Projeto e Análise de Algoritmos

Demonstrações e princípio da indução

Lehilton Pedrosa

Primeiro Semestre de 2023

Técnicas de demonstração

Demonstração direta

A demonstração direta de uma implicação $p \Rightarrow q$ é uma sequência de passos lógicos

$$p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow p_n \Rightarrow q,$$

que resultam, por transitividade, na implicação desejada.

- Cada passo da demonstração é um axioma ou um teorema demonstrado previamente.

Exemplo

Prove que $\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$.

Demonstração direta

A demonstração direta de uma implicação $p \Rightarrow q$ é uma sequência de passos lógicos

$$p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow p_n \Rightarrow q,$$

que resultam, por transitividade, na implicação desejada.

- Cada passo da demonstração é um axioma ou um teorema demonstrado previamente.

Exemplo

Prove que $\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$.

Demonstração direta

A demonstração direta de uma implicação $p \Rightarrow q$ é uma sequência de passos lógicos

$$p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow p_n \Rightarrow q,$$

que resultam, por transitividade, na implicação desejada.

- Cada passo da demonstração é um axioma ou um teorema demonstrado previamente.

Exemplo

Prove que $\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$.

Demonstração pela contrapositiva

A contrapositiva de $p \Rightarrow q$ é $\neg q \Rightarrow \neg p$.

- A contrapositiva é equivalente à implicação original.
- Demonstrar $\neg q \Rightarrow \neg p$ implica em $p \Rightarrow q$ e vice-versa.
- É útil quando é mais fácil demonstrar a contrapositiva.
- Para demonstrarmos a contrapositiva de uma implicação, podemos utilizar qualquer técnica de demonstração.

Exemplo

Prove que se $2 \mid 3m$, então $2 \mid m$.

Demonstração pela contrapositiva

A contrapositiva de $p \Rightarrow q$ é $\neg q \Rightarrow \neg p$.

- A contrapositiva é equivalente à implicação original.
- Demonstrar $\neg q \Rightarrow \neg p$ implica em $p \Rightarrow q$ e vice-versa.
- É útil quando é mais fácil demonstrar a contrapositiva.
- Para demonstrarmos a contrapositiva de uma implicação, podemos utilizar qualquer técnica de demonstração.

Exemplo

Prove que se $2 \mid 3m$, então $2 \mid m$.

Demonstração pela contrapositiva

A contrapositiva de $p \Rightarrow q$ é $\neg q \Rightarrow \neg p$.

- A contrapositiva é equivalente à implicação original.
- Demonstrar $\neg q \Rightarrow \neg p$ implica em $p \Rightarrow q$ e vice-versa.
- É útil quando é mais fácil demonstrar a contrapositiva.
- Para demonstrarmos a contrapositiva de uma implicação, podemos utilizar qualquer técnica de demonstração.

Exemplo

Prove que se $2 \mid 3m$, então $2 \mid m$.

Demonstração pela contrapositiva

A contrapositiva de $p \Rightarrow q$ é $\neg q \Rightarrow \neg p$.

- A contrapositiva é equivalente à implicação original.
- Demonstrar $\neg q \Rightarrow \neg p$ implica em $p \Rightarrow q$ e vice-versa.
- É útil quando é mais fácil demonstrar a contrapositiva.
- Para demonstrarmos a contrapositiva de uma implicação, podemos utilizar qualquer técnica de demonstração.

Exemplo

Prove que se $2 \mid 3m$, então $2 \mid m$.

Demonstração pela contrapositiva

A contrapositiva de $p \Rightarrow q$ é $\neg q \Rightarrow \neg p$.

- A contrapositiva é equivalente à implicação original.
- Demonstrar $\neg q \Rightarrow \neg p$ implica em $p \Rightarrow q$ e vice-versa.
- É útil quando é mais fácil demonstrar a contrapositiva.
- Para demonstrarmos a contrapositiva de uma implicação, podemos utilizar qualquer técnica de demonstração.

Exemplo

Prove que se $2 \mid 3m$, então $2 \mid m$.

Demonstração pela contrapositiva

A contrapositiva de $p \Rightarrow q$ é $\neg q \Rightarrow \neg p$.

- A contrapositiva é equivalente à implicação original.
- Demonstrar $\neg q \Rightarrow \neg p$ implica em $p \Rightarrow q$ e vice-versa.
- É útil quando é mais fácil demonstrar a contrapositiva.
- Para demonstrarmos a contrapositiva de uma implicação, podemos utilizar qualquer técnica de demonstração.

Exemplo

Prove que se $2 \mid 3m$, então $2 \mid m$.

Demonstração por contradição

A demonstração por contradição supõe que a afirmação a ser demonstrada é falsa e obtém uma conclusão contraditória.

- A contradição obtida implica que a suposição é falsa.
- Portanto, a afirmação é verdadeira.
- A negação de $p \Rightarrow q$ corresponde a $p \wedge \neg q$.

Exemplo

Prove que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração por contradição

A demonstração por contradição supõe que a afirmação a ser demonstrada é falsa e obtém uma conclusão contraditória.

- A contradição obtida implica que a suposição é falsa.
- Portanto, a afirmação é verdadeira.
- A negação de $p \Rightarrow q$ corresponde a $p \wedge \neg q$.

Exemplo

Prove que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração por contradição

A demonstração por contradição supõe que a afirmação a ser demonstrada é falsa e obtém uma conclusão contraditória.

- A contradição obtida implica que a suposição é falsa.
- Portanto, a afirmação é verdadeira.
- A negação de $p \Rightarrow q$ corresponde a $p \wedge \neg q$.

Exemplo

Prove que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração por contradição

A demonstração por contradição supõe que a afirmação a ser demonstrada é falsa e obtém uma conclusão contraditória.

- A contradição obtida implica que a suposição é falsa.
- Portanto, a afirmação é verdadeira.
- A negação de $p \Rightarrow q$ corresponde a $p \wedge \neg q$.

Exemplo

Prove que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração por contradição

A demonstração por contradição supõe que a afirmação a ser demonstrada é falsa e obtém uma conclusão contraditória.

- A contradição obtida implica que a suposição é falsa.
- Portanto, a afirmação é verdadeira.
- A negação de $p \Rightarrow q$ corresponde a $p \wedge \neg q$.

Exemplo

Prove que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração por casos

Na demonstração por casos, particionamos as possibilidades em um conjunto de casos e demonstramos cada um deles.

- O número de casos é normalmente finito.
- Cada caso é demonstrado usando qualquer técnica.

Exemplo

Provar que a soma de dois inteiros x e y de mesma paridade é sempre par.

Demonstração por casos

Na demonstração por casos, particionamos as possibilidades em um conjunto de casos e demonstramos cada um deles.

- O número de casos é normalmente finito.
- Cada caso é demonstrado usando qualquer técnica.

Exemplo

Provar que a soma de dois inteiros x e y de mesma paridade é sempre par.

Demonstração por casos

Na demonstração por casos, particionamos as possibilidades em um conjunto de casos e demonstramos cada um deles.

- O número de casos é normalmente finito.
- Cada caso é demonstrado usando qualquer técnica.

Exemplo

Provar que a soma de dois inteiros x e y de mesma paridade é sempre par.

Demonstração por casos

Na demonstração por casos, particionamos as possibilidades em um conjunto de casos e demonstramos cada um deles.

- O número de casos é normalmente finito.
- Cada caso é demonstrado usando qualquer técnica.

Exemplo

Provar que a soma de dois inteiros x e y de mesma paridade é sempre par.

Princípio da indução

Demonstração por indução

Usando o princípio da indução, demonstramos uma afirmação $P(n)$ que depende de um parâmetro natural n.

- Demonstramos $P(n)$ para todos os valores de n.
- Quebramos a demonstração em duas partes.

1. Caso básico
    - consideramos $n = 1$
    - demonstramos $P(n)$
2. Caso geral
    - consideramos $n > 1$
    - **hipótese da indução:** supomos que $P(n-1)$ vale
    - **passo da indução:** demonstramos $P(n)$ usando a hipótese

Exemplo

Prove que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

Demonstração por indução

Usando o princípio da indução, demonstramos uma afirmação $P(n)$ que depende de um parâmetro natural n.

- Demonstramos $P(n)$ para todos os valores de n.
- Quebramos a demonstração em duas partes.

1. Caso básico
   - consideramos $n = 1$
   - demonstramos $P(n)$
2. Caso geral
   - consideramos $n > 1$
   - **hipótese da indução:** supomos que $P(n-1)$ vale
   - **passo da indução:** demonstramos $P(n)$ usando a hipótese

Exemplo

Prove que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

Demonstração por indução

Usando o princípio da indução, demonstramos uma afirmação $P(n)$ que depende de um parâmetro natural n.

- Demonstramos $P(n)$ para todos os valores de n.
- Quebramos a demonstração em duas partes.

1. Caso básico
   - consideramos $n = 1$
   - demonstramos $P(n)$
2. Caso geral
   - consideramos $n > 1$
   - **hipótese da indução:** supomos que $P(n-1)$ vale
   - **passo da indução:** demonstramos $P(n)$ usando a hipótese

Exemplo

Prove que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

Demonstração por indução

Usando o princípio da indução, demonstramos uma afirmação $P(n)$ que depende de um parâmetro natural n.

- Demonstramos $P(n)$ para todos os valores de n.
- Quebramos a demonstração em duas partes.

1. Caso básico
    - consideramos $n = 1$
    - demonstramos $P(n)$
2. Caso geral
    - consideramos $n > 1$
    - **hipótese da indução:** supomos que $P(n-1)$ vale
    - **passo da indução:** demonstramos $P(n)$ usando a hipótese

Exemplo

Prove que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

Demonstração por indução

Usando o princípio da indução, demonstramos uma afirmação $P(n)$ que depende de um parâmetro natural n.

- Demonstramos $P(n)$ para todos os valores de n.
- Quebramos a demonstração em duas partes.

1. Caso básico
   - consideramos $n = 1$
   - demonstramos $P(n)$
2. Caso geral
   - consideramos $n > 1$
   - **hipótese da indução:** supomos que $P(n-1)$ vale
   - **passo da indução:** demonstramos $P(n)$ usando a hipótese

Exemplo

Prove que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

Demonstração por indução

Usando o princípio da indução, demonstramos uma afirmação $P(n)$ que depende de um parâmetro natural n.

- Demonstramos $P(n)$ para todos os valores de n.
- Quebramos a demonstração em duas partes.

1. Caso básico
   - consideramos $n = 1$
   - demonstramos $P(n)$
2. Caso geral
   - consideramos $n > 1$
   - **hipótese da indução:** supomos que $P(n-1)$ vale
   - **passo da indução:** demonstramos $P(n)$ usando a hipótese

Exemplo

Prove que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

Demonstração por indução

Usando o princípio da indução, demonstramos uma afirmação $P(n)$ que depende de um parâmetro natural n.

- Demonstramos $P(n)$ para todos os valores de n.
- Quebramos a demonstração em duas partes.

1. Caso básico
   - consideramos $n = 1$
   - demonstramos $P(n)$
2. Caso geral
   - consideramos $n > 1$
   - **hipótese da indução:** supomos que $P(n-1)$ vale
   - **passo da indução:** demonstramos $P(n)$ usando a hipótese

Exemplo

Prove que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

Demonstração por indução

Usando o princípio da indução, demonstramos uma afirmação $P(n)$ que depende de um parâmetro natural n.

- Demonstramos $P(n)$ para todos os valores de n.
- Quebramos a demonstração em duas partes.

1. Caso básico
   - consideramos $n = 1$
   - demonstramos $P(n)$
2. Caso geral
   - consideramos $n > 1$
   - **hipótese da indução:** supomos que $P(n-1)$ vale
   - **passo da indução:** demonstramos $P(n)$ usando a hipótese

Exemplo

Prove que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

Demonstração por indução

Usando o princípio da indução, demonstramos uma afirmação $P(n)$ que depende de um parâmetro natural n.

- Demonstramos $P(n)$ para todos os valores de n.
- Quebramos a demonstração em duas partes.

1. Caso básico
   - consideramos $n = 1$
   - demonstramos $P(n)$
2. Caso geral
   - consideramos $n > 1$
   - **hipótese da indução:** supomos que $P(n-1)$ vale
   - **passo da indução:** demonstramos $P(n)$ usando a hipótese

Exemplo

Prove que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

Demonstração por indução

Usando o princípio da indução, demonstramos uma afirmação $P(n)$ que depende de um parâmetro natural n.

- Demonstramos $P(n)$ para todos os valores de n.
- Quebramos a demonstração em duas partes.

1. Caso básico
   - consideramos $n = 1$
   - demonstramos $P(n)$
2. Caso geral
   - consideramos $n > 1$
   - **hipótese da indução:** supomos que $P(n-1)$ vale
   - **passo da indução:** demonstramos $P(n)$ usando a hipótese

Exemplo

Prove que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

Demonstração por indução

Usando o princípio da indução, demonstramos uma afirmação $P(n)$ que depende de um parâmetro natural n.

- Demonstramos $P(n)$ para todos os valores de n.
- Quebramos a demonstração em duas partes.

1. Caso básico
   - consideramos $n = 1$
   - demonstramos $P(n)$
2. Caso geral
   - consideramos $n > 1$
   - **hipótese da indução:** supomos que $P(n-1)$ vale
   - **passo da indução:** demonstramos $P(n)$ usando a hipótese

Exemplo

Prove que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

Demonstração por indução alternativa

Uma forma equivalente:

1. Caso básico
   - consideramos $n = 1$
   - demonstramos $P(1)$
2. Caso geral
   - consideramos $n \geq 1$
   - supomos que $P(n)$ vale
   - demonstramos $P(n+1)$

Exemplo

Prove que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

Demonstração por indução alternativa

Uma forma equivalente:

1. Caso básico
   - consideramos $n = 1$
   - demonstramos $P(1)$
2. Caso geral
   - consideramos $n \geq 1$
   - supomos que $P(n)$ vale
   - demonstramos $P(n+1)$

Exemplo

Prove que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

Demonstração por indução alternativa

Uma forma equivalente:

1. Caso básico
   - consideramos $n = 1$
   - demonstramos $P(1)$
2. Caso geral
   - consideramos $n \geq 1$
   - supomos que $P(n)$ vale
   - demonstramos $P(n+1)$

Exemplo

Prove que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

Demonstração por indução alternativa

Uma forma equivalente:

1. Caso básico
   - consideramos $n = 1$
   - demonstramos $P(1)$
2. Caso geral
   - consideramos $n \geq 1$
   - supomos que $P(n)$ vale
   - demonstramos $P(n + 1)$

Exemplo

Prove que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

Demonstração por indução alternativa

Uma forma equivalente:

1. Caso básico
   - consideramos $n = 1$
   - demonstramos $P(1)$
2. Caso geral
   - consideramos $n \geq 1$
   - supomos que $P(n)$ vale
   - demonstramos $P(n+1)$

Exemplo

Prove que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

Demonstração por indução alternativa

Uma forma equivalente:

1. Caso básico
   - consideramos $n = 1$
   - demonstramos $P(1)$
2. Caso geral
   - consideramos $n \geq 1$
   - supomos que $P(n)$ vale
   - demonstramos $P(n+1)$

Exemplo

Prove que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

Demonstração por indução alternativa

Uma forma equivalente:

1. Caso básico
   - consideramos $n = 1$
   - demonstramos $P(1)$
2. Caso geral
   - consideramos $n \geq 1$
   - supomos que $P(n)$ vale
   - demonstramos $P(n+1)$

Exemplo

Prove que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

Demonstração por indução alternativa

Uma forma equivalente:

1. Caso básico
   - consideramos $n = 1$
   - demonstramos $P(1)$
2. Caso geral
   - consideramos $n \geq 1$
   - supomos que $P(n)$ vale
   - demonstramos $P(n+1)$

Exemplo

Prove que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

Demonstração por indução alternativa

Uma forma equivalente:

1. Caso básico
   - consideramos $n = 1$
   - demonstramos $P(1)$
2. Caso geral
   - consideramos $n \geq 1$
   - supomos que $P(n)$ vale
   - demonstramos $P(n+1)$

Exemplo

Prove que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

Fortalecendo a hipótese

Algumas vezes é útil supor que a hipótese vale para todos os casos anteriores.

1. Caso básico
   - consideramos $n = 1$
   - demonstramos $P(n)$
2. Caso geral
   - consideramos $n > 1$
   - supomos que $P(k)$ vale para todo $1 \leq k \leq n - 1$
   - demonstramos $P(n)$

Exemplo

Prove que todo inteiro n pode ser escrito como a soma de diferentes potências de 2.

Fortalecendo a hipótese

Algumas vezes é útil supor que a hipótese vale para todos os casos anteriores.

1. Caso básico
    - consideramos $n = 1$
    - demonstramos $P(n)$
2. Caso geral
    - consideramos $n > 1$
    - supomos que $P(k)$ vale para todo $1 \leq k \leq n - 1$
    - demonstramos $P(n)$

Exemplo

Prove que todo inteiro n pode ser escrito como a soma de diferentes potências de 2.

Fortalecendo a hipótese

Algumas vezes é útil supor que a hipótese vale para todos os casos anteriores.

1. Caso básico
   - consideramos $n = 1$
   - demonstramos $P(n)$
2. Caso geral
   - consideramos $n > 1$
   - supomos que $P(k)$ vale para todo $1 \leq k \leq n-1$
   - demonstramos $P(n)$

Exemplo

Prove que todo inteiro n pode ser escrito como a soma de diferentes potências de 2.

Fortalecendo a hipótese

Algumas vezes é útil supor que a hipótese vale para todos os casos anteriores.

1. Caso básico
   - consideramos $n = 1$
   - demonstramos $P(n)$
2. Caso geral
   - consideramos $n > 1$
   - supomos que $P(k)$ vale para todo $1 \le k \le n - 1$
   - demonstramos $P(n)$

Exemplo

Prove que todo inteiro n pode ser escrito como a soma de diferentes potências de 2.

Fortalecendo a hipótese

Algumas vezes é útil supor que a hipótese vale para todos os casos anteriores.

1. Caso básico
   - consideramos $n = 1$
   - demonstramos $P(n)$
2. Caso geral
   - consideramos $n > 1$
   - supomos que $P(k)$ vale para todo $1 \leq k \leq n - 1$
   - demonstramos $P(n)$

Exemplo

Prove que todo inteiro n pode ser escrito como a soma de diferentes potências de 2.

Fortalecendo a hipótese

Algumas vezes é útil supor que a hipótese vale para todos os casos anteriores.

1. Caso básico
   - consideramos $n = 1$
   - demonstramos $P(n)$
2. Caso geral
   - consideramos $n > 1$
   - supomos que $P(k)$ vale para todo $1 \leq k \leq n - 1$
   - demonstramos $P(n)$

Exemplo

Prove que todo inteiro n pode ser escrito como a soma de diferentes potências de 2.

Fortalecendo a hipótese

Algumas vezes é útil supor que a hipótese vale para todos os casos anteriores.

1. Caso básico
   - consideramos $n = 1$
   - demonstramos $P(n)$
2. Caso geral
   - consideramos $n > 1$
   - supomos que $P(k)$ vale para todo $1 \leq k \leq n - 1$
   - demonstramos $P(n)$

Exemplo

Prove que todo inteiro n pode ser escrito como a soma de diferentes potências de 2.

Fortalecendo a hipótese

Algumas vezes é útil supor que a hipótese vale para todos os casos anteriores.

1. Caso básico
   - consideramos $n = 1$
   - demonstramos $P(n)$
2. Caso geral
   - consideramos $n > 1$
   - supomos que $P(k)$ vale para todo $1 \leq k \leq n - 1$
   - demonstramos $P(n)$

Exemplo

Prove que todo inteiro n pode ser escrito como a soma de diferentes potências de 2.

Fortalecendo a hipótese

Algumas vezes é útil supor que a hipótese vale para todos os casos anteriores.

1. Caso básico
   - consideramos $n = 1$
   - demonstramos $P(n)$
2. Caso geral
   - consideramos $n > 1$
   - supomos que $P(k)$ vale para todo $1 \leq k \leq n - 1$
   - demonstramos $P(n)$

Exemplo

Prove que todo inteiro n pode ser escrito como a soma de diferentes potências de 2.

Indução a partir de um ponto

Às vezes queremos provar uma afirmação $P(n)$ apenas para $n \geq n_0$ para algum n_0.

1. Caso básico
   - consideramos $n = n_0$
   - demonstramos $P(n)$
2. Caso geral
   - consideramos $n > n_0$
   - supomos que $P(k)$ vale para todo $n_0 \leq k \leq n-1$
   - demonstramos $P(n)$ usando a hipótese

Exemplo

Prove que todo inteiro $n \geq 2$ pode ser fatorado como um produto de primos.

Indução a partir de um ponto

Às vezes queremos provar uma afirmação $P(n)$ apenas para $n \geq n_0$ para algum n_0.

1. Caso básico
   - consideramos $n = n_0$
   - demonstramos $P(n)$
2. Caso geral
   - consideramos $n > n_0$
   - supomos que $P(k)$ vale para todo $n_0 \leq k \leq n-1$
   - demonstramos $P(n)$ usando a hipótese

Exemplo

Prove que todo inteiro $n \geq 2$ pode ser fatorado como um produto de primos.

Indução a partir de um ponto

Às vezes queremos provar uma afirmação $P(n)$ apenas para $n \geq n_0$ para algum n_0.

1. Caso básico
   - consideramos $n = n_0$
   - demonstramos $P(n)$
2. Caso geral
   - consideramos $n > n_0$
   - supomos que $P(k)$ vale para todo $n_0 \leq k \leq n - 1$
   - demonstramos $P(n)$ usando a hipótese

Exemplo

Prove que todo inteiro $n \geq 2$ pode ser fatorado como um produto de primos.

Indução a partir de um ponto

Às vezes queremos provar uma afirmação $P(n)$ apenas para $n \geq n_0$ para algum n_0.

1. Caso básico
   - consideramos $n = n_0$
   - demonstramos $P(n)$
2. Caso geral
   - consideramos $n > n_0$
   - supomos que $P(k)$ vale para todo $n_0 \leq k \leq n-1$
   - demonstramos $P(n)$ usando a hipótese

Exemplo

Prove que todo inteiro $n \geq 2$ pode ser fatorado como um produto de primos.

Indução a partir de um ponto

Às vezes queremos provar uma afirmação $P(n)$ apenas para $n \geq n_0$ para algum n_0.

1. Caso básico
   - consideramos $n = n_0$
   - demonstramos $P(n)$
2. Caso geral
   - consideramos $n > n_0$
   - supomos que $P(k)$ vale para todo $n_0 \leq k \leq n-1$
   - demonstramos $P(n)$ usando a hipótese

Exemplo

Prove que todo inteiro $n \geq 2$ pode ser fatorado como um produto de primos.

Indução a partir de um ponto

Às vezes queremos provar uma afirmação $P(n)$ apenas para $n \geq n_0$ para algum n_0.

1. Caso básico
   - consideramos $n = n_0$
   - demonstramos $P(n)$
2. Caso geral
   - consideramos $n > n_0$
   - supomos que $P(k)$ vale para todo $n_0 \leq k \leq n-1$
   - demonstramos $P(n)$ usando a hipótese

Exemplo

Prove que todo inteiro $n \geq 2$ pode ser fatorado como um produto de primos.

Indução a partir de um ponto

Às vezes queremos provar uma afirmação $P(n)$ apenas para $n \geq n_0$ para algum n_0.

1. Caso básico
   - consideramos $n = n_0$
   - demonstramos $P(n)$
2. Caso geral
   - consideramos $n > n_0$
   - supomos que $P(k)$ vale para todo $n_0 \leq k \leq n-1$
   - demonstramos $P(n)$ usando a hipótese

Exemplo

Prove que todo inteiro $n \geq 2$ pode ser fatorado como um produto de primos.

Indução a partir de um ponto

Às vezes queremos provar uma afirmação $P(n)$ apenas para $n \geq n_0$ para algum n_0.

1. Caso básico
   - consideramos $n = n_0$
   - demonstramos $P(n)$
2. Caso geral
   - consideramos $n > n_0$
   - supomos que $P(k)$ vale para todo $n_0 \leq k \leq n - 1$
   - demonstramos $P(n)$ usando a hipótese

Exemplo

Prove que todo inteiro $n \geq 2$ pode ser fatorado como um produto de primos.

Indução a partir de um ponto

Às vezes queremos provar uma afirmação $P(n)$ apenas para $n \geq n_0$ para algum n_0.

1. Caso básico
   - consideramos $n = n_0$
   - demonstramos $P(n)$
2. Caso geral
   - consideramos $n > n_0$
   - supomos que $P(k)$ vale para todo $n_0 \leq k \leq n-1$
   - demonstramos $P(n)$ usando a hipótese

Exemplo

Prove que todo inteiro $n \geq 2$ pode ser fatorado como um produto de primos.

Princípio da indução

- Exemplos de demonstração por indução

Exemplo 1

Exemplo

Demonstre que, para inteiros $x \geq 1$ e $n \geq 1$, o número $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$.

Demonstração:

1. No caso básico, considere $n = 1$
   - temos $x^n - 1 = x - 1$, que é divisível por $x - 1$
   - isso mostra a afirmação para $n = 1$

Exemplo 1

Exemplo

Demonstre que, para inteiros $x \geq 1$ e $n \geq 1$, o número $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$.

Demonstração:

1. No caso básico, considere $n = 1$
   - temos $x^n - 1 = x - 1$, que é divisível por $x - 1$
   - isso mostra a afirmação para $n = 1$

Exemplo 1

Exemplo

Demonstre que, para inteiros $x \geq 1$ e $n \geq 1$, o número $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$.

Demonstração:

1. No caso básico, considere $n = 1$
   - temos $x^n - 1 = x - 1$, que é divisível por $x - 1$
   - isso mostra a afirmação para $n = 1$

Exemplo 1

Exemplo

Demonstre que, para inteiros $x \geq 1$ e $n \geq 1$, o número $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$.

Demonstração:

1. No caso básico, considere $n = 1$
   - temos $x^n - 1 = x - 1$, que é divisível por $x - 1$
   - isso mostra a afirmação para $n = 1$

Exemplo 1

Exemplo

Demonstre que, para inteiros $x \geq 1$ e $n \geq 1$, o número $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$.

Demonstração:

1. No caso básico, considere $n = 1$
   - temos $x^n - 1 = x - 1$, que é divisível por $x - 1$
   - isso mostra a afirmação para $n = 1$

Exemplo 1 (cont)

2. No caso geral, considere $n \geq 1$
   - hipótese de indução:
     - suponha que $x - 1$ divide $x^n - 1$
   - passo de indução:
     - observe que $x^{n+1} - 1 = x(x^n - 1) + (x - 1)$.
     - pela h.i., $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$
     - então $x - 1$ divide o lado direito da equação
     - portanto $x - 1$ também divide $x^{n+1} - 1$

Exemplo 1 (cont)

2. No caso geral, considere $n \geq 1$
    - hipótese de indução:
        - suponha que $x - 1$ divide $x^n - 1$
    - passo de indução:
        - observe que $x^{n+1} - 1 = x(x^n - 1) + (x - 1)$.
        - pela h.i., $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$
        - então $x - 1$ divide o lado direito da equação
        - portanto $x - 1$ também divide $x^{n+1} - 1$

Exemplo 1 (cont)

2. No caso geral, considere $n \geq 1$
   - hipótese de indução:
     - suponha que $x - 1$ divide $x^n - 1$
   - passo de indução:
     - observe que $x^{n+1} - 1 = x(x^n - 1) + (x - 1)$.
     - pela h.i., $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$
     - então $x - 1$ divide o lado direito da equação
     - portanto $x - 1$ também divide $x^{n+1} - 1$

Exemplo 1 (cont)

2. No caso geral, considere $n \geq 1$
   - hipótese de indução:
     - suponha que $x - 1$ divide $x^n - 1$
   - passo de indução:
     - observe que $x^{n+1} - 1 = x(x^n - 1) + (x - 1)$.
     - pela h.i., $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$
     - então $x - 1$ divide o lado direito da equação
     - portanto $x - 1$ também divide $x^{n+1} - 1$

Exemplo 1 (cont)

2. No caso geral, considere $n \geq 1$
   - hipótese de indução:
     - suponha que $x - 1$ divide $x^n - 1$
   - passo de indução:
     - observe que $x^{n+1} - 1 = x(x^n - 1) + (x - 1)$.
     - pela h.i., $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$
     - então $x - 1$ divide o lado direito da equação
     - portanto $x - 1$ também divide $x^{n+1} - 1$

Exemplo 1 (cont)

2. No caso geral, considere $n \geq 1$
   - hipótese de indução:
     - suponha que $x - 1$ divide $x^n - 1$
   - passo de indução:
     - observe que $x^{n+1} - 1 = x(x^n - 1) + (x - 1)$.
     - pela h.i., $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$
     - então $x - 1$ divide o lado direito da equação
     - portanto $x - 1$ também divide $x^{n+1} - 1$

Exemplo 1 (cont)

2. No caso geral, considere $n \geq 1$
   - hipótese de indução:
     - suponha que $x - 1$ divide $x^n - 1$
   - passo de indução:
     - observe que $x^{n+1} - 1 = x(x^n - 1) + (x - 1)$.
     - pela h.i., $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$
     - então $x - 1$ divide o lado direito da equação
     - portanto $x - 1$ também divide $x^{n+1} - 1$

Exemplo 1 (cont)

2. No caso geral, considere $n \geq 1$
   - hipótese de indução:
     - suponha que $x - 1$ divide $x^n - 1$
   - passo de indução:
     - observe que $x^{n+1} - 1 = x(x^n - 1) + (x - 1)$.
     - pela h.i., $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$
     - então $x - 1$ divide o lado direito da equação
     - portanto $x - 1$ também divide $x^{n+1} - 1$

Exemplo 2

Exemplo

Demonstre que a equação

$$\sum_{i=1}^{n}(3+5i)=\frac{5n^2+11n}{2}$$

vale para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração:

- Para o caso básico, temos

$$\sum_{i=1}^{1}(3+5i)=8=\frac{5n^2+11n}{2}.$$

- Então a afirmação vale quando $n=1$.

Exemplo 2

Exemplo

Demonstre que a equação

$$\sum_{i=1}^{n}(3+5i) = \frac{5n^2+11n}{2}$$

vale para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração:

- Para o caso básico, temos

$$\sum_{i=1}^{1}(3+5i) = 8 = \frac{5n^2+11n}{2}.$$

- Então a afirmação vale quando $n = 1$.

Exemplo 2

Exemplo

Demonstre que a equação

$$\sum_{i=1}^{n}(3+5i) = \frac{5n^2+11n}{2}$$

vale para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração:

- Para o caso básico, temos

$$\sum_{i=1}^{1}(3+5i) = 8 = \frac{5n^2+11n}{2}.$$

- Então a afirmação vale quando $n = 1$.

Exemplo 2 (cont)

- Considere um número $n > 1$ fixo.
- Suponha que a equação valha para $n-1$.
- Vamos mostrar que a equação também vale para n.
- Desenvolvendo a soma,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(3+5i) &= \sum_{i=1}^{n-1}(3+5i) + (3+5n) \\
&= \frac{5(n-1)^2 + 11(n-1)}{2} + (3+5n) \qquad \text{(pela h.i.)} \\
&= \frac{5n^2 - 10n + 5 + 11n - 11}{2} + \frac{6+10n}{2} \\
&= \frac{5n^2 + 11n}{2},
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 (cont)

- Considere um número $n > 1$ fixo.
- Suponha que a equação valha para $n - 1$.
- Vamos mostrar que a equação também vale para n.
- Desenvolvendo a soma,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(3+5i) &= \sum_{i=1}^{n-1}(3+5i) + (3+5n) \\
&= \frac{5(n-1)^2 + 11(n-1)}{2} + (3+5n) \qquad \text{(pela h.i.)} \\
&= \frac{5n^2 - 10n + 5 + 11n - 11}{2} + \frac{6+10n}{2} \\
&= \frac{5n^2 + 11n}{2},
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 (cont)

- Considere um número $n > 1$ fixo.
- Suponha que a equação valha para $n-1$.
- Vamos mostrar que a equação também vale para n.
- Desenvolvendo a soma,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(3+5i) &= \sum_{i=1}^{n-1}(3+5i) + (3+5n) \\
&= \frac{5(n-1)^2 + 11(n-1)}{2} + (3+5n) \qquad \text{(pela h.i.)} \\
&= \frac{5n^2 - 10n + 5 + 11n - 11}{2} + \frac{6+10n}{2} \\
&= \frac{5n^2 + 11n}{2},
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 (cont)

- Considere um número $n > 1$ fixo.
- Suponha que a equação valha para $n - 1$.
- Vamos mostrar que a equação também vale para n.
- Desenvolvendo a soma,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(3+5i) &= \sum_{i=1}^{n-1}(3+5i) + (3+5n) \\
&= \frac{5(n-1)^2 + 11(n-1)}{2} + (3+5n) \qquad \text{(pela h.i.)} \\
&= \frac{5n^2 - 10n + 5 + 11n - 11}{2} + \frac{6+10n}{2} \\
&= \frac{5n^2 + 11n}{2}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 (cont)

- Considere um número $n > 1$ fixo.
- Suponha que a equação valha para $n - 1$.
- Vamos mostrar que a equação também vale para n.
- Desenvolvendo a soma,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(3+5i) &= \sum_{i=1}^{n-1}(3+5i) + (3+5n) \\
&= \frac{5(n-1)^2 + 11(n-1)}{2} + (3+5n) \qquad \text{(pela h.i.)} \\
&= \frac{5n^2 - 10n + 5 + 11n - 11}{2} + \frac{6+10n}{2} \\
&= \frac{5n^2 + 11n}{2}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 (cont)

- Considere um número $n > 1$ fixo.
- Suponha que a equação valha para $n-1$.
- Vamos mostrar que a equação também vale para n.
- Desenvolvendo a soma,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(3+5i) &= \sum_{i=1}^{n-1}(3+5i)+(3+5n) \\
&= \frac{5(n-1)^2+11(n-1)}{2}+(3+5n) \qquad \text{(pela h.i.)} \\
&= \frac{5n^2-10n+5+11n-11}{2}+\frac{6+10n}{2} \\
&= \frac{5n^2+11n}{2}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 (cont)

- Considere um número $n > 1$ fixo.
- Suponha que a equação valha para $n - 1$.
- Vamos mostrar que a equação também vale para n.
- Desenvolvendo a soma,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(3+5i) &= \sum_{i=1}^{n-1}(3+5i) + (3+5n) \\
&= \frac{5(n-1)^2 + 11(n-1)}{2} + (3+5n) \qquad \text{(pela h.i.)} \\
&= \frac{5n^2 - 10n + 5 + 11n - 11}{2} + \frac{6+10n}{2} \\
&= \frac{5n^2 + 11n}{2}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 (cont)

- Considere um número $n > 1$ fixo.
- Suponha que a equação valha para $n - 1$.
- Vamos mostrar que a equação também vale para n.
- Desenvolvendo a soma,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(3+5i) &= \sum_{i=1}^{n-1}(3+5i) + (3+5n) \\
&= \frac{5(n-1)^2 + 11(n-1)}{2} + (3+5n) \qquad \text{(pela h.i.)} \\
&= \frac{5n^2 - 10n + 5 + 11n - 11}{2} + \frac{6+10n}{2} \\
&= \frac{5n^2 + 11n}{2}.
\end{aligned}$$

Exemplo 3

Exemplo

Demonstre que a inequação

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

vale para todo natural n e real x tal que $(1 + x) > 0$.

Demonstração:

- Se $n = 1$, ambos os lados da inequação valem $1 + x$.
- Isso demonstra o caso básico.

Exemplo 3

Exemplo

Demonstre que a inequação

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

vale para todo natural n e real x tal que $(1+x) > 0$.

Demonstração:

- Se $n = 1$, ambos os lados da inequação valem $1+x$.
- Isso demonstra o caso básico.

Exemplo 3

Exemplo

Demonstre que a inequação

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

vale para todo natural n e real x tal que $(1+x) > 0$.

Demonstração:

- Se $n = 1$, ambos os lados da inequação valem $1 + x$.
- Isso demonstra o caso básico.

Exemplo 3

Exemplo

Demonstre que a inequação

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

vale para todo natural n e real x tal que $(1+x) > 0$.

Demonstração:

- Se $n = 1$, ambos os lados da inequação valem $1+x$.
- Isso demonstra o caso básico.

Exemplo 3 (cont)

- Considere $n \geq 1$ e suponha que a inequação vale para n.
- Desenvolvendo o lado esquerdo da inequação, temos

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\
&\geq (1+nx)(1+x) && \text{(pela h.i. e já que } (1+x)>0\text{)} \\
&= 1+(n+1)x+nx^2 \\
&\geq 1+(n+1)x. && \text{(já que } nx^2 \geq 0\text{)}
\end{aligned}$$

- Isso demonstra desigualdade para $n+1$.

Exemplo 3 (cont)

- Considere $n \geq 1$ e suponha que a inequação vale para n.
- Desenvolvendo o lado esquerdo da inequação, temos

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\
&\geq (1+nx)(1+x) \qquad \text{(pela h.i. e já que } (1+x) > 0) \\
&= 1 + (n+1)x + nx^2 \\
&\geq 1 + (n+1)x. \qquad \text{(já que } nx^2 \geq 0)
\end{aligned}
$$

- Isso demonstra desigualdade para $n+1$.

Exemplo 3 (cont)

- Considere $n \geq 1$ e suponha que a inequação vale para n.
- Desenvolvendo o lado esquerdo da inequação, temos

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\
&\geq (1+nx)(1+x) && \text{(pela h.i. e já que } (1+x) > 0) \\
&= 1+(n+1)x+nx^2 \\
&\geq 1+(n+1)x. && \text{(já que } nx^2 \geq 0)
\end{aligned}$$

- Isso demonstra desigualdade para $n+1$.

Exemplo 3 (cont)

- Considere $n \geq 1$ e suponha que a inequação vale para n.
- Desenvolvendo o lado esquerdo da inequação, temos

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\
&\geq (1+nx)(1+x) && \text{(pela h.i. e já que } (1+x) > 0) \\
&= 1 + (n+1)x + nx^2 \\
&\geq 1 + (n+1)x. && \text{(já que } nx^2 \geq 0)
\end{aligned}$$

- Isso demonstra desigualdade para $n+1$.

Exemplo 3 (cont)

- Considere $n \geq 1$ e suponha que a inequação vale para n.
- Desenvolvendo o lado esquerdo da inequação, temos

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\
&\geq (1+nx)(1+x) \qquad \text{(pela h.i. e já que } (1+x) > 0) \\
&= 1+(n+1)x+nx^2 \\
&\geq 1+(n+1)x. \qquad \text{(já que } nx^2 \geq 0)
\end{aligned}$$

- Isso demonstra desigualdade para $n+1$.

Exemplo 3 (cont)

- Considere $n \geq 1$ e suponha que a inequação vale para n.
- Desenvolvendo o lado esquerdo da inequação, temos

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\
&\geq (1+nx)(1+x) && \text{(pela h.i. e já que } (1+x) > 0\text{)} \\
&= 1 + (n+1)x + nx^2 \\
&\geq 1 + (n+1)x. && \text{(já que } nx^2 \geq 0\text{)}
\end{aligned}$$

- Isso demonstra desigualdade para $n+1$.

Exemplo 3 (cont)

- Considere $n \geq 1$ e suponha que a inequação vale para n.
- Desenvolvendo o lado esquerdo da inequação, temos

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\
&\geq (1+nx)(1+x) && \text{(pela h.i. e já que } (1+x) > 0) \\
&= 1 + (n+1)x + nx^2 \\
&\geq 1 + (n+1)x. && \text{(já que } nx^2 \geq 0)
\end{aligned}$$

- Isso demonstra desigualdade para $n+1$.

Exemplo 4

Um conjunto de retas está em posição geral no plano se

- não há retas paralelas e
- não existem três retas que interceptam o mesmo ponto.

Exemplo

Demonstre que o número T_n de regiões no plano criadas por n retas em posição geral é igual a

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Exemplo 4

Um conjunto de retas está em posição geral no plano se

- não há retas paralelas e
- não existem três retas que interceptam o mesmo ponto.

Exemplo

Demonstre que o número T_n de regiões no plano criadas por n retas em posição geral é igual a

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Exemplo 4

Um conjunto de retas está em posição geral no plano se

- não há retas paralelas e
- não existem três retas que interceptam o mesmo ponto.

Exemplo

Demonstre que o número T_n de regiões no plano criadas por n retas em posição geral é igual a

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Exemplo 4

Um conjunto de retas está em posição geral no plano se

- não há retas paralelas e
- não existem três retas que interceptam o mesmo ponto.

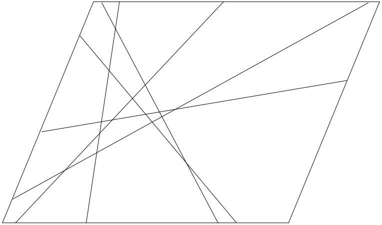
Exemplo

Demonstre que o número T_n de regiões no plano criadas por n retas em posição geral é igual a

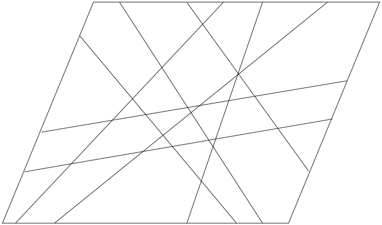
$$T_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Exemplo 4 (cont)

Alguns exemplos:



Em posição geral



Não estão em posição geral

Exemplo 4 (cont)

Ideia para a demonstração

- Vamos considerar n retas para as quais a fórmula vale.
- E verificar a fórmula quando adicionamos uma nova reta.

Demonstração:

- Quando $n = 1$, há apenas uma reta.
- Uma reta sozinha divide o plano em dois, então

$$T_1 = 2 = \frac{1(1+1)}{2} + 1.$$

- Isto conclui o caso básico.

Exemplo 4 (cont)

Ideia para a demonstração

- Vamos considerar n retas para as quais a fórmula vale.
- E verificar a fórmula quando adicionamos uma nova reta.

Demonstração:

- Quando $n = 1$, há apenas uma reta.
- Uma reta sozinha divide o plano em dois, então

$$T_1 = 2 = \frac{1(1+1)}{2} + 1.$$

- Isto conclui o caso básico.

Exemplo 4 (cont)

Ideia para a demonstração

- Vamos considerar n retas para as quais a fórmula vale.
- E verificar a fórmula quando adicionamos uma nova reta.

Demonstração:

- Quando $n = 1$, há apenas uma reta.
- Uma reta sozinha divide o plano em dois, então

$$T_1 = 2 = \frac{1(1+1)}{2} + 1.$$

- Isto conclui o caso básico.

Exemplo 4 (cont)

Ideia para a demonstração

- Vamos considerar n retas para as quais a fórmula vale.
- E verificar a fórmula quando adicionamos uma nova reta.

Demonstração:

- Quando $n = 1$, há apenas uma reta.
- Uma reta sozinha divide o plano em dois, então

$$T_1 = 2 = \frac{1(1+1)}{2} + 1.$$

- Isto conclui o caso básico.

Exemplo 4 (cont)

Ideia para a demonstração

- Vamos considerar n retas para as quais a fórmula vale.
- E verificar a fórmula quando adicionamos uma nova reta.

Demonstração:

- Quando $n = 1$, há apenas uma reta.
- Uma reta sozinha divide o plano em dois, então

$$T_1 = 2 = \frac{1(1+1)}{2} + 1.$$

- Isto conclui o caso básico.

Exemplo 4 (cont)

Ideia para a demonstração

- Vamos considerar n retas para as quais a fórmula vale.
- E verificar a fórmula quando adicionamos uma nova reta.

Demonstração:

- Quando $n = 1$, há apenas uma reta.
- Uma reta sozinha divide o plano em dois, então

$$T_1 = 2 = \frac{1(1+1)}{2} + 1.$$

- Isto conclui o caso básico.

Exemplo 4 (cont)

Ideia para a demonstração

- Vamos considerar n retas para as quais a fórmula vale.
- E verificar a fórmula quando adicionamos uma nova reta.

Demonstração:

- Quando $n = 1$, há apenas uma reta.
- Uma reta sozinha divide o plano em dois, então

$$T_1 = 2 = \frac{1(1+1)}{2} + 1.$$

- Isto conclui o caso básico.

Exemplo 4 (cont)

- Considere um número $n > 1$.
- Suponha que a fórmula vale para $n - 1$:

$$T_{n-1} = \frac{(n-1)n}{2} + 1.$$

- Vamos demonstrar que a fórmula também vale para n:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Exemplo 4 (cont)

- Considere um número $n > 1$.
- Suponha que a fórmula vale para $n-1$:

$$T_{n-1} = \frac{(n-1)n}{2} + 1.$$

- Vamos demonstrar que a fórmula também vale para n:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Exemplo 4 (cont)

- Considere um número $n > 1$.
- Suponha que a fórmula vale para $n - 1$:

$$T_{n-1} = \frac{(n-1)n}{2} + 1.$$

- Vamos demonstrar que a fórmula também vale para n:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Exemplo 4 (cont)

- Seja L um conjunto de n retas em posição geral.
- Remova uma reta r arbitrariamente de L.
- Obtemos um novo conjunto $L' = L \setminus \{r\}$.
- Note que L' é um conjunto de $n-1$ retas em posição geral.
- Pela h.i., sabemos que L' divide o plano em T_{n-1} partes.

Exemplo 4 (cont)

- Seja L um conjunto de n retas em posição geral.
- Remova uma reta r arbitrariamente de L.
- Obtemos um novo conjunto $L' = L \setminus \{r\}$.
- Note que L' é um conjunto de $n-1$ retas em posição geral.
- Pela h.i., sabemos que L' divide o plano em T_{n-1} partes.

Exemplo 4 (cont)

- Seja L um conjunto de n retas em posição geral.
- Remova uma reta r arbitrariamente de L.
- Obtemos um novo conjunto $L' = L \setminus \{r\}$.
- Note que L' é um conjunto de $n-1$ retas em posição geral.
- Pela h.i., sabemos que L' divide o plano em T_{n-1} partes.

Exemplo 4 (cont)

- Seja L um conjunto de n retas em posição geral.
- Remova uma reta r arbitrariamente de L.
- Obtemos um novo conjunto $L' = L \setminus \{r\}$.
- Note que L' é um conjunto de $n-1$ retas em posição geral.
- Pela h.i., sabemos que L' divide o plano em T_{n-1} partes.

Exemplo 4 (cont)

- Seja L um conjunto de n retas em posição geral.
- Remova uma reta r arbitrariamente de L.
- Obtemos um novo conjunto $L' = L \setminus \{r\}$.
- Note que L' é um conjunto de $n-1$ retas em posição geral.
- Pela h.i., sabemos que L' divide o plano em T_{n-1} partes.

Exemplo 4 (cont)

Qual o efeito de adicionar a reta r ao conjunto L'?

- a reta r intersecta as $n-1$ retas de L' em pontos distintos
- assim, de um extremo ao outro, ela cruza n regiões
- cada região cruzada é dividida em duas regiões menores
- ou seja, o número de regiões aumenta em n

Assim, o número de regiões definidas por L é

$$\begin{aligned} T_n &= T_{n-1} + n \\ &= \frac{(n-1)n}{2} + 1 + n && \text{(pela h.i.)} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + 1. \end{aligned}$$

Exemplo 4 (cont)

Qual o efeito de adicionar a reta r ao conjunto L'?

- a reta r intersecta as $n-1$ retas de L' em pontos distintos
- assim, de um extremo ao outro, ela cruza n regiões
- cada região cruzada é dividida em duas regiões menores
- ou seja, o número de regiões aumenta em n

Assim, o número de regiões definidas por L é

$$\begin{aligned} T_n &= T_{n-1} + n \\ &= \frac{(n-1)n}{2} + 1 + n && \text{(pela h.i.)} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + 1. \end{aligned}$$

Exemplo 4 (cont)

Qual o efeito de adicionar a reta r ao conjunto L'?

- a reta r intersecta as $n-1$ retas de L' em pontos distintos
- assim, de um extremo ao outro, ela cruza n regiões
- cada região cruzada é dividida em duas regiões menores
- ou seja, o número de regiões aumenta em n

Assim, o número de regiões definidas por L é

$$\begin{aligned} T_n &= T_{n-1} + n \\ &= \frac{(n-1)n}{2} + 1 + n && \text{(pela h.i.)} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + 1. \end{aligned}$$

Exemplo 4 (cont)

Qual o efeito de adicionar a reta r ao conjunto L'?

- a reta r intersecta as $n - 1$ retas de L' em pontos distintos
- assim, de um extremo ao outro, ela cruza n regiões
- cada região cruzada é dividida em duas regiões menores
- ou seja, o número de regiões aumenta em n

Assim, o número de regiões definidas por L é

$$\begin{aligned} T_n &= T_{n-1} + n \\ &= \frac{(n-1)n}{2} + 1 + n && \text{(pela h.i.)} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + 1. \end{aligned}$$

Exemplo 4 (cont)

Qual o efeito de adicionar a reta r ao conjunto L'?

- a reta r intersecta as $n-1$ retas de L' em pontos distintos
- assim, de um extremo ao outro, ela cruza n regiões
- cada região cruzada é dividida em duas regiões menores
- ou seja, o número de regiões aumenta em n

Assim, o número de regiões definidas por L é

$$\begin{aligned} T_n &= T_{n-1} + n \\ &= \frac{(n-1)n}{2} + 1 + n && \text{(pela h.i.)} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + 1. \end{aligned}$$

Exemplo 4 (cont)

Qual o efeito de adicionar a reta r ao conjunto L'?

- a reta r intersecta as $n-1$ retas de L' em pontos distintos
- assim, de um extremo ao outro, ela cruza n regiões
- cada região cruzada é dividida em duas regiões menores
- ou seja, o número de regiões aumenta em n

Assim, o número de regiões definidas por L é

$$\begin{aligned} T_n &= T_{n-1} + n \\ &= \frac{(n-1)n}{2} + 1 + n && \text{(pela h.i.)} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + 1. \end{aligned}$$

Exemplo 4 (cont)

Qual o efeito de adicionar a reta r ao conjunto L'?

- a reta r intersecta as $n-1$ retas de L' em pontos distintos
- assim, de um extremo ao outro, ela cruza n regiões
- cada região cruzada é dividida em duas regiões menores
- ou seja, o número de regiões aumenta em n

Assim, o número de regiões definidas por L é

$$
\begin{aligned}
T_n &= T_{n-1} + n \\
&= \frac{(n-1)n}{2} + 1 + n && \text{(pela h.i.)} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + 1.
\end{aligned}
$$

Exemplo 4 (cont)

Qual o efeito de adicionar a reta r ao conjunto L'?

- a reta r intersecta as $n-1$ retas de L' em pontos distintos
- assim, de um extremo ao outro, ela cruza n regiões
- cada região cruzada é dividida em duas regiões menores
- ou seja, o número de regiões aumenta em n

Assim, o número de regiões definidas por L é

$$
\begin{aligned}
T_n &= T_{n-1} + n \\
&= \frac{(n-1)n}{2} + 1 + n && \text{(pela h.i.)} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + 1.
\end{aligned}
$$

Exemplo 4 (cont)

Qual o efeito de adicionar a reta r ao conjunto L'?

- a reta r intersecta as $n-1$ retas de L' em pontos distintos
- assim, de um extremo ao outro, ela cruza n regiões
- cada região cruzada é dividida em duas regiões menores
- ou seja, o número de regiões aumenta em n

Assim, o número de regiões definidas por L é

$$
\begin{aligned}
T_n &= T_{n-1} + n \\
&= \frac{(n-1)n}{2} + 1 + n && \text{(pela h.i.)} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + 1.
\end{aligned}
$$

Exemplo 4 (cont)

Qual o efeito de adicionar a reta r ao conjunto L'?

- a reta r intersecta as $n-1$ retas de L' em pontos distintos
- assim, de um extremo ao outro, ela cruza n regiões
- cada região cruzada é dividida em duas regiões menores
- ou seja, o número de regiões aumenta em n

Assim, o número de regiões definidas por L é

$$\begin{aligned} T_n &= T_{n-1} + n \\ &= \frac{(n-1)n}{2} + 1 + n && \text{(pela h.i.)} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + 1. \end{aligned}$$

Exemplo 5

Algumas vezes temos que ter mais cuidado ao usar a hipótese da indução.

Exemplo

Demonstre que a série S_n definida abaixo satisfaz

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 1,$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração:

- Para $n = 1$, a inequação se reduz a $\frac{1}{2} < 1$, que é válida.
- Isso demonstra o caso básico.

Exemplo 5

Algumas vezes temos que ter mais cuidado ao usar a hipótese da indução.

Exemplo

Demonstre que a série S_n definida abaixo satisfaz

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 1,$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração:

- Para $n = 1$, a inequação se reduz a $\frac{1}{2} < 1$, que é válida.
- Isso demonstra o caso básico.

Exemplo 5

Algumas vezes temos que ter mais cuidado ao usar a hipótese da indução.

Exemplo

Demonstre que a série S_n definida abaixo satisfaz

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 1,$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração:

- Para $n = 1$, a inequação se reduz a $\frac{1}{2} < 1$, que é válida.
- Isso demonstra o caso básico.

Exemplo 5

Algumas vezes temos que ter mais cuidado ao usar a hipótese da indução.

Exemplo

Demonstre que a série S_n definida abaixo satisfaz

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 1,$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração:

- Para $n = 1$, a inequação se reduz a $\frac{1}{2} < 1$, que é válida.
- Isso demonstra o caso básico.

Exemplo 5

Algumas vezes temos que ter mais cuidado ao usar a hipótese da indução.

Exemplo

Demonstre que a série S_n definida abaixo satisfaz

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 1,$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração:

- Para $n = 1$, a inequação se reduz a $\frac{1}{2} < 1$, que é válida.
- Isso demonstra o caso básico.

Exemplo 5 (cont)

- Considere um número $n \geq 1$ e suponha que $S_n < 1$.
- Queremos mostrar que $S_{n+1} < 1$.

Primeira tentativa:

- Desenvolvemos S_{n+1} usando a definição

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2^{n+1}} < 1 + \frac{1}{2^{n+1}} \qquad \text{(pela h.i.)}$$

- Mas o lado direito já é maior do que 1!

Exemplo 5 (cont)

- Considere um número $n \geq 1$ e suponha que $S_n < 1$.
- Queremos mostrar que $S_{n+1} < 1$.

Primeira tentativa:

- Desenvolvemos S_{n+1} usando a definição

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2^{n+1}} < 1 + \frac{1}{2^{n+1}} \qquad \text{(pela h.i.)}$$

- Mas o lado direito já é maior do que 1!

Exemplo 5 (cont)

- Considere um número $n \geq 1$ e suponha que $S_n < 1$.
- Queremos mostrar que $S_{n+1} < 1$.

Primeira tentativa:

- Desenvolvemos S_{n+1} usando a definição

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2^{n+1}} < 1 + \frac{1}{2^{n+1}} \qquad \text{(pela h.i.)}$$

- Mas o lado direito já é maior do que 1!

Exemplo 5 (cont)

- Considere um número $n \geq 1$ e suponha que $S_n < 1$.
- Queremos mostrar que $S_{n+1} < 1$.

Primeira tentativa:

- Desenvolvemos S_{n+1} usando a definição

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2^{n+1}} < 1 + \frac{1}{2^{n+1}} \qquad \text{(pela h.i.)}$$

- Mas o lado direito já é maior do que 1!

Exemplo 5 (cont)

- Considere um número $n \geq 1$ e suponha que $S_n < 1$.
- Queremos mostrar que $S_{n+1} < 1$.

Primeira tentativa:

- Desenvolvemos S_{n+1} usando a definição

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2^{n+1}} < 1 + \frac{1}{2^{n+1}} \qquad \text{(pela h.i.)}$$

- Mas o lado direito já é maior do que 1!

Exemplo 5 (cont)

- Considere um número $n \geq 1$ e suponha que $S_n < 1$.
- Queremos mostrar que $S_{n+1} < 1$.

Primeira tentativa:

- Desenvolvemos S_{n+1} usando a definição

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2^{n+1}} < 1 + \frac{1}{2^{n+1}} \qquad \text{(pela h.i.)}$$

- Mas o lado direito já é maior do que 1!

Exemplo 5 (cont)

- Considere um número $n \geq 1$ e suponha que $S_n < 1$.
- Queremos mostrar que $S_{n+1} < 1$.

Primeira tentativa:

- Desenvolvemos S_{n+1} usando a definição

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2^{n+1}} < 1 + \frac{1}{2^{n+1}} \qquad \text{(pela h.i.)}$$

- Mas o lado direito já é maior do que 1!

Exemplo 5 (cont)

- Considere um número $n \geq 1$ e suponha que $S_n < 1$.
- Queremos mostrar que $S_{n+1} < 1$.

Primeira tentativa:

- Desenvolvemos S_{n+1} usando a definição

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2^{n+1}} < 1 + \frac{1}{2^{n+1}} \qquad \text{(pela h.i.)}$$

- Mas o lado direito já é maior do que 1!

Exemplo 5 (cont)

Podemos manipular S_{n+1} e usar a hipótese de outro jeito:

$$
\begin{aligned}
S_{n+1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&< \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1) && \text{(pela h.i.)} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Isto conclui a demonstração.

Exemplo 5 (cont)

Podemos manipular S_{n+1} e usar a hipótese de outro jeito:

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&< \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1) && \text{(pela h.i.)} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração.

Exemplo 5 (cont)

Podemos manipular S_{n+1} e usar a hipótese de outro jeito:

$$
\begin{aligned}
S_{n+1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&< \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1) && \text{(pela h.i.)} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Isto conclui a demonstração.

Exemplo 5 (cont)

Podemos manipular S_{n+1} e usar a hipótese de outro jeito:

$$
\begin{aligned}
S_{n+1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&< \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1) && \text{(pela h.i.)} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Isto conclui a demonstração.

Exemplo 5 (cont)

Podemos manipular S_{n+1} e usar a hipótese de outro jeito:

$$
\begin{aligned}
S_{n+1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n}}\right) \\
&< \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1) && \text{(pela h.i.)} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Isto conclui a demonstração.

Exemplo 5 (cont)

Podemos manipular S_{n+1} e usar a hipótese de outro jeito:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1) && \text{(pela h.i.)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração.

Exemplo 5 (cont)

Podemos manipular S_{n+1} e usar a hipótese de outro jeito:

$$
\begin{aligned}
S_{n+1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n}}\right) \\
&< \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1) && \text{(pela h.i.)} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Isto conclui a demonstração.

Indução reversa

Podemos usar indução para derivar o seguinte resultado.

Indução reversa

Considere uma afirmação $P(n)$ e suponha que

1. $P(n)$ vale para um subconjunto infinito de naturais e
2. se $P(n)$ vale para $n > 1$, então $P(n-1)$ também vale.

Então $P(n)$ vale para todo natural n.

Você consegue ver por que esse resultado vale?

Indução reversa

Podemos usar indução para derivar o seguinte resultado.

Indução reversa

Considere uma afirmação $P(n)$ e suponha que

1. $P(n)$ vale para um subconjunto infinito de naturais e
2. se $P(n)$ vale para $n > 1$, então $P(n-1)$ também vale.

Então $P(n)$ vale para todo natural n.

Você consegue ver por que esse resultado vale?

Indução reversa

Podemos usar indução para derivar o seguinte resultado.

Indução reversa

Considere uma afirmação $P(n)$ e suponha que

1. $P(n)$ vale para um subconjunto infinito de naturais e
2. se $P(n)$ vale para $n > 1$, então $P(n-1)$ também vale.

Então $P(n)$ vale para todo natural n.

Você consegue ver por que esse resultado vale?

Indução reversa

Podemos usar indução para derivar o seguinte resultado.

Indução reversa

Considere uma afirmação $P(n)$ e suponha que

1. $P(n)$ vale para um subconjunto infinito de naturais e
2. se $P(n)$ vale para $n > 1$, então $P(n-1)$ também vale.

Então $P(n)$ vale para todo natural n.

Você consegue ver por que esse resultado vale?

Indução reversa

Podemos usar indução para derivar o seguinte resultado.

Indução reversa

Considere uma afirmação $P(n)$ e suponha que

1. $P(n)$ vale para um subconjunto infinito de naturais e
2. se $P(n)$ vale para $n > 1$, então $P(n-1)$ também vale.

Então $P(n)$ vale para todo natural n.

Você consegue ver por que esse resultado vale?

Indução reversa

Podemos usar indução para derivar o seguinte resultado.

Indução reversa

Considere uma afirmação $P(n)$ e suponha que

1. $P(n)$ vale para um subconjunto infinito de naturais e
2. se $P(n)$ vale para $n > 1$, então $P(n-1)$ também vale.

Então $P(n)$ vale para todo natural n.

Você consegue ver por que esse resultado vale?

Exemplo 6

Exemplo

Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números reais positivos, então

$$(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Demonstração:

1. Primeiro, mostramos que vale para $n = 2^k$ para todo $k \geq 0$.
2. Depois, mostramos que, se vale n, também vale para $n - 1$.

Exemplo 6

Exemplo

Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números reais positivos, então

$$(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Demonstração:

1. Primeiro, mostramos que vale para $n = 2^k$ para todo $k \geq 0$.
2. Depois, mostramos que, se vale n, também vale para $n - 1$.

Exemplo 6

Exemplo

Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números reais positivos, então

$$(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Demonstração:

1. Primeiro, mostramos que vale para $n = 2^k$ para todo $k \geq 0$.
2. Depois, mostramos que, se vale n, também vale para $n - 1$.

Exemplo 6 (cont)

Lema 1

Considere um inteiro $k \geq 0$. Se $n = 2^k$, então o teorema vale.

Vamos mostrar por indução em k.

- Se $n = 2^0 = 1$, a inequação vale trivialmente.
- Se $n = 2^1 = 2$, a inequação vale, já que

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

pois

$$\begin{aligned}
\sqrt{x_1 x_2} \leq (x_1 + x_2)/2 \quad & \Leftrightarrow \\
x_1 x_2 \leq (x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2)/4 \quad & \Leftrightarrow \\
2x_1 x_2 \leq x_1^2 + x_2^2 \quad & \Leftrightarrow \\
0 \leq x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 \quad & \Leftrightarrow \\
0 \leq (x_1 - x_2)^2. &
\end{aligned}$$

Exemplo 6 (cont)

Lema 1

Considere um inteiro $k \geq 0$. Se $n = 2^k$, então o teorema vale.

Vamos mostrar por indução em k.

- Se $n = 2^0 = 1$, a inequação vale trivialmente.
- Se $n = 2^1 = 2$, a inequação vale, já que

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

pois

$$\begin{aligned}
\sqrt{x_1 x_2} \leq (x_1 + x_2)/2 & \quad \Leftrightarrow \\
x_1 x_2 \leq (x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2)/4 & \quad \Leftrightarrow \\
2x_1 x_2 \leq x_1^2 + x_2^2 & \quad \Leftrightarrow \\
0 \leq x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 & \quad \Leftrightarrow \\
0 \leq (x_1 - x_2)^2. &
\end{aligned}$$

Exemplo 6 (cont)

Lema 1

Considere um inteiro $k \geq 0$. Se $n = 2^k$, então o teorema vale.

Vamos mostrar por indução em k.

- Se $n = 2^0 = 1$, a inequação vale trivialmente.
- Se $n = 2^1 = 2$, a inequação vale, já que

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

pois

$$\begin{aligned}
\sqrt{x_1 x_2} \leq (x_1 + x_2)/2 \quad & \Leftrightarrow \\
x_1 x_2 \leq (x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2)/4 \quad & \Leftrightarrow \\
2x_1 x_2 \leq x_1^2 + x_2^2 \quad & \Leftrightarrow \\
0 \leq x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 \quad & \Leftrightarrow \\
0 \leq (x_1 - x_2)^2.
\end{aligned}$$

Exemplo 6 (cont)

Lema 1

Considere um inteiro $k \geq 0$. Se $n = 2^k$, então o teorema vale.

Vamos mostrar por indução em k.

- Se $n = 2^0 = 1$, a inequação vale trivialmente.
- Se $n = 2^1 = 2$, a inequação vale, já que

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

pois

$$\begin{aligned}
\sqrt{x_1 x_2} &\leq (x_1 + x_2)/2 & \Leftrightarrow \\
x_1 x_2 &\leq (x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2)/4 & \Leftrightarrow \\
2x_1 x_2 &\leq x_1^2 + x_2^2 & \Leftrightarrow \\
0 &\leq x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 & \Leftrightarrow \\
0 &\leq (x_1 - x_2)^2.
\end{aligned}$$

Exemplo 6 (cont)

Lema 1

Considere um inteiro $k \geq 0$. Se $n = 2^k$, então o teorema vale.

Vamos mostrar por indução em k.

- Se $n = 2^0 = 1$, a inequação vale trivialmente.
- Se $n = 2^1 = 2$, a inequação vale, já que

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

pois

$$\begin{aligned}
\sqrt{x_1 x_2} &\leq (x_1 + x_2)/2 && \Leftrightarrow \\
x_1 x_2 &\leq (x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2)/4 && \Leftrightarrow \\
2x_1 x_2 &\leq x_1^2 + x_2^2 && \Leftrightarrow \\
0 &\leq x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 && \Leftrightarrow \\
0 &\leq (x_1 - x_2)^2.
\end{aligned}$$

Exemplo 6 (cont)

Lema 1

Considere um inteiro $k \geq 0$. Se $n = 2^k$, então o teorema vale.

Vamos mostrar por indução em k.

- Se $n = 2^0 = 1$, a inequação vale trivialmente.
- Se $n = 2^1 = 2$, a inequação vale, já que

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

pois

$$\begin{aligned}
\sqrt{x_1 x_2} &\leq (x_1 + x_2)/2 && \Leftrightarrow \\
x_1 x_2 &\leq (x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2)/4 && \Leftrightarrow \\
2x_1 x_2 &\leq x_1^2 + x_2^2 && \Leftrightarrow \\
0 &\leq x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 && \Leftrightarrow \\
0 &\leq (x_1 - x_2)^2.
\end{aligned}$$

Exemplo 6 (cont)

Lema 1

Considere um inteiro $k \geq 0$. Se $n = 2^k$, então o teorema vale.

Vamos mostrar por indução em k.

- Se $n = 2^0 = 1$, a inequação vale trivialmente.
- Se $n = 2^1 = 2$, a inequação vale, já que

  $$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

  pois

  $$\begin{aligned}
  \sqrt{x_1 x_2} &\leq (x_1 + x_2)/2 & \Leftrightarrow \\
  x_1 x_2 &\leq (x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2)/4 & \Leftrightarrow \\
  2x_1 x_2 &\leq x_1^2 + x_2^2 & \Leftrightarrow \\
  0 &\leq x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 & \Leftrightarrow \\
  0 &\leq (x_1 - x_2)^2.
  \end{aligned}$$

Exemplo 6 (cont)

Lema 1

Considere um inteiro $k \geq 0$. Se $n = 2^k$, então o teorema vale.

Vamos mostrar por indução em k.

- Se $n = 2^0 = 1$, a inequação vale trivialmente.
- Se $n = 2^1 = 2$, a inequação vale, já que

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

pois

$$\begin{aligned}
\sqrt{x_1 x_2} &\leq (x_1 + x_2)/2 && \Leftrightarrow \\
x_1 x_2 &\leq (x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2)/4 && \Leftrightarrow \\
2x_1 x_2 &\leq x_1^2 + x_2^2 && \Leftrightarrow \\
0 &\leq x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 && \Leftrightarrow \\
0 &\leq (x_1 - x_2)^2.
\end{aligned}$$

Exemplo 6 (cont)

Lema 1

Considere um inteiro $k \geq 0$. Se $n = 2^k$, então o teorema vale.

Vamos mostrar por indução em k.

- Se $n = 2^0 = 1$, a inequação vale trivialmente.
- Se $n = 2^1 = 2$, a inequação vale, já que

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

pois

$$\begin{aligned}
\sqrt{x_1 x_2} &\leq (x_1 + x_2)/2 & \Leftrightarrow \\
x_1 x_2 &\leq (x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2)/4 & \Leftrightarrow \\
2x_1 x_2 &\leq x_1^2 + x_2^2 & \Leftrightarrow \\
0 &\leq x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 & \Leftrightarrow \\
0 &\leq (x_1 - x_2)^2.
\end{aligned}$$

Exemplo 6 (cont)

Lema 1

Considere um inteiro $k \geq 0$. Se $n = 2^k$, então o teorema vale.

Vamos mostrar por indução em k.

- Se $n = 2^0 = 1$, a inequação vale trivialmente.
- Se $n = 2^1 = 2$, a inequação vale, já que

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

pois

$$\begin{aligned}
\sqrt{x_1 x_2} &\leq (x_1 + x_2)/2 && \Leftrightarrow \\
x_1 x_2 &\leq (x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2)/4 && \Leftrightarrow \\
2x_1 x_2 &\leq x_1^2 + x_2^2 && \Leftrightarrow \\
0 &\leq x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 && \Leftrightarrow \\
0 &\leq (x_1 - x_2)^2.
\end{aligned}$$

Exemplo 6 (cont)

- Agora considere um número $k \geq 0$.
- Suponha que a inequação vale para $n = 2^k$.
- Vamos demonstrar que a inequação vale para $2n = 2^{k+1}$.
- Reescrevendo o lado esquerdo da inequação para $2n$,

$$(x_1 x_2 \dots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \, (x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n})^{\frac{1}{n}}}.$$

- Defina $\quad y_1 = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \quad$ e $\quad y_2 = (x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n})^{\frac{1}{n}}$
- Portanto, pelo caso $n = 2$ já demonstrado,

$$(x_1 x_2 \dots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{y_1 \, y_2} \leq \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Exemplo 6 (cont)

- Agora considere um número $k \geq 0$.
- Suponha que a inequação vale para $n = 2^k$.
- Vamos demonstrar que a inequação vale para $2n = 2^{k+1}$.
- Reescrevendo o lado esquerdo da inequação para $2n$,

$$(x_1 x_2 \ldots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \, (x_{n+1} x_{n+2} \ldots x_{2n})^{\frac{1}{n}}}.$$

- Defina $\quad y_1 = (x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \quad$ e $\quad y_2 = (x_{n+1} x_{n+2} \ldots x_{2n})^{\frac{1}{n}}$
- Portanto, pelo caso $n = 2$ já demonstrado,

$$(x_1 x_2 \ldots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{y_1 \, y_2} \leq \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Exemplo 6 (cont)

- Agora considere um número $k \geq 0$.
- Suponha que a inequação vale para $n = 2^k$.
- Vamos demonstrar que a inequação vale para $2n = 2^{k+1}$.
- Reescrevendo o lado esquerdo da inequação para $2n$,

$$(x_1 x_2 \dots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} (x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n})^{\frac{1}{n}}}.$$

- Defina $\quad y_1 = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \quad$ e $\quad y_2 = (x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n})^{\frac{1}{n}}$
- Portanto, pelo caso $n = 2$ já demonstrado,

$$(x_1 x_2 \dots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{y_1 \, y_2} \leq \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Exemplo 6 (cont)

- Agora considere um número $k \geq 0$.
- Suponha que a inequação vale para $n = 2^k$.
- Vamos demonstrar que a inequação vale para $2n = 2^{k+1}$.
- Reescrevendo o lado esquerdo da inequação para $2n$,

$$(x_1 x_2 \ldots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \, (x_{n+1} x_{n+2} \ldots x_{2n})^{\frac{1}{n}}}.$$

- Defina $\quad y_1 = (x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \quad$ e $\quad y_2 = (x_{n+1} x_{n+2} \ldots x_{2n})^{\frac{1}{n}}$
- Portanto, pelo caso $n = 2$ já demonstrado,

$$(x_1 x_2 \ldots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{y_1 \, y_2} \leq \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Exemplo 6 (cont)

- Agora considere um número $k \geq 0$.
- Suponha que a inequação vale para $n = 2^k$.
- Vamos demonstrar que a inequação vale para $2n = 2^{k+1}$.
- Reescrevendo o lado esquerdo da inequação para $2n$,

$$(x_1 x_2 \dots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \, (x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n})^{\frac{1}{n}}}.$$

- Defina $\quad y_1 = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \quad$ e $\quad y_2 = (x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n})^{\frac{1}{n}}$
- Portanto, pelo caso $n = 2$ já demonstrado,

$$(x_1 x_2 \dots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{y_1 \, y_2} \leq \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Exemplo 6 (cont)

- Agora considere um número $k \geq 0$.
- Suponha que a inequação vale para $n = 2^k$.
- Vamos demonstrar que a inequação vale para $2n = 2^{k+1}$.
- Reescrevendo o lado esquerdo da inequação para $2n$,

$$(x_1 x_2 \ldots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \, (x_{n+1} x_{n+2} \ldots x_{2n})^{\frac{1}{n}}}.$$

- Defina $\quad y_1 = (x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \quad$ e $\quad y_2 = (x_{n+1} x_{n+2} \ldots x_{2n})^{\frac{1}{n}}$
- Portanto, pelo caso $n = 2$ já demonstrado,

$$(x_1 x_2 \ldots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{y_1 \, y_2} \leq \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Exemplo 6 (cont)

- Utilizando a h.i. duas vezes

$$y_1 = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$
$$y_2 = (x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{n}.$$

- Substituindo na inequação anterior

$$\begin{aligned}(x_1 x_2 \dots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} &\leq \frac{y_1 + y_2}{2} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{2n} + \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{2n} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}}{2n}\end{aligned}$$

- Isso mostra o lema para $k+1$ e completa a demonstração.

Exemplo 6 (cont)

- Utilizando a h.i. duas vezes

$$y_1 = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

$$y_2 = (x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{n}.$$

- Substituindo na inequação anterior

$$\begin{aligned} (x_1 x_2 \dots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} &\leq \frac{y_1 + y_2}{2} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{2n} + \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{2n} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}}{2n} \end{aligned}$$

- Isso mostra o lema para $k+1$ e completa a demonstração.

Exemplo 6 (cont)

- Utilizando a h.i. duas vezes

$$y_1 = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$
$$y_2 = (x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{n}.$$

- Substituindo na inequação anterior

$$\begin{aligned}(x_1 x_2 \dots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} &\leq \frac{y_1 + y_2}{2} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{2n} + \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{2n} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}}{2n}\end{aligned}$$

- Isso mostra o lema para $k+1$ e completa a demonstração.

Exemplo 6 (cont)

- Utilizando a h.i. duas vezes

$$y_1 = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$
$$y_2 = (x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{2n}}{n}.$$

- Substituindo na inequação anterior

$$\begin{aligned}(x_1 x_2 \dots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} &\leq \frac{y_1 + y_2}{2} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{2n} + \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{2n}}{2n} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2n}}{2n}\end{aligned}$$

- Isso mostra o lema para $k+1$ e completa a demonstração.

Exemplo 6 (cont)

- Utilizando a h.i. duas vezes

$$y_1 = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \le \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$
$$y_2 = (x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n})^{\frac{1}{n}} \le \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{n}.$$

- Substituindo na inequação anterior

$$\begin{aligned}(x_1 x_2 \dots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} &\le \frac{y_1 + y_2}{2} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{2n} + \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{2n} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}}{2n}\end{aligned}$$

- Isso mostra o lema para $k+1$ e completa a demonstração.

Exemplo 6 (cont)

- Utilizando a h.i. duas vezes

$$y_1 = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$
$$y_2 = (x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{n}.$$

- Substituindo na inequação anterior

$$\begin{aligned}(x_1 x_2 \dots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} &\leq \frac{y_1 + y_2}{2} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{2n} + \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{2n} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}}{2n}\end{aligned}$$

- Isso mostra o lema para $k+1$ e completa a demonstração.

Exemplo 6 (cont)

- Utilizando a h.i. duas vezes

$$y_1 = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$
$$y_2 = (x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{n}.$$

- Substituindo na inequação anterior

$$\begin{aligned}(x_1 x_2 \dots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} &\leq \frac{y_1 + y_2}{2} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{2n} + \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{2n} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}}{2n}\end{aligned}$$

- Isso mostra o lema para $k + 1$ e completa a demonstração.

Exemplo 6 (cont)

- Utilizando a h.i. duas vezes

$$y_1 = (x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$
$$y_2 = (x_{n+1} x_{n+2} \ldots x_{2n})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{n}.$$

- Substituindo na inequação anterior

$$\begin{aligned}(x_1 x_2 \ldots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} &\leq \frac{y_1 + y_2}{2} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{2n} + \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{2n} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}}{2n}\end{aligned}$$

- Isso mostra o lema para $k+1$ e completa a demonstração.

Exemplo 6 (cont)

- Utilizando a h.i. duas vezes

$$y_1 = (x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$
$$y_2 = (x_{n+1} x_{n+2} \ldots x_{2n})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{n}.$$

- Substituindo na inequação anterior

$$\begin{aligned}
(x_1 x_2 \ldots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} &\leq \frac{y_1 + y_2}{2} \\
&= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{2n} + \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{2n} \\
&= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}}{2n}
\end{aligned}$$

- Isso mostra o lema para $k + 1$ e completa a demonstração.

Exemplo 6 (cont)

Para utilizar a indução reversa, ainda precisamos do seguinte.

Lema 2

Se que o teorema vale para $n \geq 2$, ele também vale para $n-1$.

Demonstração:

- Queremos demonstrar

$$(x_1 x_2 \dots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}.$$

- Defina

$$z = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}.$$

- Como o teorema vale para n, pela premissa, sabemos que

$$(x_1 x_2 \dots x_{n-1} z)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + z}{n}.$$

Exemplo 6 (cont)

Para utilizar a indução reversa, ainda precisamos do seguinte.

Lema 2

Se que o teorema vale para $n \geq 2$, ele também vale para $n - 1$.

Demonstração:

- Queremos demonstrar

$$(x_1 x_2 \ldots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}.$$

- Defina

$$z = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}.$$

- Como o teorema vale para n, pela premissa, sabemos que

$$(x_1 x_2 \ldots x_{n-1} z)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + z}{n}.$$

Exemplo 6 (cont)

Para utilizar a indução reversa, ainda precisamos do seguinte.

Lema 2

Se que o teorema vale para $n \geq 2$, ele também vale para $n - 1$.

Demonstração:

- Queremos demonstrar

$$(x_1 x_2 \ldots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}.$$

- Defina

$$z = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}.$$

- Como o teorema vale para n, pela premissa, sabemos que

$$(x_1 x_2 \ldots x_{n-1} z)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + z}{n}.$$

Exemplo 6 (cont)

Para utilizar a indução reversa, ainda precisamos do seguinte.

Lema 2

Se que o teorema vale para $n \geq 2$, ele também vale para $n-1$.

Demonstração:

- Queremos demonstrar

$$(x_1 x_2 \dots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}.$$

- Defina

$$z = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}.$$

- Como o teorema vale para n, pela premissa, sabemos que

$$(x_1 x_2 \dots x_{n-1} z)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + z}{n}.$$

Exemplo 6 (cont)

Para utilizar a indução reversa, ainda precisamos do seguinte.

Lema 2

Se que o teorema vale para $n \geq 2$, ele também vale para $n - 1$.

Demonstração:

- Queremos demonstrar

$$(x_1 x_2 \dots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}.$$

- Defina

$$z = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}.$$

- Como o teorema vale para n, pela premissa, sabemos que

$$(x_1 x_2 \dots x_{n-1} z)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + z}{n}.$$

Exemplo 6 (cont)

Para utilizar a indução reversa, ainda precisamos do seguinte.

Lema 2

Se que o teorema vale para $n \geq 2$, ele também vale para $n-1$.

Demonstração:

- Queremos demonstrar

$$(x_1 x_2 \ldots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}.$$

- Defina

$$z = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}.$$

- Como o teorema vale para n, pela premissa, sabemos que

$$(x_1 x_2 \ldots x_{n-1} z)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + z}{n}.$$

Exemplo 6 (cont)

- Como z é a média dos valores x_i, sabemos que

$$(x_1 x_2 \dots x_{n-1} z)^{\frac{1}{n}} \leq z$$

- Elevando ambos os lados à potência $\frac{n}{n-1}$,

$$(x_1 x_2 \dots x_{n-1} z)^{\frac{1}{n-1}} \leq z^{\frac{n}{n-1}}.$$

- Finalmente, multiplicando ambos os lados por $z^{-\frac{1}{n-1}}$,

$$(x_1 x_2 \dots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leq z = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}.$$

- Assim, o teorema para $n-1$, completando a prova.

Exemplo 6 (cont)

- Como z é a média dos valores x_i, sabemos que

$$(x_1 x_2 \dots x_{n-1} z)^{\frac{1}{n}} \leq z$$

- Elevando ambos os lados à potência $\frac{n}{n-1}$,

$$(x_1 x_2 \dots x_{n-1} z)^{\frac{1}{n-1}} \leq z^{\frac{n}{n-1}}.$$

- Finalmente, multiplicando ambos os lados por $z^{-\frac{1}{n-1}}$,

$$(x_1 x_2 \dots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leq z = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}.$$

- Assim, o teorema para $n-1$, completando a prova.

Exemplo 6 (cont)

- Como z é a média dos valores x_i, sabemos que

$$(x_1 x_2 \dots x_{n-1} z)^{\frac{1}{n}} \leq z$$

- Elevando ambos os lados à potência $\frac{n}{n-1}$,

$$(x_1 x_2 \dots x_{n-1} z)^{\frac{1}{n-1}} \leq z^{\frac{n}{n-1}}.$$

- Finalmente, multiplicando ambos os lados por $z^{-\frac{1}{n-1}}$,

$$(x_1 x_2 \dots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leq z = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}.$$

- Assim, o teorema para $n-1$, completando a prova.

Exemplo 6 (cont)

- Como z é a média dos valores x_i, sabemos que

$$(x_1 x_2 \dots x_{n-1} z)^{\frac{1}{n}} \leq z$$

- Elevando ambos os lados à potência $\frac{n}{n-1}$,

$$(x_1 x_2 \dots x_{n-1} z)^{\frac{1}{n-1}} \leq z^{\frac{n}{n-1}}.$$

- Finalmente, multiplicando ambos os lados por $z^{-\frac{1}{n-1}}$,

$$(x_1 x_2 \dots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leq z = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}.$$

- Assim, o teorema para $n-1$, completando a prova.

Princípio da indução

- Erros comuns

Reduzir ou aumentar

- No passo da indução, supomos que a afirmação é válida para o caso $n - 1$ e mostramos que é válida para n.
- Portanto, devemos sempre partir de um caso genérico para n e reduzi-lo a algum caso particular para $n - 1$.
- Um erro comum é sair de um caso genérico para $n - 1$ e construir um exemplo do caso n.
  - não basta dar um exemplo para n
  - esse procedimento não é geral

Reduzir ou aumentar

- No passo da indução, supomos que a afirmação é válida para o caso $n - 1$ e mostramos que é válida para n.
- Portanto, devemos sempre partir de um caso genérico para n e reduzi-lo a algum caso particular para $n - 1$.
- Um erro comum é sair de um caso genérico para $n - 1$ e construir um exemplo do caso n.
  - não basta dar um exemplo para n
  - esse procedimento não é geral

Reduzir ou aumentar

- No passo da indução, supomos que a afirmação é válida para o caso $n-1$ e mostramos que é válida para n.
- Portanto, devemos sempre partir de um caso genérico para n e reduzi-lo a algum caso particular para $n-1$.
- Um erro comum é sair de um caso genérico para $n-1$ e construir um exemplo do caso n.
  - não basta dar um exemplo para n
  - esse procedimento não é geral

Reduzir ou aumentar

- No passo da indução, supomos que a afirmação é válida para o caso $n - 1$ e mostramos que é válida para n.
- Portanto, devemos sempre partir de um caso genérico para n e reduzi-lo a algum caso particular para $n - 1$.
- Um erro comum é sair de um caso genérico para $n - 1$ e construir um exemplo do caso n.
  - não basta dar um exemplo para n
  - esse procedimento não é geral

Reduzir ou aumentar

- No passo da indução, supomos que a afirmação é válida para o caso $n-1$ e mostramos que é válida para n.
- Portanto, devemos sempre partir de um caso genérico para n e reduzi-lo a algum caso particular para $n-1$.
- Um erro comum é sair de um caso genérico para $n-1$ e construir um exemplo do caso n.
  - não basta dar um exemplo para n
  - esse procedimento não é geral

Todas as retas se interceptam?

O que há de errado com a demonstração seguinte ?

Exemplo

Considere n retas distintas no plano, concorrentes duas a duas. Então existe um ponto comum a todas as n retas.

Demonstração:

- Se $n = 1$ ou $n = 2$, então a afirmação é clara.
- Fixe $n > 2$ e suponha que a afirmação vale para $n - 1$.
- Considere n retas no plano concorrentes duas a duas.

Todas as retas se interceptam?

O que há de errado com a demonstração seguinte ?

Exemplo

Considere n retas distintas no plano, concorrentes duas a duas. Então existe um ponto comum a todas as n retas.

Demonstração:

- Se $n = 1$ ou $n = 2$, então a afirmação é clara.
- Fixe $n > 2$ e suponha que a afirmação vale para $n - 1$.
- Considere n retas no plano concorrentes duas a duas.

Todas as retas se interceptam?

O que há de errado com a demonstração seguinte ?

Exemplo

Considere n retas distintas no plano, concorrentes duas a duas. Então existe um ponto comum a todas as n retas.

Demonstração:

- Se $n = 1$ ou $n = 2$, então a afirmação é clara.
- Fixe $n > 2$ e suponha que a afirmação vale para $n - 1$.
- Considere n retas no plano concorrentes duas a duas.

Todas as retas se interceptam?

O que há de errado com a demonstração seguinte ?

Exemplo

Considere n retas distintas no plano, concorrentes duas a duas. Então existe um ponto comum a todas as n retas.

Demonstração:

- Se $n = 1$ ou $n = 2$, então a afirmação é clara.
- Fixe $n > 2$ e suponha que a afirmação vale para $n - 1$.
- Considere n retas no plano concorrentes duas a duas.

Todas as retas se interceptam?

O que há de errado com a demonstração seguinte ?

Exemplo

Considere n retas distintas no plano, concorrentes duas a duas. Então existe um ponto comum a todas as n retas.

Demonstração:

- Se $n = 1$ ou $n = 2$, então a afirmação é clara.
- Fixe $n > 2$ e suponha que a afirmação vale para $n - 1$.
- Considere n retas no plano concorrentes duas a duas.

Todas as retas se interceptam?

O que há de errado com a demonstração seguinte ?

Exemplo

Considere n retas distintas no plano, concorrentes duas a duas. Então existe um ponto comum a todas as n retas.

Demonstração:

- Se $n = 1$ ou $n = 2$, então a afirmação é clara.
- Fixe $n > 2$ e suponha que a afirmação vale para $n - 1$.
- Considere n retas no plano concorrentes duas a duas.

Todas as retas se interceptam?

- Sejam S_1, S_2 dois subconjuntos distintos com $n-1$ retas.
- Pela h.i., as retas de S_1 interceptam-se em um ponto p_1.
- Analogamente, as retas de S_2 interceptam-se em p_2.
- Daí, cada reta de $S_1 \cap S_2$ intercepta tanto p_1 quanto p_2.
- Como duas retas da interseção só se tocam em um ponto, sabemos que $p_1 = p_2$.
- Portanto, todas as retas interceptam-se em um ponto.

Certo? Não!

- Supomos que há duas retas na interseção.
- Isso é verdade quando $n \geq 4$, mas falha quando $n = 3$.

Todas as retas se interceptam?

- Sejam S_1, S_2 dois subconjuntos distintos com $n - 1$ retas.
- Pela h.i., as retas de S_1 interceptam-se em um ponto p_1.
- Analogamente, as retas de S_2 interceptam-se em p_2.
- Daí, cada reta de $S_1 \cap S_2$ intercepta tanto p_1 quanto p_2.
- Como duas retas da interseção só se tocam em um ponto, sabemos que $p_1 = p_2$.
- Portanto, todas as retas interceptam-se em um ponto.

Certo? Não!

- Supomos que há duas retas na interseção.
- Isso é verdade quando $n \geq 4$, mas falha quando $n = 3$.

Todas as retas se interceptam?

- Sejam S_1, S_2 dois subconjuntos distintos com $n-1$ retas.
- Pela h.i., as retas de S_1 interceptam-se em um ponto p_1.
- Analogamente, as retas de S_2 interceptam-se em p_2.
- Daí, cada reta de $S_1 \cap S_2$ intercepta tanto p_1 quanto p_2.
- Como duas retas da interseção só se tocam em um ponto, sabemos que $p_1 = p_2$.
- Portanto, todas as retas interceptam-se em um ponto.

Certo? Não!

- Supomos que há duas retas na interseção.
- Isso é verdade quando $n \geq 4$, mas falha quando $n = 3$.

Todas as retas se interceptam?

- Sejam S_1, S_2 dois subconjuntos distintos com $n-1$ retas.
- Pela h.i., as retas de S_1 interceptam-se em um ponto p_1.
- Analogamente, as retas de S_2 interceptam-se em p_2.
- Daí, cada reta de $S_1 \cap S_2$ intercepta tanto p_1 quanto p_2.
- Como duas retas da interseção só se tocam em um ponto, sabemos que $p_1 = p_2$.
- Portanto, todas as retas interceptam-se em um ponto.

Certo? Não!

- Supomos que há duas retas na interseção.
- Isso é verdade quando $n \geq 4$, mas falha quando $n = 3$.

Todas as retas se interceptam?

- Sejam S_1, S_2 dois subconjuntos distintos com $n - 1$ retas.
- Pela h.i., as retas de S_1 interceptam-se em um ponto p_1.
- Analogamente, as retas de S_2 interceptam-se em p_2.
- Daí, cada reta de $S_1 \cap S_2$ intercepta tanto p_1 quanto p_2.
- Como duas retas da interseção só se tocam em um ponto, sabemos que $p_1 = p_2$.
- Portanto, todas as retas interceptam-se em um ponto.

Certo? Não!

- Supomos que há duas retas na interseção.
- Isso é verdade quando $n \geq 4$, mas falha quando $n = 3$.

Todas as retas se interceptam?

- Sejam S_1, S_2 dois subconjuntos distintos com $n-1$ retas.
- Pela h.i., as retas de S_1 interceptam-se em um ponto p_1.
- Analogamente, as retas de S_2 interceptam-se em p_2.
- Daí, cada reta de $S_1 \cap S_2$ intercepta tanto p_1 quanto p_2.
- Como duas retas da interseção só se tocam em um ponto, sabemos que $p_1 = p_2$.
- Portanto, todas as retas interceptam-se em um ponto.

Certo? Não!

- Supomos que há duas retas na interseção.
- Isso é verdade quando $n \geq 4$, mas falha quando $n = 3$.

Todas as retas se interceptam?

- Sejam S_1, S_2 dois subconjuntos distintos com $n - 1$ retas.
- Pela h.i., as retas de S_1 interceptam-se em um ponto p_1.
- Analogamente, as retas de S_2 interceptam-se em p_2.
- Daí, cada reta de $S_1 \cap S_2$ intercepta tanto p_1 quanto p_2.
- Como duas retas da interseção só se tocam em um ponto, sabemos que $p_1 = p_2$.
- Portanto, todas as retas interceptam-se em um ponto.

Certo? Não!

- Supomos que há duas retas na interseção.
- Isso é verdade quando $n \geq 4$, mas falha quando $n = 3$.

Todas as retas se interceptam?

- Sejam S_1, S_2 dois subconjuntos distintos com $n-1$ retas.
- Pela h.i., as retas de S_1 interceptam-se em um ponto p_1.
- Analogamente, as retas de S_2 interceptam-se em p_2.
- Daí, cada reta de $S_1 \cap S_2$ intercepta tanto p_1 quanto p_2.
- Como duas retas da interseção só se tocam em um ponto, sabemos que $p_1 = p_2$.
- Portanto, todas as retas interceptam-se em um ponto.

Certo? Não!

- Supomos que há duas retas na interseção.
- Isso é verdade quando $n \geq 4$, mas falha quando $n = 3$.

Todas as retas se interceptam?

- Sejam S_1, S_2 dois subconjuntos distintos com $n-1$ retas.
- Pela h.i., as retas de S_1 interceptam-se em um ponto p_1.
- Analogamente, as retas de S_2 interceptam-se em p_2.
- Daí, cada reta de $S_1 \cap S_2$ intercepta tanto p_1 quanto p_2.
- Como duas retas da interseção só se tocam em um ponto, sabemos que $p_1 = p_2$.
- Portanto, todas as retas interceptam-se em um ponto.

Certo? Não!

- Supomos que há duas retas na interseção.
- Isso é verdade quando $n \geq 4$, mas falha quando $n = 3$.

Todas as retas se interceptam?

- Sejam S_1, S_2 dois subconjuntos distintos com $n - 1$ retas.
- Pela h.i., as retas de S_1 interceptam-se em um ponto p_1.
- Analogamente, as retas de S_2 interceptam-se em p_2.
- Daí, cada reta de $S_1 \cap S_2$ intercepta tanto p_1 quanto p_2.
- Como duas retas da interseção só se tocam em um ponto, sabemos que $p_1 = p_2$.
- Portanto, todas as retas interceptam-se em um ponto.

Certo? Não!

- Supomos que há duas retas na interseção.
- Isso é verdade quando $n \geq 4$, mas falha quando $n = 3$.