Compartilhamento de Custos de Empacotamento*

Flávio K. Miyazawa[1], **Rafael C. S. Schouery**[1]

[1]Instituto de Computação - Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Av. Albert Einstein, 1251, CEP 13083-852, Campinas/SP - Brasil

{fkm,schouery}@ic.unicamp.br

Abstract. *In the bin packing problem, one desires to pack a set of items in bins while respecting the bins' capacities with the objective of minimizing the number of bins used. In this paper, we consider the problem of sharing the cost of packing between the participant agents.*

Resumo. *No Problema do Empacotamento, queremos empacotar um conjunto de itens em recipientes de forma a respeitar a capacidade dos recipientes e a minimizar o número de recipientes usados. Neste artigo, abordamos o problema de compartilhar o custo do empacotamento entre os agentes participantes.*

1. Introdução

No *Problema do Empacotamento*, queremos empacotar um conjunto I de n itens (onde a_i é o tamanho do item i) em *recipientes* de capacidade 1 de forma a respeitar a capacidade dos recipientes e a minimizar o número de recipientes usados. Aplicações do problema incluem armazenamento de cargas, escalonamento de tarefas computacionais, etc. Em muitos desses cenários, é natural considerar a participação de diversos agentes colaborando para empacotar seus itens, já que, de tal forma, é possível utilizar uma quantidade menor de recipientes do que se os agentes empacotassem seus itens individualmente.

Neste artigo consideramos o Problema do Empacotamento do ponto de vista da Teoria dos Jogos Cooperativos, considerando que cada item é controlado por um jogador diferente. De forma geral, considere que um conjunto $\mathcal{A}$ de jogadores desejam cooperar para realizar uma tarefa e que, se um conjunto $S \subseteq \mathcal{A}$ (uma *coalizão*) de jogadores cooperarem, então eles conseguem realizar a tarefa com um custo $c(S)$ (no nosso caso, o número de recipientes necessários para empacotar os itens do conjunto S). Assim, desejamos compartilhar o custo $c(\mathcal{A})$ entre os jogadores definindo um preço p_i para cada jogador $i \in \mathcal{A}$. Dizemos que a precificação $p\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ pertence ao *núcleo* se ela satisfaz as seguintes propriedades: $\sum_{i \in \mathcal{A}} p_i = c(\mathcal{A})$ (*orçamento balanceado*) e $\sum_{i \in S} p_i \leq c(S)$ para todo $S \subseteq \mathcal{A}$ (*propriedade do núcleo*). Isto é, os preços pagos pelos jogadores é igual ao custo de realizar a tarefa e, para qualquer coalizão S de jogadores, não é vantajoso para os jogadores em S empacotarem seus itens eles mesmos ao invés de realizar a tarefa com a *grande coalização* $\mathcal{A}$ dos jogadores.

Porém, para muitos jogos e, em particular, para muitas instâncias do Problema do Empacotamento, o núcleo é vazio. Assim, duas relaxações são consideradas na literatura. No *núcleo ε-taxado*, exigimos o orçamento balanceado mas relaxamos a propriedade do núcleo, exigindo apenas que $\sum_{i \in S} p_i \leq (1+\varepsilon)c(S)$ para todo $S \subseteq \mathcal{A}$. Isto é,

*Parcialmente financiado pelo processo nº 2013/21744-8, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) e processo nº 311499/2014-7, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq.)

consideramos que uma coalizão S teria uma taxação adicional de $\varepsilon c(S)$ no custo de realizar a tarefa apenas entre eles. Já no *núcleo γ-aproximado*, exigimos a propriedade do núcleo, mas relaxamos a exigência do orçamento balanceado, exigindo apenas que $\gamma c(\mathcal{A}) \leq \sum_{i \in \mathcal{A}} p_i \leq c(\mathcal{A})$, isto é, coletamos pagamentos do jogadores de forma a cobrir pelo menos uma fração γ do custo de realizar a tarefa. Neste artigo estamos interessados no conceito de núcleo γ-aproximado para o Problema do Empacotamento.

Trabalhos Relacionados [Faigle and Kern 1993] consideraram uma versão do Problema da Mochila Múltipla (porém, o denominaram como Problema do Empacotamento) e mostraram que, se todo item cabe em qualquer um dos recipientes, então o núcleo $1/2$-taxado é não-vazio. O resultado mais recente para tal problema é de [Qiu and Kern 2016] que consideram o caso onde todas as mochilas têm a mesma capacidade e mostraram que o núcleo $1/4$-taxado é não-vazio para toda instância do problema. Apesar da semelhança com o nosso trabalho, tais resultados consideram um problema e um conceito de relaxação de núcleo diferente dos considerados nesse artigo.

2. Resultados para o núcleo γ-aproximado

Teorema 2.1. Para todo $0 < \varepsilon \leq 1/2$, existe uma instância do Problema do Empacotamento com núcleo $(1/2 + \varepsilon)$-aproximado vazio.

Demonstração. Seja $k > 1/(2\varepsilon)$ um inteiro e considere a instância onde temos $k + 1$ itens de tamanho $1/k$. Note que $c(I) = 2$ e que, para toda coalizão $S \subsetneq I$, $c(S) = 1$. Portanto, para toda coalizão S de k itens, temos que $\sum_{i \in S} p_i \leq 1$. Somando sobre toda possível escolha de S, temos que $\sum_{i \in I} \binom{k}{k-1} p_i \leq \binom{k+1}{k}$. Portanto, $\sum_{i \in I} p_i \leq \frac{k+1}{k} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2k}\right) c(I) < \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) c(I)$, de onde segue que nenhuma precificação pertence ao núcleo $(1/2 + \varepsilon)$-aproximado. $\square$

Seja $\mathcal{A}$ um conjunto de jogadores e $c : 2^{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}$ uma função de custo, um *esquema de compartilhamento de custos* é uma função $\xi \colon \mathcal{A} \times 2^{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $S \subseteq \mathcal{A}$ e todo $i \notin S$, $\xi(i, S) = 0$. Dizemos que ξ é *γ-orçamento balanceado* se, para todo conjunto $S \subseteq \mathcal{A}$, temos que $\gamma c(S) \leq \sum_{i \in S} \xi(i, S) \leq c(S)$ e que ξ é *monotônico cruzado* se, para todo $S, T \subseteq \mathcal{A}$ e $i \in S$, $\xi(i, S) \geq \xi(i, S \cup T)$.

A existência de um esquema de compartilhamento de custos monotônico cruzado γ-orçamento balanceado ξ implica na existência de uma precificação no núcleo γ-aproximado (basta considerar a precificação dada por $\xi(., \mathcal{A})$).

Além disso, no cénario onde um leiloeiro decide quais jogadores terão seus itens empacotados e o preço p_i a ser pago por cada jogador i de acordo com os lances submetido pelos jogadores, sendo que cada jogador i obtém um valor v_i por ter o seu item empacotado, obtendo utilidade $v_i q_i - p_i$ onde q_i é uma variável indicadora se i é escolhido ou não, um resultado de [Moulin 1999] mostra que a existência de tal ξ implica na existência de um mecanismo à prova de estratégia de grupos γ-orçamento balanceado. Isto é, se o conjunto vencedor é S, então $\gamma c(S) \leq \sum_{i \in S} p_i \leq c(S)$ e nenhuma coalizão, ao relatar lances diferentes de seus reais valores dados por v, é tal que pelo menos um jogador obtém uma utilidade maior do que a obtida ao relatar o seu real valor e os outros jogadores obtém pelo menos a mesma utilidade do que a obtida ao relatar o seu real valor.

Teorema 2.2. Existe um esquema de compartilhamento de custos monotônico cruzado $1/2$-orçamento balanceado para o Problema do Empacotamento.

Demonstração. Considere o esquema de compartilhamento de custos ξ onde, para um conjunto $S \subseteq I$ e $i \in S$, temos que se $\sum_{i \in S} a_i \leq 1$, então $\xi(i, S) = a_i/(\sum_{j \in S} a_j)$ e, caso contrário, $\xi(i, S) = a_i$. Como é fácil ver que ξ é monotônico cruzado, basta então provar que ξ é $1/2$-orçamento balanceado.

Para um conjunto S, se $c(S) = 1$, então $\sum_{i \in S} \xi(i, S) = 1$. Se $c(S) \geq 2$, considere uma solução ótima do Problema do Empacotamento com instância S e seja δ o peso mínimo de um recipiente em tal solução. Se $\delta \geq 1/2$, então $\sum_{i \in S} \xi(i, S) \geq c(S)/2$. Caso contrário, então todo recipiente exceto o de peso mínimo tem peso maior do que $1 - \delta$ e, portanto, $\sum_{i \in S} \xi(i, S) = \sum_{i \in S} a_i \geq (1 - \delta)(c(S) - 1) + \delta \geq \frac{1}{2}(c(S) - 1) + \frac{1}{2} = c(S)/2$. Por outro lado, é claro que $\sum_{i \in S} \xi(i, S) \leq c(S)$, já que as somas dos pesos dos itens de uma instância do Problema do Empacotamento é um limitante inferior para o custo de uma solução ótima. Assim, ξ é $1/2$-orçamento balanceado. $\square$

3. Resultados para o núcleo γ-aproximado assintótico

No projeto de algoritmos de aproximação para o Problema do Empacotamento é usual considerarmos o conceito de *razão de aproximação assintótica*, onde dizemos um algoritmo A tem razão de aproximação assintótica α quando $\lim_{OPT(I) \to \infty} A(I)/OPT(I) \leq \alpha$, onde, para uma instância I, $A(I)$ é o valor da solução encontrada pelo algoritmo A e $\mathrm{OPT}(I)$ é o valor de uma solução ótima.

Inspirados nesta definição, introduzimos o conceito de *núcleo assintoticamente γ-aproximado*. Uma precificação p está no núcleo assintoticamente γ-aproximado se, além de satisfazer a propriedade de núcleo, temos que $\lim_{c(I) \to \infty} \sum_{i \in \mathcal{A}} p_i / c(I) \geq \gamma$. No caso do Problema do Empacotamento, o preço pago pelos jogadores tende a γ vezes o número de recipientes usados em uma solução ótima quando tal número tende ao infinito. De forma semelhante, definimos um esquema de compartilhamento de custos γ-assintoticamente orçamento balanceado.

Note agora que, no caso do Problema do Empacotamento, se $\mathcal{P}$ é a família de conjuntos de itens que podem ser empacotado em um único recipiente, a propriedade do núcleo pode ser substituída pela restrição que $\sum_{i \in P} p_i \leq 1$ para todo $P \in \mathcal{P}$. Assim, podemos considerar o seguinte programação linear (DGG) para encontrar uma precificação com a propriedade de núcleo que maximize a soma dos preços: $z^* = \max\{\sum_{i \in I} p_i \colon \sum_{i \in P} p_i \leq 1, \forall P \subseteq \mathcal{P} \wedge p_i \geq 0, \forall i \in I\}$.

De fato, (DGG) é o programa linear dual da relaxação linear do modelo de programação inteira de [Gilmore and Gomory 1961] para o Problema do Empacotamento. Como mostrado por [Karmarkar and Karp 1982], $c(I) \leq \lceil z^* \rceil + O(\log^2 c(I))$ e, apesar do problema da separação associado ser NP-difícil, podemos, para todo δ constante, encontrar uma solução p de (DGG) em tempo polinomial tal que $\sum_{i \in I} p_i \geq z^* - \delta$. Assim, existe uma precificação no núcleo assintoticamente 1-aproximado que pode ser encontrada em tempo polinomial (para δ constante). Além disso, caso a conjectura de [Scheithauer and Terno 1997] que afirma que $c(I) \leq \lceil z^* \rceil + 1$ for verdadeira, então para todo δ seria possível computar uma precificação em tempo polinomial que deixa de pagar por no máximo $2 + \delta$ recipientes em relação a uma solução ótima.

Porém, não é claro como utilizar tal programa linear para obter um esquema de precificação monotônico cruzado que mantenha estas garantias em relação ao orçamento. Por exemplo, se temos 6 itens com tamanhos 0.1, 0.6, 0.6, 0.3, 0.1 e 0.4, então a única solução ótima para o subconjunto 0.1, 0.6 e 0.6 é tal que o primeiro item tem preço 0. Porém, para o conjunto completo de itens, toda solução onde o preço do primeiro item é 0 não é ótima.

Teorema 3.1. Existe um esquema de precificação monotônico cruzado 0.591-assintoticamente orçamento balanceado para o Problema do Empacotamento.

Demonstração. Seja $M \geq 12$ um inteiro e I uma instância do Problema do Empacotamento. Considere o algoritmo $\mathrm{HARMONIC}_M$ [Lee and Lee 1985] que empacota os itens de forma que apenas itens do mesmo tipo fiquem num mesmo recipiente, onde um item i tem tipo k para $1 \leq k < M$ se $1/(k+1) < a_i \leq 1/k$ e tipo M se $a_i \leq 1/M$. Assim, dizemos que um recipiente é do tipo k se os itens empacotados nele são do tipo k e dizemos que um recipiente do tipo k está cheio para $1 \leq k < M$ se ele tem k itens e para $k = M$ se o espaço restante do recipiente é menor do que $1/M$. A solução encontrada pelo algoritmo $\mathrm{HARMONIC}_M$ com entrada S utiliza $\mathrm{SOL}(S)$ recipientes, onde $\mathrm{SOL}(S) \leq \sum_{j=1}^{M} m_j(S) + M - 1$ e $m_j(S)$, para $1 \leq j \leq M$, é o número de recipientes cheios do tipo j. Considere agora a seguinte função peso $g\colon I \to \mathbb{R}_+$ onde, para um item i de tipo k com $1 \leq k < M$, $g_i = 1/k$ e para um item i de tipo M, $g_i = Ma_i/(M-1)$. Note que todo recipiente cheio tem peso pelo menos 1. Segue que $\sum_{j=1}^{M} m_j(S) \leq \sum_{i \in S} g_i$.

Definimos o preço de um item i como $p_i = g_i/\alpha$, onde $\alpha = 1.692$. Como provado [Lee and Lee 1985], para qualquer conjunto T que pode ser empacotado em um recipiente temos que $\sum_{i \in T} g_i \leq \alpha$ e, portanto, p satisfaz a propriedade do núcleo. Assim, $c(S) \leq \mathrm{SOL}(S) \leq \sum_{j=1}^{M} m_j(S) + M - 1 \leq \sum_{i \in S} g_i + M - 1 = \alpha \sum_{i \in S} p_i + M - 1$, de onde o resultado segue. $\square$

Referências

Faigle, U. and Kern, W. (1993). On some approximately balanced combinatorial cooperative games. *Zeitschrift für Operations Research*, 38(2):141–152.

Gilmore, P. C. and Gomory, R. E. (1961). A linear programming approach to the cutting-stock problem. *Operations Research*, 9(6):849–859.

Karmarkar, N. and Karp, R. M. (1982). An efficient approximation scheme for the one-dimensional bin-packing problem. In *23rd Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 312–320.

Lee, C. C. and Lee, D. T. (1985). A simple on-line bin-packing algorithm. *Journal of the ACM*, 32(3):562–572.

Moulin, H. (1999). Incremental cost sharing: Characterization by coalition strategy-proofness. *Social Choice and Welfare*, 16(2):279–320.

Qiu, X. and Kern, W. (2016). Approximate core allocations and integrality gap for the bin packing game. *Theoretical Computer Science*, 627:26 – 35.

Scheithauer, G. and Terno, J. (1997). Theoretical investigations on the modified integer round-up property for the one-dimensional cutting stock problem. *Operations Research Letters*, 20(2):93–100.