

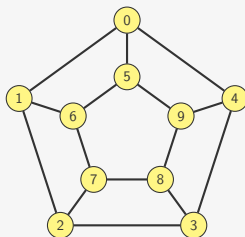
MC-202
Percurso em Grafos

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

2º semestre/2019

Caminhos em Grafos



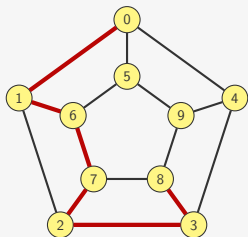
Um caminho de s para t em um grafo é:

- Uma sequência sem repetição de vértices vizinhos
- Começando em s e terminado em t

Por exemplo:

- $0, 1, 6, 7, 2, 3, 8$ é um caminho de 0 para 8
- $0, 5, 8$ não é um caminho de 0 para 8
- $0, 1, 2, 7, 6, 1, 2, 3, 8$ não é um caminho de 0 para 8

Caminhos em Grafos



Formalmente, um caminho de s para t em um grafo é:

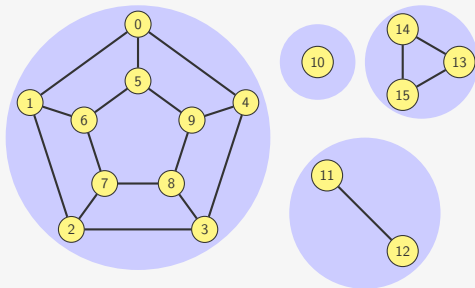
- Uma sequência de vértice v_0, v_1, \dots, v_k onde
- $v_0 = s$ e $v_k = t$
- $\{v_i, v_{i+1}\}$ é uma aresta para todo $0 \leq i \leq k - 1$
- $v_i \neq v_j$ para todo $0 \leq i < j \leq k$

k é o comprimento do caminho

- $k = 0$ se e somente se $s = t$

Componentes Conexas

Um grafo pode ter várias “partes”



Chamamos essas partes de **Componentes Conexas**

- Um par de vértices está na mesma componente se e somente se existe caminho entre eles
 - Não há caminho entre vértices de componentes distintas
- Um grafo **conexo** tem apenas uma componente conexa

Existe caminho entre s e t ?

Queremos saber se s e t estão na mesma componente conexa

Se estiverem, existe algum caminho de s até t



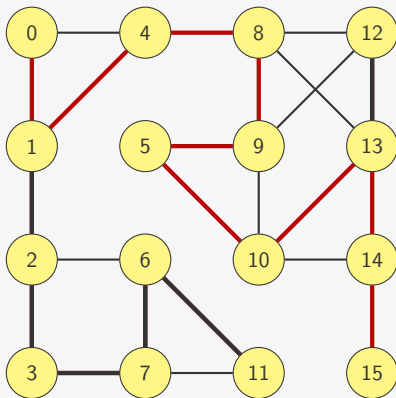
Se existe caminho e $s \neq t$, existe um segundo vértice v_1

- E v_1 é vizinho de s
- Então, ou $v_1 = t$, ou existe um terceiro vértice v_2
 - E v_2 é vizinho de v_1
- E assim por diante...

A dificuldade é acertar qual vizinho v_1 de s devemos usar...

- Solução: testar todos!

Exemplo - Existe caminho de 0 até 15?



Essa é uma **busca em profundidade**:

- Vá o máximo possível em uma direção
- Se não encontrarmos o vértice, volte o mínimo possível
- E pegue um novo caminho por um vértice não visitado

Implementação (com Matriz de Adjacências)

```
1 int existe_caminho(p_grafo g, int s, int t) {
2     int encontrou, i, *visitado = malloc(g->n * sizeof(int));
3     for (i = 0; i < g->n; i++)
4         visitado[i] = 0;
5     encontrou = busca_rec(g, visitado, s, t);
6     free(visitado);
7     return encontrou;
8 }
```

```
1 int busca_rec(p_grafo g, int *visitado, int v, int t) {
2     int w;
3     if (v == t)
4         return 1; /*sempre existe caminho de t para t*/
5     visitado[v] = 1;
6     for (w = 0; w < g->n; w++)
7         if (g->adj[v][w] && !visitado[w])
8             if (busca_rec(g, visitado, w, t))
9                 return 1;
10    return 0;
11 }
```

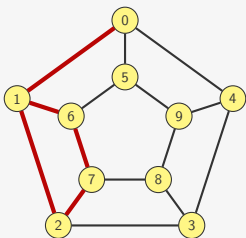
E se quisermos saber quais são as componentes conexas?

Componentes Conexas (Listas de Adjacência)

```
1 int * encontra_componentes(p_grafo g) {
2     int s, c = 0, *componentes = malloc(g->n * sizeof(int));
3     for (s = 0; s < g->n; s++)
4         componentes[s] = -1;
5     for (s = 0; s < g->n; s++)
6         if (componentes[s] == -1) {
7             visita_rec(g, componentes, c, s);
8             c++;
9         }
10    return componentes;
11 }
```

```
1 void visita_rec(p_grafo g, int *componentes, int comp, int v) {
2     p_no t;
3     componentes[v] = comp;
4     for (t = g->adj[v]; t != NULL; t = t->prox)
5         if (componentes[t->v] == -1)
6             visita_rec(g, componentes, comp, t->v);
7 }
```


Ciclos em Grafos



Um **ciclo** em um grafo é:

- Uma sequência de vértices vizinhos sem repetição exceto pelo primeiro e o último vértice que são idênticos

Por exemplo:

- **5, 6, 7, 8, 9, 5** é um ciclo
- **1, 2, 3** não é um ciclo
- **1, 2, 7, 6, 1** é um ciclo
- **1, 2, 7, 6, 1, 0** não é um ciclo (mas contém um ciclo)

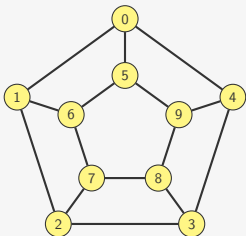
Árvores, Florestas e Subgrafos

Uma **árvore** é um grafo **conexo acíclico**

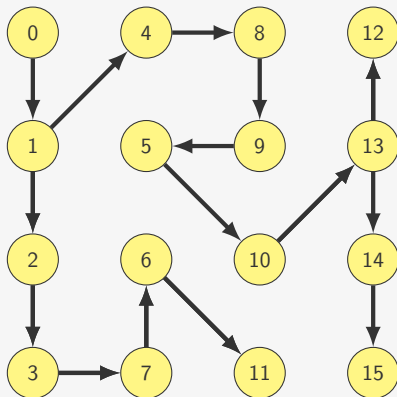
- Uma **floresta** é um grafo **acíclico**
- Suas componentes conexas são árvores

Um **subgrafo** é um grafo obtido a partir da remoção de vértices e arestas

- Podemos considerar também árvores/florestas que são subgrafos de um grafo dado



Caminhos de s para outros vértices da componente



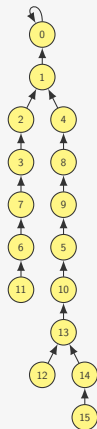
As arestas usadas formam uma árvore!

- Essa árvore dá um caminho de qualquer vértice até a raiz
- Basta ir subindo na árvore

Caminhos de s para outros vértices da componente

```
1 int * encontra_caminhos(p_grafo g, int s) {  
2     int i, *pai = malloc(g->n * sizeof(int));  
3     for (i = 0; i < g->n; i++)  
4         pai[i] = -1;  
5     busca_em_profundidade(g, pai, s, s);  
6     return pai;  
7 }
```

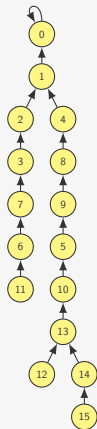
```
1 void busca_em_profundidade(p_grafo g, int *pai, int p, int v) {  
2     p_no t;  
3     pai[v] = p;  
4     for(t = g->adj[v]; t != NULL; t = t->prox)  
5         if (pai[t->v] == -1)  
6             busca_em_profundidade(g, pai, v, t->v);  
7 }
```



Imprimindo o caminho

```
1 void imprimi_caminho_reverso(int v, int *pai) {  
2     printf("%d", v);  
3     if(pai[v] != v)  
4         imprimi_caminho_reverso(pai[v], pai);  
5 }
```

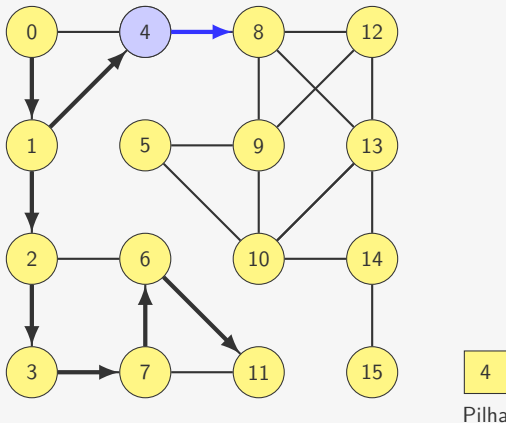
```
1 void imprimi_caminho(int v, int *pai) {  
2     if(pai[v] != v)  
3         imprimi_caminho(pai[v], pai);  
4     printf("%d", v);  
5 }
```



Busca em Profundidade usando uma Pilha

Podemos fazer uma busca em profundidade usando pilha:

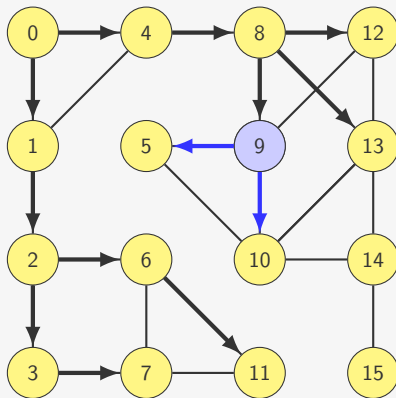
- A cada passo, desempilhamos um vértice não visitado
- E inserimos os seus vizinhos não visitados na pilha



Implementação

```
1 int * busca_em_profundidade(p_grafo g, int s) {
2     int w, v;
3     int *pai = malloc(g->n * sizeof(int));
4     int *visitado = malloc(g->n * sizeof(int));
5     p_pilha p = criar_pilha();
6     for (v = 0; v < g->n; v++) {
7         pai[v] = -1;
8         visitado[v] = 0;
9     }
10    empilhar(p,s);
11    pai[s] = s;
12    while(!pilha_vazia(p)) {
13        v = desempilhar(p);
14        visitado[v] = 1;
15        for (w = 0; w < g->n; w++)
16            if (g->adj[v][w] && !visitado[w]) {
17                pai[w] = v;
18                empilhar(p, w);
19            }
20    }
21    destroi_pilha(p);
22    free(visitado);
23    return pai;
24 }
```

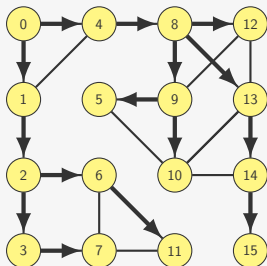
E se tivéssemos usando uma Fila?



Fila

12	13	7	11	5
----	----	---	----	---

E se tivéssemos usando uma Fila?



Usando uma fila, visitamos primeiro os vértices mais próximos

- Enfileiramos os vizinhos de **0** (que estão a distância **1**)
- Desenfileiramos um de seus vizinho
- E enfileiramos os vizinhos deste vértice
 - que estão a distância **2** de **0**
- Assim por diante...

A árvore nos dá um caminho mínimo entre raiz e vértice

Implementação da Busca em Largura

```
1 int * busca_em_largura(p_grafo g, int s) {
2     int w, v;
3     int *pai = malloc(g->n * sizeof(int));
4     int *visitado = malloc(g->n * sizeof(int));
5     p_fila f = criar_fila();
6     for (v = 0; v < g->n; v++) {
7         pai[v] = -1;
8         visitado[v] = 0;
9     }
10    enfileira(f,s);
11    pai[s] = s;
12    visitado[s] = 1;
13    while(!fila_vazia(f)) {
14        v = desenfileira(f);
15        for (w = 0; w < g->n; w++)
16            if (g->adj[v][w] && !visitado[w]) {
17                visitado[w] = 1; /*evita repetição na fila*/
18                pai[w] = v;
19                enfileira(f, w);
20            }
21    }
22    destroi_fila(f);
23    free(visitado);
24    return pai;
25 }
```

Tempo para fazer a busca

Quanto tempo demora para fazer uma busca?

- em profundidade ou em largura
- em um grafo com n vértices e m arestas

Suponha que inserir e remover de pilha/fila leva $O(1)$

- Podemos usar vetores ou listas ligadas

A busca percorre todos os vértices

- E empilha/enfileira seus vizinhos não visitados
- Se usarmos uma Matriz de Adjacências, leva $O(n^2)$

E se usarmos Listas de Adjacência?

- Cada aresta é analisada apenas duas vezes
- Gastamos tempo $O(\max\{n, m\}) = O(n + m)$
 - Linear no tamanho do grafo