

Fibonacci: recursivo vs. iterativo

Sequência de Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

```c
int fib_rec(int n) {
  if (n == 1)
    return 1;
  else if (n == 2)
    return 1;
  else
    return fib_rec(n-2)+
    fib_rec(n-1);
}
```

```c
int fib_iterativo(int n) {
  int ant, atual, prox, i;
  ant = atual = 1;
  for (i = 3; i < n; i++) {
```

Fibonacci: recursivo vs. iterativo

Sequência de Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

```c
int fib_rec(int n) {
  if (n == 1)
    return 1;
  else if (n == 2)
    return 1;
  else
    return fib_rec(n-2)+
    fib_rec(n-1);
}
```

```c
int fib_iterativo(int n) {
  int ant, atual, prox, i;
  ant = atual = 1;
  for (i = 3; i < n; i++) {
    prox = ant + atual;
```

Fibonacci: recursivo vs. iterativo

Sequência de Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

```c
int fib_rec(int n) {
  if (n == 1)
    return 1;
  else if (n == 2)
    return 1;
  else
    return fib_rec(n-2)+
    fib_rec(n-1);
}
```

```c
int fib_iterativo(int n) {
  int ant, atual, prox, i;
  ant = atual = 1;
  for (i = 3; i < n; i++) {
    prox = ant + atual;
    ant = atual;
```

Fibonacci: recursivo vs. iterativo

Sequência de Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

```c
int fib_rec(int n) {
  if (n == 1)
    return 1;
  else if (n == 2)
    return 1;
  else
    return fib_rec(n-2)+
    fib_rec(n-1);
}
```

```c
int fib_iterativo(int n) {
  int ant, atual, prox, i;
  ant = atual = 1;
  for (i = 3; i < n; i++) {
    prox = ant + atual;
    ant = atual;
    atual = prox;
```

Fibonacci: recursivo vs. iterativo

Sequência de Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

```c
int fib_rec(int n) {
  if (n == 1)
    return 1;
  else if (n == 2)
    return 1;
  else
    return fib_rec(n-2)+
    fib_rec(n-1);
}
```

```c
int fib_iterativo(int n) {
  int ant, atual, prox, i;
  ant = atual = 1;
  for (i = 3; i < n; i++) {
    prox = ant + atual;
    ant = atual;
    atual = prox;
  }
  return atual;
}
```

Fibonacci: recursivo vs. iterativo

Sequência de Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

```c
int fib_rec(int n) {
  if (n == 1)
    return 1;
  else if (n == 2)
    return 1;
  else
    return fib_rec(n-2)+
    fib_rec(n-1);
}
```

```c
int fib_iterativo(int n) {
  int ant, atual, prox, i;
  ant = atual = 1;
  for (i = 3; i < n; i++) {
    prox = ant + atual;
    ant = atual;
    atual = prox;
  }
  return atual;
}
```

Número de operações:

Fibonacci: recursivo vs. iterativo

Sequência de Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

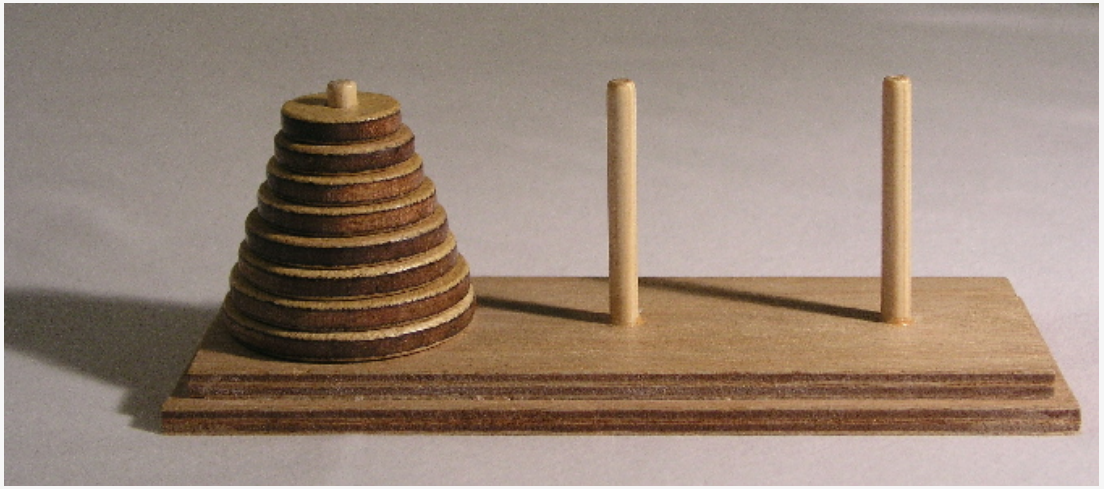
```c
int fib_rec(int n) {
  if (n == 1)
    return 1;
  else if (n == 2)
    return 1;
  else
    return fib_rec(n-2)+
    fib_rec(n-1);
}
```

```c
int fib_iterativo(int n) {
  int ant, atual, prox, i;
  ant = atual = 1;
  for (i = 3; i < n; i++) {
    prox = ant + atual;
    ant = atual;
    atual = prox;
  }
  return atual;
}
```

Número de operações:

- iterativo: $\approx n$
- recursivo: $\approx \texttt{fib}(n)$ (aproximadamente 1.6^n)

Torres de Hanói



A torre de Hanói é um brinquedo com três estacas A, B e C e discos de tamanhos diferentes

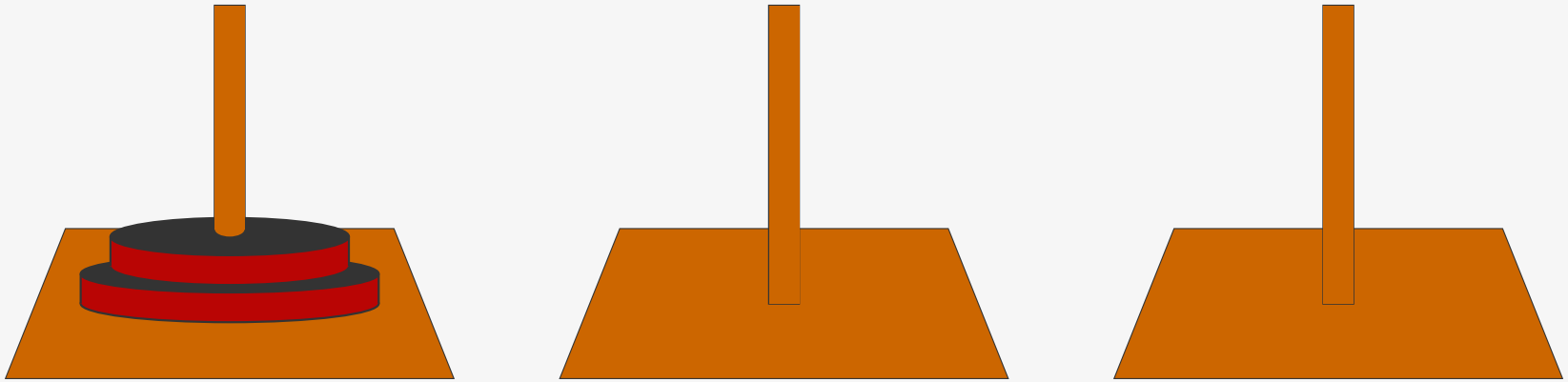
Objetivo:

- mover todos os discos da estaca A para a estaca C

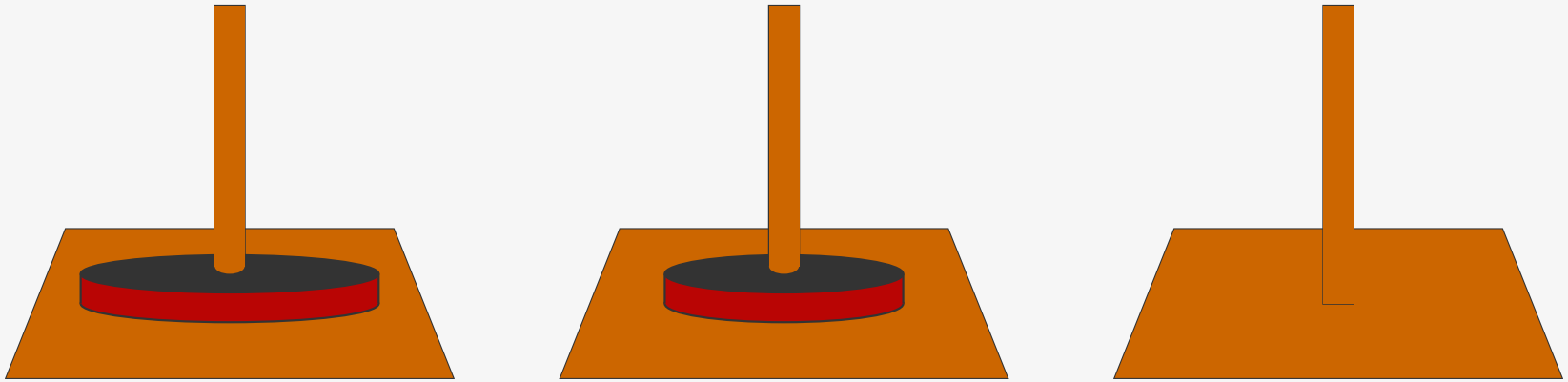
Regras:

- Apenas um disco pode ser movido de cada vez
- Um disco maior não pode ser colocado sobre um menor

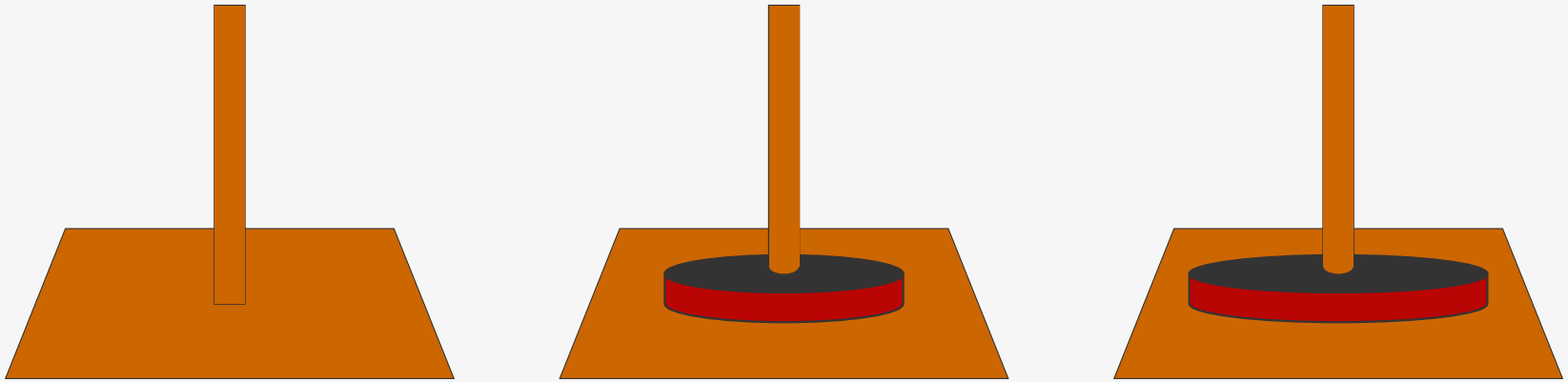
Torres de Hanói recursivo



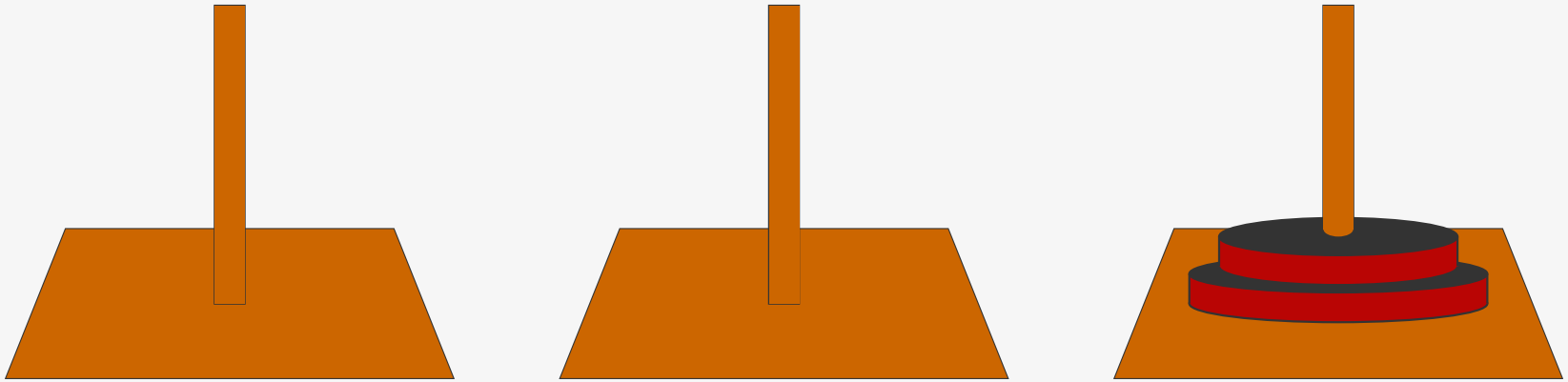
Torres de Hanói recursivo



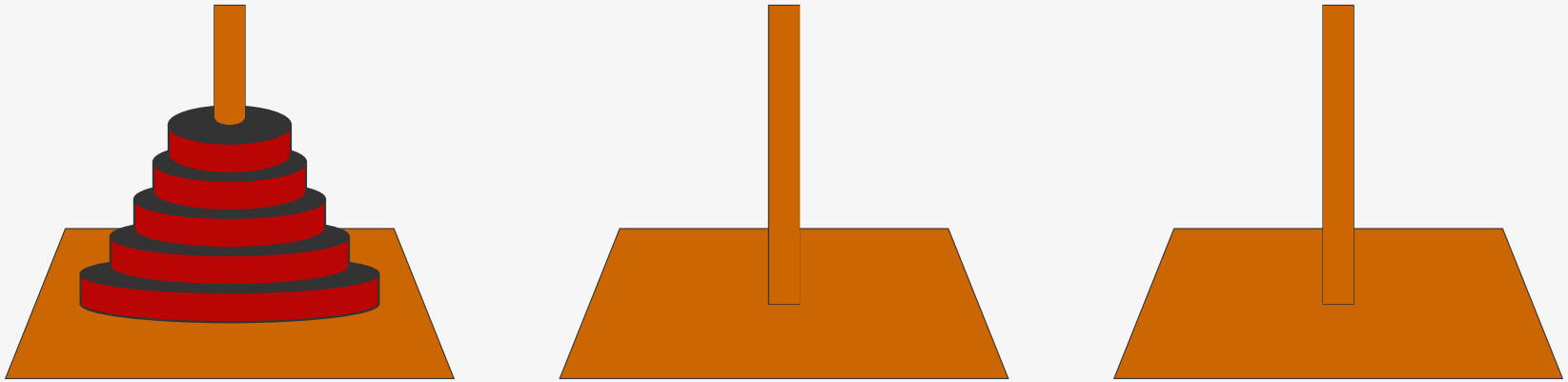
Torres de Hanói recursivo



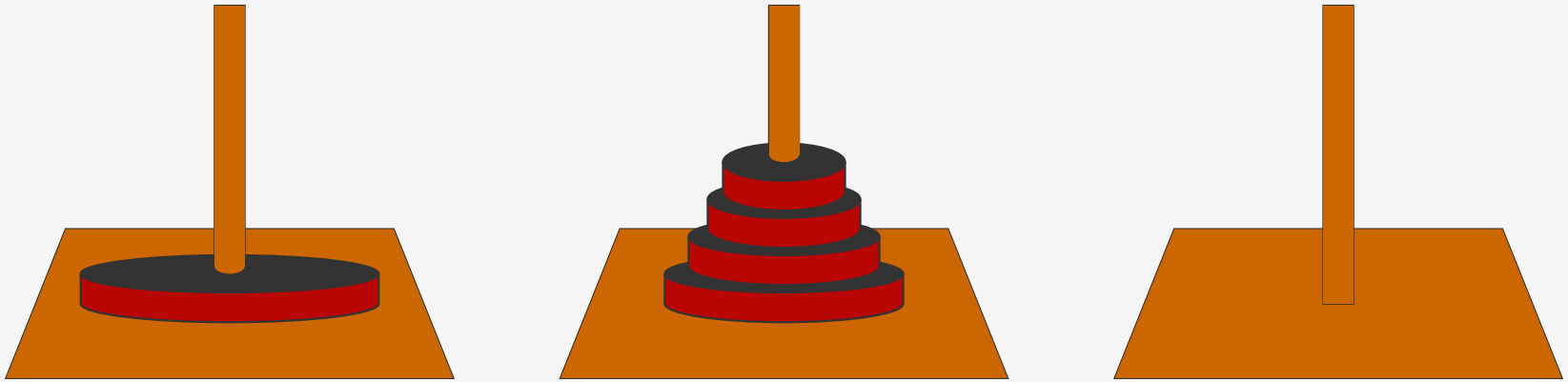
Torres de Hanói recursivo



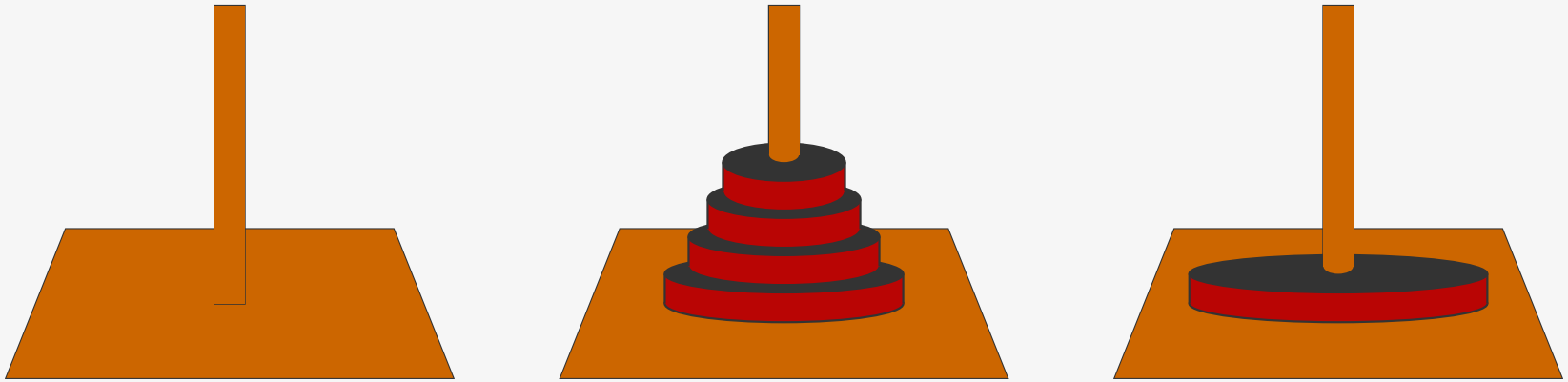
Torres de Hanói recursivo



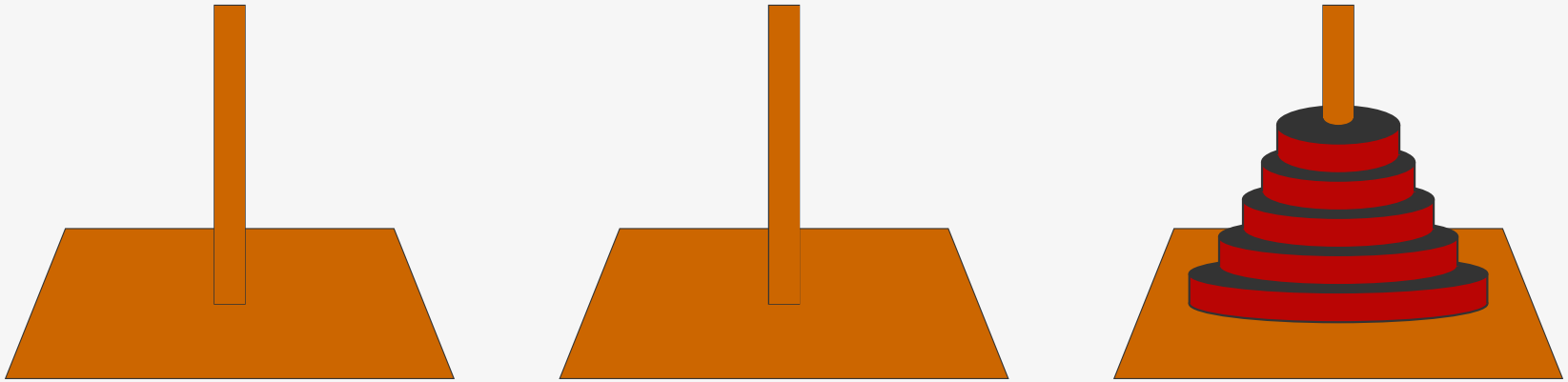
Torres de Hanói recursivo



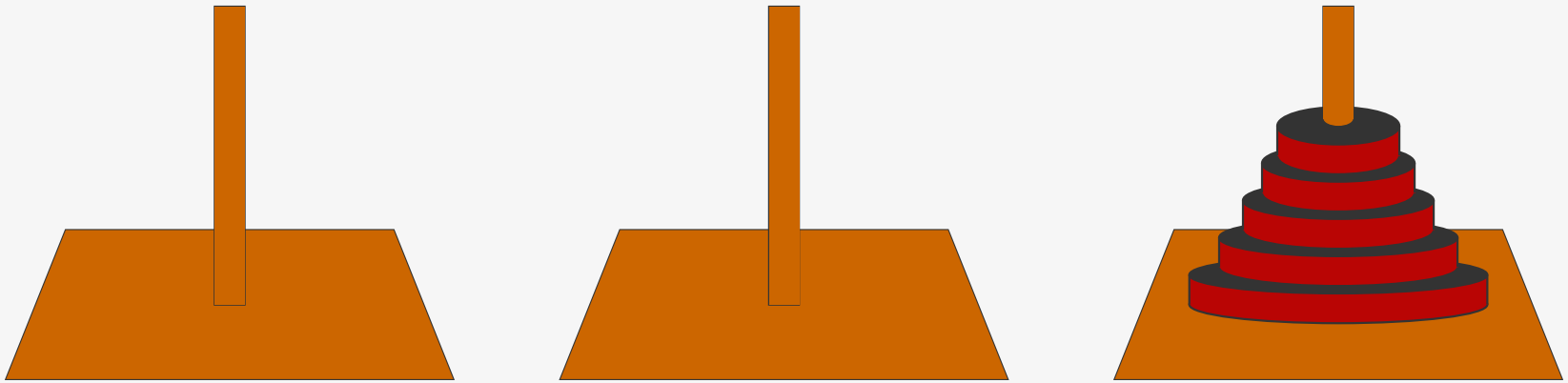
Torres de Hanói recursivo



Torres de Hanói recursivo

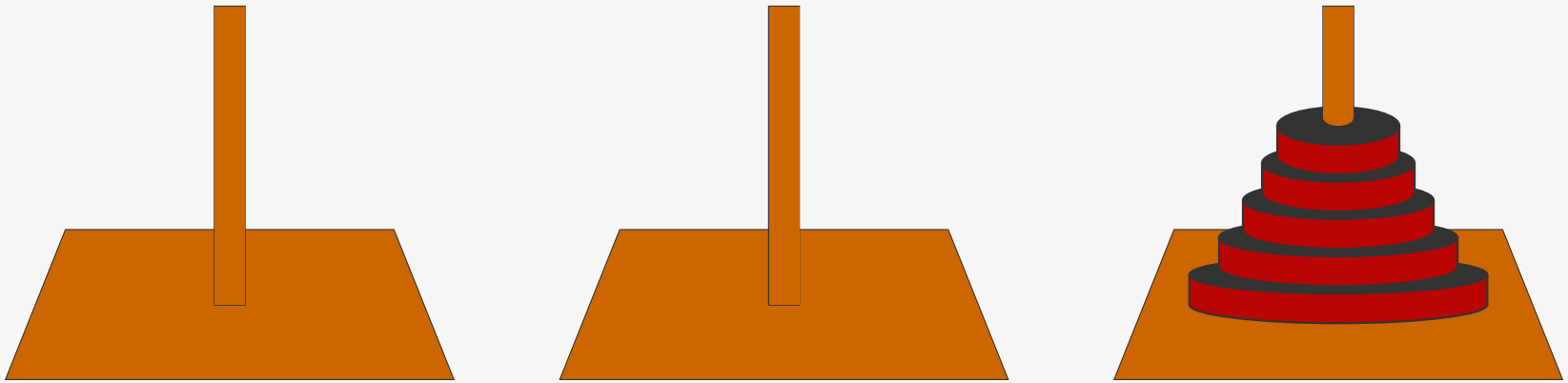


Torres de Hanói recursivo




```
1 void hanoi(int n, char orig, char dest, char aux) {
2   /* caso base: n == 0 - não faz  nada */
3   if (n > 0) {  /* caso geral */
4     hanoi(n-1, orig, aux, dest);
5     printf("move de %c para %c\\n", orig, dest);
6     hanoi(n-1, aux, dest, orig);
7   }
8 }
```

Torres de Hanói recursivo




```
1 void hanoi(int n, char orig, char dest, char aux) {
2   /* caso base: n == 0 - não faz  nada */
3   if (n > 0) {  /* caso geral */
4     hanoi(n-1, orig, aux, dest);
5     printf("move de %c para %c\\n", orig, dest);
6     hanoi(n-1, aux, dest, orig);
7   }
8 }
```

Chamada da função: `hanoi(n, 'a', 'c', 'b');`

Exercício - Calculando o Máximo

Escreva uma função recursiva que calcule o máximo de um vetor dado com n elementos

```
int maximo(int *v, int n)
```

Exercício - Coeficientes Binomiais

Escreva uma função recursiva que calcule, para $n \geq 0$ e $k \geq 0$

$$\binom{n}{k}$$

Relação de Stifel:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$