

Projeto e Análise de Algoritmos

Introdução a algoritmos aleatorizados e ordenação por
particionamento

Lehilton Pedrosa

Primeiro Semestre de 2023

Revisão de probabilidade

Espaço amostral

Consideramos a noção de **espaço amostral** S

- ▶ conjunto cujos elementos são eventos elementares
- ▶ cada elemento é o resultado de um experimento

Estamos interessados em investigar **eventos**

- ▶ é um subconjunto do espaço amostral S
- ▶ o subconjunto vazio $\emptyset$ é o evento nulo
- ▶ o conjunto completo S é o evento certo
- ▶ eventos disjuntos são **mutuamente exclusivos**
- ▶ conjuntos unitários são mutuamente exclusivos

Espaço amostral

Consideramos a noção de **espaço amostral** S

- ▶ conjunto cujos elementos são eventos elementares
- ▶ cada elemento é o resultado de um experimento

Estamos interessados em investigar **eventos**

- ▶ é um subconjunto do espaço amostral S
- ▶ o subconjunto vazio $\emptyset$ é o evento nulo
- ▶ o conjunto completo S é o evento certo
- ▶ eventos disjuntos são **mutuamente exclusivos**
- ▶ conjuntos unitários são mutuamente exclusivos

Espaço amostral

Consideramos a noção de **espaço amostral** S

- ▶ conjunto cujos elementos são eventos elementares
- ▶ cada elemento é o resultado de um experimento

Estamos interessados em investigar **eventos**

- ▶ é um subconjunto do espaço amostral S
- ▶ o subconjunto vazio $\emptyset$ é o evento nulo
- ▶ o conjunto completo S é o evento certo
- ▶ eventos disjuntos são **mutuamente exclusivos**
- ▶ conjuntos unitários são mutuamente exclusivos

Espaço amostral

Consideramos a noção de **espaço amostral** S

- ▶ conjunto cujos elementos são eventos elementares
- ▶ cada elemento é o resultado de um experimento

Estamos interessados em investigar **eventos**

- ▶ é um subconjunto do espaço amostral S
- ▶ o subconjunto vazio $\emptyset$ é o evento nulo
- ▶ o conjunto completo S é o evento certo
- ▶ eventos disjuntos são **mutuamente exclusivos**
- ▶ conjuntos unitários são mutuamente exclusivos

Espaço amostral

Consideramos a noção de **espaço amostral** S

- ▶ conjunto cujos elementos são eventos elementares
- ▶ cada elemento é o resultado de um experimento

Estamos interessados em investigar **eventos**

- ▶ é um subconjunto do espaço amostral S
- ▶ o subconjunto vazio $\emptyset$ é o evento nulo
- ▶ o conjunto completo S é o evento certo
- ▶ eventos disjuntos são **mutuamente exclusivos**
- ▶ conjuntos unitários são mutuamente exclusivos

Espaço amostral

Consideramos a noção de **espaço amostral** S

- ▶ conjunto cujos elementos são eventos elementares
- ▶ cada elemento é o resultado de um experimento

Estamos interessados em investigar **eventos**

- ▶ é um subconjunto do espaço amostral S
- ▶ o subconjunto vazio $\emptyset$ é o evento nulo
- ▶ o conjunto completo S é o evento certo
- ▶ eventos disjuntos são **mutuamente exclusivos**
- ▶ conjuntos unitários são mutuamente exclusivos

Espaço amostral

Consideramos a noção de **espaço amostral** S

- ▶ conjunto cujos elementos são eventos elementares
- ▶ cada elemento é o resultado de um experimento

Estamos interessados em investigar **eventos**

- ▶ é um subconjunto do espaço amostral S
- ▶ o subconjunto vazio $\emptyset$ é o evento nulo
- ▶ o conjunto completo S é o evento certo
- ▶ eventos disjuntos são **mutuamente exclusivos**
- ▶ conjuntos unitários são mutuamente exclusivos

Espaço amostral

Consideramos a noção de **espaço amostral** S

- ▶ conjunto cujos elementos são eventos elementares
- ▶ cada elemento é o resultado de um experimento

Estamos interessados em investigar **eventos**

- ▶ é um subconjunto do espaço amostral S
- ▶ o subconjunto vazio $\emptyset$ é o evento nulo
- ▶ o conjunto completo S é o evento certo
- ▶ eventos disjuntos são **mutuamente exclusivos**
- ▶ conjuntos unitários são mutuamente exclusivos

Espaço amostral

Consideramos a noção de **espaço amostral** S

- ▶ conjunto cujos elementos são eventos elementares
- ▶ cada elemento é o resultado de um experimento

Estamos interessados em investigar **eventos**

- ▶ é um subconjunto do espaço amostral S
- ▶ o subconjunto vazio $\emptyset$ é o evento nulo
- ▶ o conjunto completo S é o evento certo
- ▶ eventos disjuntos são **mutuamente exclusivos**
- ▶ conjuntos unitários são mutuamente exclusivos

Uma **distribuição de probabilidade** $\Pr\{\}$ em S é uma função mapeando eventos em reais satisfazendo axiomas

1. $\Pr\{A\} \geq 0$ para todo evento A .
2. $\Pr\{S\} = 1$.
3. $\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\}$ para eventos mutuamente exclusivos A e B .

Chamamos $\Pr\{A\}$ a probabilidade do evento A

- ▶ o evento complementar de A é $\bar{A} = S \setminus A$
- ▶ assim, $\Pr\{\bar{A}\} = 1 - \Pr\{A\}$

Uma **distribuição de probabilidade** $\Pr\{\}$ em S é uma função mapeando eventos em reais satisfazendo axiomas

1. $\Pr\{A\} \geq 0$ para todo evento A .
2. $\Pr\{S\} = 1$.
3. $\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\}$ para eventos mutuamente exclusivos A e B .

Chamamos $\Pr\{A\}$ a probabilidade do evento A

- ▶ o evento complementar de A é $\bar{A} = S \setminus A$
- ▶ assim, $\Pr\{\bar{A}\} = 1 - \Pr\{A\}$

Uma **distribuição de probabilidade** $\Pr\{\}$ em S é uma função mapeando eventos em reais satisfazendo axiomas

1. $\Pr\{A\} \geq 0$ para todo evento A .
2. $\Pr\{S\} = 1$.
3. $\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\}$ para eventos mutuamente exclusivos A e B .

Chamamos $\Pr\{A\}$ a probabilidade do evento A

- ▶ o evento complementar de A é $\bar{A} = S \setminus A$
- ▶ assim, $\Pr\{\bar{A}\} = 1 - \Pr\{A\}$

Uma **distribuição de probabilidade** $\Pr\{\}$ em S é uma função mapeando eventos em reais satisfazendo axiomas

1. $\Pr\{A\} \geq 0$ para todo evento A .
2. $\Pr\{S\} = 1$.
3. $\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\}$ para eventos mutuamente exclusivos A e B .

Chamamos $\Pr\{A\}$ a probabilidade do evento A

- ▶ o evento complementar de A é $\bar{A} = S \setminus A$
- ▶ assim, $\Pr\{\bar{A}\} = 1 - \Pr\{A\}$

Uma **distribuição de probabilidade** $\Pr\{\}$ em S é uma função mapeando eventos em reais satisfazendo axiomas

1. $\Pr\{A\} \geq 0$ para todo evento A .
2. $\Pr\{S\} = 1$.
3. $\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\}$ para eventos mutuamente exclusivos A e B .

Chamamos $\Pr\{A\}$ a probabilidade do evento A

- ▶ o evento complementar de A é $\bar{A} = S \setminus A$
- ▶ assim, $\Pr\{\bar{A}\} = 1 - \Pr\{A\}$

Uma **distribuição de probabilidade** $\Pr\{\}$ em S é uma função mapeando eventos em reais satisfazendo axiomas

1. $\Pr\{A\} \geq 0$ para todo evento A .
2. $\Pr\{S\} = 1$.
3. $\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\}$ para eventos mutuamente exclusivos A e B .

Chamamos $\Pr\{A\}$ a probabilidade do evento A

- ▶ o evento complementar de A é $\bar{A} = S \setminus A$
- ▶ assim, $\Pr\{\bar{A}\} = 1 - \Pr\{A\}$

Uma **distribuição de probabilidade** $\Pr\{\}$ em S é uma função mapeando eventos em reais satisfazendo axiomas

1. $\Pr\{A\} \geq 0$ para todo evento A .
2. $\Pr\{S\} = 1$.
3. $\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\}$ para eventos mutuamente exclusivos A e B .

Chamamos $\Pr\{A\}$ a probabilidade do evento A

- ▶ o evento complementar de A é $\bar{A} = S \setminus A$
- ▶ assim, $\Pr\{\bar{A}\} = 1 - \Pr\{A\}$

Algumas consequências da definição

1. Se $A_1, A_2, \dots$, são eventos mutuamente exclusivos

$$\Pr\left\{\bigcup_i A_i\right\} = \sum_i \Pr\{A_i\}$$

2. Para quaisquer dois eventos A, B

$$\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{A \cap B\}$$

3. E portanto

$$\Pr\{A \cup B\} \leq \Pr\{A\} + \Pr\{B\}$$

Algumas consequências da definição

1. Se $A_1, A_2, \dots$, são eventos mutuamente exclusivos

$$\Pr\left\{\bigcup_i A_i\right\} = \sum_i \Pr\{A_i\}$$

2. Para quaisquer dois eventos A, B

$$\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{A \cap B\}$$

3. E portanto

$$\Pr\{A \cup B\} \leq \Pr\{A\} + \Pr\{B\}$$

Algumas consequências da definição

1. Se $A_1, A_2, \dots$, são eventos mutuamente exclusivos

$$\Pr\left\{\bigcup_i A_i\right\} = \sum_i \Pr\{A_i\}$$

2. Para quaisquer dois eventos A, B

$$\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{A \cap B\}$$

3. E portanto

$$\Pr\{A \cup B\} \leq \Pr\{A\} + \Pr\{B\}$$

Algumas consequências da definição

1. Se $A_1, A_2, \dots$, são eventos mutuamente exclusivos

$$\Pr\left\{\bigcup_i A_i\right\} = \sum_i \Pr\{A_i\}$$

2. Para quaisquer dois eventos A, B

$$\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{A \cap B\}$$

3. E portanto

$$\Pr\{A \cup B\} \leq \Pr\{A\} + \Pr\{B\}$$

Distribuições discretas

Vamos considerar espaços amostrais **discretos**

- ▶ Para qualquer evento $\Pr\{A\} = \sum_s \Pr\{s\}$
- ▶ Em uma distribuição **uniforme** em S , temos $\Pr\{s\} = 1/|S|$

Exemplo: uma moeda não viciada

- ▶ Espaço amostral $S = \{H, T\}$ (cara ou coroa)
- ▶ Temos $\Pr\{H\} = \Pr\{T\} = 1/|S| = 1/2$

Exemplo: uma sequência de n lançamentos de moeda

- ▶ O espaço amostral são strings com H ou T de tamanho n
- ▶ Se um evento é $A = \{\text{exatamente } k \text{ caras e } n - k \text{ coroas}\}$
- ▶ Então $\Pr\{A\} = \binom{n}{k}/2^n$

Distribuições discretas

Vamos considerar espaços amostrais **discretos**

- ▶ Para qualquer evento $\Pr\{A\} = \sum_s \Pr\{s\}$
- ▶ Em uma distribuição **uniforme** em S , temos $\Pr\{s\} = 1/|S|$

Exemplo: uma moeda não viciada

- ▶ Espaço amostral $S = \{H, T\}$ (cara ou coroa)
- ▶ Temos $\Pr\{H\} = \Pr\{T\} = 1/|S| = 1/2$

Exemplo: uma sequência de n lançamentos de moeda

- ▶ O espaço amostral são strings com H ou T de tamanho n
- ▶ Se um evento é $A = \{\text{exatamente } k \text{ caras e } n - k \text{ coroas}\}$
- ▶ Então $\Pr\{A\} = \binom{n}{k}/2^n$

Distribuições discretas

Vamos considerar espaços amostrais **discretos**

- ▶ Para qualquer evento $\Pr\{A\} = \sum_s \Pr\{s\}$
- ▶ Em uma distribuição **uniforme** em S , temos $\Pr\{s\} = 1/|S|$

Exemplo: uma moeda não viciada

- ▶ Espaço amostral $S = \{H, T\}$ (cara ou coroa)
- ▶ Temos $\Pr\{H\} = \Pr\{T\} = 1/|S| = 1/2$

Exemplo: uma sequência de n lançamentos de moeda

- ▶ O espaço amostral são strings com H ou T de tamanho n
- ▶ Se um evento é $A = \{\text{exatamente } k \text{ caras e } n - k \text{ coroas}\}$
- ▶ Então $\Pr\{A\} = \binom{n}{k}/2^n$

Distribuições discretas

Vamos considerar espaços amostrais **discretos**

- ▶ Para qualquer evento $\Pr\{A\} = \sum_s \Pr\{s\}$
- ▶ Em uma distribuição **uniforme** em S , temos $\Pr\{s\} = 1/|S|$

Exemplo: uma moeda não viciada

- ▶ Espaço amostral $S = \{H, T\}$ (cara ou coroa)
- ▶ Temos $\Pr\{H\} = \Pr\{T\} = 1/|S| = 1/2$

Exemplo: uma sequência de n lançamentos de moeda

- ▶ O espaço amostral são strings com H ou T de tamanho n
- ▶ Se um evento é $A = \{\text{exatamente } k \text{ caras e } n - k \text{ coroas}\}$
- ▶ Então $\Pr\{A\} = \binom{n}{k}/2^n$

Distribuições discretas

Vamos considerar espaços amostrais **discretos**

- ▶ Para qualquer evento $\Pr\{A\} = \sum_s \Pr\{s\}$
- ▶ Em uma distribuição **uniforme** em S , temos $\Pr\{s\} = 1/|S|$

Exemplo: uma moeda não viciada

- ▶ Espaço amostral $S = \{H, T\}$ (cara ou coroa)
- ▶ Temos $\Pr\{H\} = \Pr\{T\} = 1/|S| = 1/2$

Exemplo: uma sequência de n lançamentos de moeda

- ▶ O espaço amostral são strings com H ou T de tamanho n
- ▶ Se um evento é $A = \{\text{exatamente } k \text{ caras e } n - k \text{ coroas}\}$
- ▶ Então $\Pr\{A\} = \binom{n}{k}/2^n$

Distribuições discretas

Vamos considerar espaços amostrais **discretos**

- ▶ Para qualquer evento $\Pr\{A\} = \sum_s \Pr\{s\}$
- ▶ Em uma distribuição **uniforme** em S , temos $\Pr\{s\} = 1/|S|$

Exemplo: uma moeda não viciada

- ▶ Espaço amostral $S = \{H, T\}$ (cara ou coroa)
- ▶ Temos $\Pr\{H\} = \Pr\{T\} = 1/|S| = 1/2$

Exemplo: uma sequência de n lançamentos de moeda

- ▶ O espaço amostral são strings com H ou T de tamanho n
- ▶ Se um evento é $A = \{\text{exatamente } k \text{ caras e } n - k \text{ coroas}\}$
- ▶ Então $\Pr\{A\} = \binom{n}{k}/2^n$

Distribuições discretas

Vamos considerar espaços amostrais **discretos**

- ▶ Para qualquer evento $\Pr\{A\} = \sum_s \Pr\{s\}$
- ▶ Em uma distribuição **uniforme** em S , temos $\Pr\{s\} = 1/|S|$

Exemplo: uma moeda não viciada

- ▶ Espaço amostral $S = \{H, T\}$ (cara ou coroa)
- ▶ Temos $\Pr\{H\} = \Pr\{T\} = 1/|S| = 1/2$

Exemplo: uma sequência de n lançamentos de moeda

- ▶ O espaço amostral são strings com H ou T de tamanho n
- ▶ Se um evento é $A = \{\text{exatamente } k \text{ caras e } n - k \text{ coroas}\}$
- ▶ Então $\Pr\{A\} = \binom{n}{k}/2^n$

Distribuições discretas

Vamos considerar espaços amostrais **discretos**

- ▶ Para qualquer evento $\Pr\{A\} = \sum_s \Pr\{s\}$
- ▶ Em uma distribuição **uniforme** em S , temos $\Pr\{s\} = 1/|S|$

Exemplo: uma moeda não viciada

- ▶ Espaço amostral $S = \{H, T\}$ (cara ou coroa)
- ▶ Temos $\Pr\{H\} = \Pr\{T\} = 1/|S| = 1/2$

Exemplo: uma sequência de n lançamentos de moeda

- ▶ O espaço amostral são strings com H ou T de tamanho n
- ▶ Se um evento é $A = \{\text{exatamente } k \text{ caras e } n - k \text{ coroas}\}$
- ▶ Então $\Pr\{A\} = \binom{n}{k}/2^n$

Distribuições discretas

Vamos considerar espaços amostrais **discretos**

- ▶ Para qualquer evento $\Pr\{A\} = \sum_s \Pr\{s\}$
- ▶ Em uma distribuição **uniforme** em S , temos $\Pr\{s\} = 1/|S|$

Exemplo: uma moeda não viciada

- ▶ Espaço amostral $S = \{H, T\}$ (cara ou coroa)
- ▶ Temos $\Pr\{H\} = \Pr\{T\} = 1/|S| = 1/2$

Exemplo: uma sequência de n lançamentos de moeda

- ▶ O espaço amostral são strings com H ou T de tamanho n
- ▶ Se um evento é $A = \{\text{exatamente } k \text{ caras e } n - k \text{ coroas}\}$
- ▶ Então $\Pr\{A\} = \binom{n}{k}/2^n$

Distribuições discretas

Vamos considerar espaços amostrais **discretos**

- ▶ Para qualquer evento $\Pr\{A\} = \sum_s \Pr\{s\}$
- ▶ Em uma distribuição **uniforme** em S , temos $\Pr\{s\} = 1/|S|$

Exemplo: uma moeda não viciada

- ▶ Espaço amostral $S = \{H, T\}$ (cara ou coroa)
- ▶ Temos $\Pr\{H\} = \Pr\{T\} = 1/|S| = 1/2$

Exemplo: uma sequência de n lançamentos de moeda

- ▶ O espaço amostral são strings com H ou T de tamanho n
- ▶ Se um evento é $A = \{\text{exatamente } k \text{ caras e } n - k \text{ coroas}\}$
- ▶ Então $\Pr\{A\} = \binom{n}{k}/2^n$

Probabilidade condicional e independência

A **probabilidade condicional** de um evento A dado outro B é

$$\Pr\{A|B\} = \frac{\Pr\{A \cap B\}}{\Pr\{B\}}$$

Dois eventos A e B são **independentes** se

$$\Pr\{A \cap B\} = \Pr\{A\} \Pr\{B\}$$

Probabilidade condicional e independência

A **probabilidade condicional** de um evento A dado outro B é

$$\Pr\{A|B\} = \frac{\Pr\{A \cap B\}}{\Pr\{B\}}$$

Dois eventos A e B são **independentes** se

$$\Pr\{A \cap B\} = \Pr\{A\} \Pr\{B\}$$

Probabilidade condicional e independência

A **probabilidade condicional** de um evento A dado outro B é

$$\Pr\{A|B\} = \frac{\Pr\{A \cap B\}}{\Pr\{B\}}$$

Dois eventos A e B são **independentes** se

$$\Pr\{A \cap B\} = \Pr\{A\} \Pr\{B\}$$

Probabilidade condicional e independência

A **probabilidade condicional** de um evento A dado outro B é

$$\Pr\{A|B\} = \frac{\Pr\{A \cap B\}}{\Pr\{B\}}$$

Dois eventos A e B são **independentes** se

$$\Pr\{A \cap B\} = \Pr\{A\} \Pr\{B\}$$

Variável aleatória

Uma **variável aleatória** X discreta é uma função que associa cada elemento do espaço amostral a uma valor real.

- ▶ dado um número real x estamos interessados na probabilidade de que X tenha valor x
- ▶ temos que considerar eventos s tal que $X(s) = x$
- ▶ esse evento tem a seguinte probabilidade

$$\Pr\{X = x\} = \sum_{s \in S: X(s)=x} \Pr\{s\}$$

Variável aleatória

Uma **variável aleatória** X discreta é uma função que associa cada elemento do espaço amostral a uma valor real.

- ▶ dado um número real x estamos interessados na probabilidade de que X tenha valor x
- ▶ temos que considerar eventos s tal que $X(s) = x$
- ▶ esse evento tem a seguinte probabilidade

$$\Pr\{X = x\} = \sum_{s \in S: X(s)=x} \Pr\{s\}$$

Variável aleatória

Uma **variável aleatória** X discreta é uma função que associa cada elemento do espaço amostral a uma valor real.

- ▶ dado um número real x estamos interessados na probabilidade de que X tenha valor x
- ▶ temos que considerar eventos s tal que $X(s) = x$
- ▶ esse evento tem a seguinte probabilidade

$$\Pr\{X = x\} = \sum_{s \in S: X(s)=x} \Pr\{s\}$$

Variável aleatória

Uma **variável aleatória** X discreta é uma função que associa cada elemento do espaço amostral a uma valor real.

- ▶ dado um número real x estamos interessados na probabilidade de que X tenha valor x
- ▶ temos que considerar eventos s tal que $X(s) = x$
- ▶ esse evento tem a seguinte probabilidade

$$\Pr\{X = x\} = \sum_{s \in S: X(s)=x} \Pr\{s\}$$

Esperança

O **valor esperado** ou **esperança** de uma variável aleatória X é

$$E[X] = \sum_x x \cdot \Pr\{X = x\}$$

A esperança satisfaz propriedades de linearidades:

- ▶ para variáveis aleatórias X e Y

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

- ▶ para uma variável aleatória X e real a

$$E[aX] = aE[X]$$

Esperança

O **valor esperado** ou **esperança** de uma variável aleatória X é

$$E[X] = \sum_x x \cdot \Pr\{X = x\}$$

A esperança satisfaz propriedades de linearidades:

- ▶ para variáveis aleatórias X e Y

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

- ▶ para uma variável aleatória X e real a

$$E[aX] = aE[X]$$

Esperança

O **valor esperado** ou **esperança** de uma variável aleatória X é

$$E[X] = \sum_x x \cdot \Pr\{X = x\}$$

A esperança satisfaz propriedades de linearidades:

- ▶ para variáveis aleatórias X e Y

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

- ▶ para uma variável aleatória X e real a

$$E[aX] = aE[X]$$

Esperança

O **valor esperado** ou **esperança** de uma variável aleatória X é

$$E[X] = \sum_x x \cdot \Pr\{X = x\}$$

A esperança satisfaz propriedades de linearidades:

- ▶ para variáveis aleatórias X e Y

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

- ▶ para uma variável aleatória X e real a

$$E[aX] = aE[X]$$

Esperança

O **valor esperado** ou **esperança** de uma variável aleatória X é

$$E[X] = \sum_x x \cdot \Pr\{X = x\}$$

A esperança satisfaz propriedades de linearidades:

- ▶ para variáveis aleatórias X e Y

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

- ▶ para uma variável aleatória X e real a

$$E[aX] = aE[X]$$

Variáveis indicadoras

A variável indicadora de um evento A é a variável aleatória

$$I\{A\} = \begin{cases} 1 & \text{se evento } A \text{ ocorreu} \\ 0 & \text{se evento } A \text{ não ocorreu} \end{cases}$$

Exemplo: quantas caras esperamos ao lançarmos n moedas?

- ▶ seja X_i a variável indicadora do evento
“o i -ésimo lançamento deu cara”
- ▶ seja X o número de caras sorteadas
- ▶ assim, o número de caras esperado é

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = \sum_{i=1}^n 1/2 = n/2$$

- ▶ note que $E[X_i] = \Pr\{X_i = 1\} \cdot 1 + \Pr\{X_i = 0\} \cdot 0 = 1/2$

Variáveis indicadoras

A variável indicadora de um evento A é a variável aleatória

$$I\{A\} = \begin{cases} 1 & \text{se evento } A \text{ ocorreu} \\ 0 & \text{se evento } A \text{ não ocorreu} \end{cases}$$

Exemplo: quantas caras esperamos ao lançarmos n moedas?

- ▶ seja X_i a variável indicadora do evento
“o i -ésimo lançamento deu cara”
- ▶ seja X o número de caras sorteadas
- ▶ assim, o número de caras esperado é

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = \sum_{i=1}^n 1/2 = n/2$$

- ▶ note que $E[X_i] = \Pr\{X_i = 1\} \cdot 1 + \Pr\{X_i = 0\} \cdot 0 = 1/2$

Variáveis indicadoras

A variável indicadora de um evento A é a variável aleatória

$$I\{A\} = \begin{cases} 1 & \text{se evento } A \text{ ocorreu} \\ 0 & \text{se evento } A \text{ não ocorreu} \end{cases}$$

Exemplo: quantas caras esperamos ao lançarmos n moedas?

- ▶ seja X_i a variável indicadora do evento
"o i -ésimo lançamento deu cara"
- ▶ seja X o número de caras sorteadas
- ▶ assim, o número de caras esperado é

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = \sum_{i=1}^n 1/2 = n/2$$

- ▶ note que $E[X_i] = \Pr\{X_i = 1\} \cdot 1 + \Pr\{X_i = 0\} \cdot 0 = 1/2$

Variáveis indicadoras

A variável indicadora de um evento A é a variável aleatória

$$I\{A\} = \begin{cases} 1 & \text{se evento } A \text{ ocorreu} \\ 0 & \text{se evento } A \text{ não ocorreu} \end{cases}$$

Exemplo: quantas caras esperamos ao lançarmos n moedas?

- ▶ seja X_i a variável indicadora do evento
“o i -ésimo lançamento deu cara”
- ▶ seja X o número de caras sorteadas
- ▶ assim, o número de caras esperado é

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = \sum_{i=1}^n 1/2 = n/2$$

- ▶ note que $E[X_i] = \Pr\{X_i = 1\} \cdot 1 + \Pr\{X_i = 0\} \cdot 0 = 1/2$

Variáveis indicadoras

A variável indicadora de um evento A é a variável aleatória

$$I\{A\} = \begin{cases} 1 & \text{se evento } A \text{ ocorreu} \\ 0 & \text{se evento } A \text{ não ocorreu} \end{cases}$$

Exemplo: quantas caras esperamos ao lançarmos n moedas?

- ▶ seja X_i a variável indicadora do evento
“o i -ésimo lançamento deu cara”
- ▶ seja X o número de caras sorteadas
- ▶ assim, o número de caras esperado é

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = \sum_{i=1}^n 1/2 = n/2$$

- ▶ note que $E[X_i] = \Pr\{X_i = 1\} \cdot 1 + \Pr\{X_i = 0\} \cdot 0 = 1/2$

Variáveis indicadoras

A variável indicadora de um evento A é a variável aleatória

$$I\{A\} = \begin{cases} 1 & \text{se evento } A \text{ ocorreu} \\ 0 & \text{se evento } A \text{ não ocorreu} \end{cases}$$

Exemplo: quantas caras esperamos ao lançarmos n moedas?

- ▶ seja X_i a variável indicadora do evento
“o i -ésimo lançamento deu cara”
- ▶ seja X o número de caras sorteadas
- ▶ assim, o número de caras esperado é

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = \sum_{i=1}^n 1/2 = n/2$$

- ▶ note que $E[X_i] = \Pr\{X_i = 1\} \cdot 1 + \Pr\{X_i = 0\} \cdot 0 = 1/2$

Variáveis indicadoras

A variável indicadora de um evento A é a variável aleatória

$$I\{A\} = \begin{cases} 1 & \text{se evento } A \text{ ocorreu} \\ 0 & \text{se evento } A \text{ não ocorreu} \end{cases}$$

Exemplo: quantas caras esperamos ao lançarmos n moedas?

- ▶ seja X_i a variável indicadora do evento
“o i -ésimo lançamento deu cara”
- ▶ seja X o número de caras sorteadas
- ▶ assim, o número de caras esperado é

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = \sum_{i=1}^n 1/2 = n/2$$

- ▶ note que $E[X_i] = \Pr\{X_i = 1\} \cdot 1 + \Pr\{X_i = 0\} \cdot 0 = 1/2$

Variáveis indicadoras

A variável indicadora de um evento A é a variável aleatória

$$I\{A\} = \begin{cases} 1 & \text{se evento } A \text{ ocorreu} \\ 0 & \text{se evento } A \text{ não ocorreu} \end{cases}$$

Exemplo: quantas caras esperamos ao lançarmos n moedas?

- ▶ seja X_i a variável indicadora do evento
“o i -ésimo lançamento deu cara”
- ▶ seja X o número de caras sorteadas
- ▶ assim, o número de caras esperado é

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = \sum_{i=1}^n 1/2 = n/2$$

- ▶ note que $E[X_i] = \Pr\{X_i = 1\} \cdot 1 + \Pr\{X_i = 0\} \cdot 0 = 1/2$

Série Harmônica

- ▶ A série harmônica é

$$H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

- ▶ Esta série é limitada superiormente da seguinte forma

$$H_n \leq \ln n + 1$$

- ▶ A série harmônica é

$$H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

- ▶ Esta série é limitada superiormente da seguinte forma

$$H_n \leq \ln n + 1$$

Análise probabilística e algoritmo aleatorizado

O problema do assistente

Suponha que queremos contratar um assistente

- ▶ vamos sempre entrevistar n candidatos
- ▶ entrevistar um candidato tem um custo pequeno c_i
- ▶ mas contratar um candidato tem um custo elevado c_h

Como garantir que teremos contratado o melhor assistente?

O problema do assistente

Suponha que queremos contratar um assistente

- ▶ vamos sempre entrevistar n candidatos
- ▶ entrevistar um candidato tem um custo pequeno c_i
- ▶ mas contratar um candidato tem um custo elevado c_h

Como garantir que teremos contratado o melhor assistente?

O problema do assistente

Suponha que queremos contratar um assistente

- ▶ vamos sempre entrevistar n candidatos
- ▶ entrevistar um candidato tem um custo pequeno c_i
- ▶ mas contratar um candidato tem um custo elevado c_h

Como garantir que teremos contratado o melhor assistente?

O problema do assistente

Suponha que queremos contratar um assistente

- ▶ vamos sempre entrevistar n candidatos
- ▶ entrevistar um candidato tem um custo pequeno c_i
- ▶ mas contratar um candidato tem um custo elevado c_h

Como garantir que teremos contratado o melhor assistente?

O problema do assistente

Suponha que queremos contratar um assistente

- ▶ vamos sempre entrevistar n candidatos
- ▶ entrevistar um candidato tem um custo pequeno c_i
- ▶ mas contratar um candidato tem um custo elevado c_h

Como garantir que teremos contratado o melhor assistente?

Um algoritmo aleatorizado

Se estivermos determinados a contratar o melhor:

CONTRATARASSISTENTE(n)

```
1  melhor  $\leftarrow$  0    ▷ candidato 0 é um candidato dummy
2  para  $i \leftarrow 1$  até  $n$ 
3      entreviste candidato  $i$ 
4      se candidato  $i$  é melhor que melhor
5          melhor  $\leftarrow i$ 
6      contrate candidato  $i$ 
```

Um algoritmo aleatorizado

Se estivermos determinados a contratar o melhor:

CONTRATARASSISTENTE(n)

```
1  melhor  $\leftarrow$  0   ▷ candidato 0 é um candidato dummy
2  para  $i \leftarrow 1$  até  $n$ 
3      entreviste candidato  $i$ 
4      se candidato  $i$  é melhor que melhor
5          melhor  $\leftarrow i$ 
6          contrate candidato  $i$ 
```

Custo dessa estratégia

Quanto irá custar contratar de acordo com esse algoritmo?

- ▶ sempre entrevistamos n candidatos
- ▶ suponha que contratamos m assistentes
- ▶ assim o custo associado ao algoritmo é $c_i n + c_h m$
- ▶ o custo varia com a ordem das entrevistas

Custo dessa estratégia

Quanto irá custar contratar de acordo com esse algoritmo?

- ▶ sempre entrevistamos n candidatos
- ▶ suponha que contratamos m assistentes
- ▶ assim o custo associado ao algoritmo é $c_i n + c_h m$
- ▶ o custo varia com a ordem das entrevistas

Custo dessa estratégia

Quanto irá custar contratar de acordo com esse algoritmo?

- ▶ sempre entrevistamos n candidatos
- ▶ suponha que contratamos m assistentes
- ▶ assim o custo associado ao algoritmo é $c_i n + c_h m$
- ▶ o custo varia com a ordem das entrevistas

Custo dessa estratégia

Quanto irá custar contratar de acordo com esse algoritmo?

- ▶ sempre entrevistamos n candidatos
- ▶ suponha que contratamos m assistentes
- ▶ assim o custo associado ao algoritmo é $c_i n + c_h m$
- ▶ o custo varia com a ordem das entrevistas

Custo dessa estratégia

Quanto irá custar contratar de acordo com esse algoritmo?

- ▶ sempre entrevistamos n candidatos
- ▶ suponha que contratamos m assistentes
- ▶ assim o custo associado ao algoritmo é $c_i n + c_h m$
- ▶ o custo varia com a ordem das entrevistas

Análise probabilística

Tradicionalmente, analisamos o **pior caso**

- ▶ qual o maior valor que pode ser gasto?
- ▶ em um pior caso, contratamos todos os assistentes
- ▶ assim o custo é $O(c_h n)$

Vamos usar **probabilidade** para fazer outros tipos de análise:

- ▶ **tempo de execução esperado**
 - ▶ quanto tempo esperamos gastar?
 - ▶ a entrada é uma variável aleatória
 - ▶ precisamos da distribuição de probabilidade da entrada
- ▶ **tempo de execução médio**
 - ▶ qual o tempo médio entre todas as entradas?
 - ▶ analogamente, supomos uma distribuição uniforme
 - ▶ então cada permutação tem a mesma probabilidade

Análise probabilística

Tradicionalmente, analisamos o **pior caso**

- ▶ qual o maior valor que pode ser gasto?
- ▶ em um pior caso, contratamos todos os assistentes
- ▶ assim o custo é $O(c_h n)$

Vamos usar **probabilidade** para fazer outros tipos de análise:

- ▶ **tempo de execução esperado**
 - ▶ quanto tempo esperamos gastar?
 - ▶ a entrada é uma variável aleatória
 - ▶ precisamos da distribuição de probabilidade da entrada
- ▶ **tempo de execução médio**
 - ▶ qual o tempo médio entre todas as entradas?
 - ▶ analogamente, supomos uma distribuição uniforme
 - ▶ então cada permutação tem a mesma probabilidade

Análise probabilística

Tradicionalmente, analisamos o **pior caso**

- ▶ qual o maior valor que pode ser gasto?
- ▶ em um pior caso, contratamos todos os assistentes
- ▶ assim o custo é $O(c_h n)$

Vamos usar **probabilidade** para fazer outros tipos de análise:

- ▶ **tempo de execução esperado**
 - ▶ quanto tempo esperamos gastar?
 - ▶ a entrada é uma variável aleatória
 - ▶ precisamos da distribuição de probabilidade da entrada
- ▶ **tempo de execução médio**
 - ▶ qual o tempo médio entre todas as entradas?
 - ▶ analogamente, supomos uma distribuição uniforme
 - ▶ então cada permutação tem a mesma probabilidade

Análise probabilística

Tradicionalmente, analisamos o **pior caso**

- ▶ qual o maior valor que pode ser gasto?
- ▶ em um pior caso, contratamos todos os assistentes
- ▶ assim o custo é $O(c_h n)$

Vamos usar **probabilidade** para fazer outros tipos de análise:

- ▶ **tempo de execução esperado**
 - ▶ quanto tempo esperamos gastar?
 - ▶ a entrada é uma variável aleatória
 - ▶ precisamos da distribuição de probabilidade da entrada
- ▶ **tempo de execução médio**
 - ▶ qual o tempo médio entre todas as entradas?
 - ▶ analogamente, supomos uma distribuição uniforme
 - ▶ então cada permutação tem a mesma probabilidade

Análise probabilística

Tradicionalmente, analisamos o **pior caso**

- ▶ qual o maior valor que pode ser gasto?
- ▶ em um pior caso, contratamos todos os assistentes
- ▶ assim o custo é $O(c_h n)$

Vamos usar **probabilidade** para fazer outros tipos de análise:

- ▶ **tempo de execução esperado**
 - ▶ quanto tempo esperamos gastar?
 - ▶ a entrada é uma variável aleatória
 - ▶ precisamos da distribuição de probabilidade da entrada
- ▶ **tempo de execução médio**
 - ▶ qual o tempo médio entre todas as entradas?
 - ▶ analogamente, supomos uma distribuição uniforme
 - ▶ então cada permutação tem a mesma probabilidade

Análise probabilística

Tradicionalmente, analisamos o **pior caso**

- ▶ qual o maior valor que pode ser gasto?
- ▶ em um pior caso, contratamos todos os assistentes
- ▶ assim o custo é $O(c_h n)$

Vamos usar **probabilidade** para fazer outros tipos de análise:

- ▶ **tempo de execução esperado**
 - ▶ quanto tempo esperamos gastar?
 - ▶ a entrada é uma variável aleatória
 - ▶ precisamos da distribuição de probabilidade da entrada
- ▶ **tempo de execução médio**
 - ▶ qual o tempo médio entre todas as entradas?
 - ▶ analogamente, supomos uma distribuição uniforme
 - ▶ então cada permutação tem a mesma probabilidade

Análise probabilística

Tradicionalmente, analisamos o **pior caso**

- ▶ qual o maior valor que pode ser gasto?
- ▶ em um pior caso, contratamos todos os assistentes
- ▶ assim o custo é $O(c_h n)$

Vamos usar **probabilidade** para fazer outros tipos de análise:

- ▶ **tempo de execução esperado**
 - ▶ quanto tempo esperamos gastar?
 - ▶ a entrada é uma variável aleatória
 - ▶ precisamos da distribuição de probabilidade da entrada
- ▶ **tempo de execução médio**
 - ▶ qual o tempo médio entre todas as entradas?
 - ▶ analogamente, supomos uma distribuição uniforme
 - ▶ então cada permutação tem a mesma probabilidade

Análise probabilística

Tradicionalmente, analisamos o **pior caso**

- ▶ qual o maior valor que pode ser gasto?
- ▶ em um pior caso, contratamos todos os assistentes
- ▶ assim o custo é $O(c_h n)$

Vamos usar **probabilidade** para fazer outros tipos de análise:

- ▶ **tempo de execução esperado**
 - ▶ quanto tempo esperamos gastar?
 - ▶ a entrada é uma variável aleatória
 - ▶ precisamos da distribuição de probabilidade da entrada
- ▶ **tempo de execução médio**
 - ▶ qual o tempo médio entre todas as entradas?
 - ▶ analogamente, supomos uma distribuição uniforme
 - ▶ então cada permutação tem a mesma probabilidade

Análise probabilística

Tradicionalmente, analisamos o **pior caso**

- ▶ qual o maior valor que pode ser gasto?
- ▶ em um pior caso, contratamos todos os assistentes
- ▶ assim o custo é $O(c_h n)$

Vamos usar **probabilidade** para fazer outros tipos de análise:

- ▶ **tempo de execução esperado**
 - ▶ quanto tempo esperamos gastar?
 - ▶ a entrada é uma variável aleatória
 - ▶ precisamos da distribuição de probabilidade da entrada
- ▶ **tempo de execução médio**
 - ▶ qual o tempo médio entre todas as entradas?
 - ▶ analogamente, supomos uma distribuição uniforme
 - ▶ então cada permutação tem a mesma probabilidade

Análise probabilística

Tradicionalmente, analisamos o **pior caso**

- ▶ qual o maior valor que pode ser gasto?
- ▶ em um pior caso, contratamos todos os assistentes
- ▶ assim o custo é $O(c_h n)$

Vamos usar **probabilidade** para fazer outros tipos de análise:

- ▶ **tempo de execução esperado**
 - ▶ quanto tempo esperamos gastar?
 - ▶ a entrada é uma variável aleatória
 - ▶ precisamos da distribuição de probabilidade da entrada
- ▶ **tempo de execução médio**
 - ▶ qual o tempo médio entre todas as entradas?
 - ▶ analogamente, supomos uma distribuição uniforme
 - ▶ então cada permutação tem a mesma probabilidade

Análise probabilística

Tradicionalmente, analisamos o **pior caso**

- ▶ qual o maior valor que pode ser gasto?
- ▶ em um pior caso, contratamos todos os assistentes
- ▶ assim o custo é $O(c_h n)$

Vamos usar **probabilidade** para fazer outros tipos de análise:

- ▶ **tempo de execução esperado**
 - ▶ quanto tempo esperamos gastar?
 - ▶ a entrada é uma variável aleatória
 - ▶ precisamos da distribuição de probabilidade da entrada
- ▶ **tempo de execução médio**
 - ▶ qual o tempo médio entre todas as entradas?
 - ▶ analogamente, supomos uma distribuição uniforme
 - ▶ então cada permutação tem a mesma probabilidade

Análise probabilística

Tradicionalmente, analisamos o **pior caso**

- ▶ qual o maior valor que pode ser gasto?
- ▶ em um pior caso, contratamos todos os assistentes
- ▶ assim o custo é $O(c_h n)$

Vamos usar **probabilidade** para fazer outros tipos de análise:

- ▶ **tempo de execução esperado**
 - ▶ quanto tempo esperamos gastar?
 - ▶ a entrada é uma variável aleatória
 - ▶ precisamos da distribuição de probabilidade da entrada
- ▶ **tempo de execução médio**
 - ▶ qual o tempo médio entre todas as entradas?
 - ▶ analogamente, supomos uma distribuição uniforme
 - ▶ então cada permutação tem a mesma probabilidade

Análise probabilística

Tradicionalmente, analisamos o **pior caso**

- ▶ qual o maior valor que pode ser gasto?
- ▶ em um pior caso, contratamos todos os assistentes
- ▶ assim o custo é $O(c_h n)$

Vamos usar **probabilidade** para fazer outros tipos de análise:

- ▶ **tempo de execução esperado**
 - ▶ quanto tempo esperamos gastar?
 - ▶ a entrada é uma variável aleatória
 - ▶ precisamos da distribuição de probabilidade da entrada
- ▶ **tempo de execução médio**
 - ▶ qual o tempo médio entre todas as entradas?
 - ▶ analogamente, supomos uma distribuição uniforme
 - ▶ então cada permutação tem a mesma probabilidade

Análise de CONTRATARASSISTENTE

Começamos definindo uma variável indicadora

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se o candidato } i \text{ é contratado} \\ 0 & \text{se o candidato } i \text{ não é contratado} \end{cases}$$

Precisamos calcular

$$E[X_i] = \Pr\{\text{candidato } i \text{ ser contratado}\}$$

- ▶ o candidatos i é contratado na linha 6 do algoritmo
- ▶ isso acontece se i é melhor entre candidatos $1, 2, \dots, i$
- ▶ como supomos uma distribuição, cada um entre eles tem a mesma chance ser o melhor
- ▶ assim $E[X_i] = \Pr\{\text{candidato } i \text{ ser contratado}\} = 1/i$

Análise de CONTRATARASSISTENTE

Começamos definindo uma variável indicadora

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se o candidato } i \text{ é contratado} \\ 0 & \text{se o candidato } i \text{ não é contratado} \end{cases}$$

Precisamos calcular

$$E[X_i] = \Pr\{\text{candidato } i \text{ ser contratado}\}$$

- ▶ o candidatos i é contratado na linha 6 do algoritmo
- ▶ isso acontece se i é melhor entre candidatos $1, 2, \dots, i$
- ▶ como supomos uma distribuição, cada um entre eles tem a mesma chance ser o melhor
- ▶ assim $E[X_i] = \Pr\{\text{candidato } i \text{ ser contratado}\} = 1/i$

Análise de CONTRATAR ASSISTENTE

Começamos definindo uma variável indicadora

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se o candidato } i \text{ é contratado} \\ 0 & \text{se o candidato } i \text{ não é contratado} \end{cases}$$

Precisamos calcular

$$E[X_i] = \Pr\{\text{candidato } i \text{ ser contratado}\}$$

- ▶ o candidato i é contratado na linha 6 do algoritmo
- ▶ isso acontece se i é melhor entre candidatos $1, 2, \dots, i$
- ▶ como supomos uma distribuição, cada um entre eles tem a mesma chance ser o melhor
- ▶ assim $E[X_i] = \Pr\{\text{candidato } i \text{ ser contratado}\} = 1/i$

Análise de CONTRATAR ASSISTENTE

Começamos definindo uma variável indicadora

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se o candidato } i \text{ é contratado} \\ 0 & \text{se o candidato } i \text{ não é contratado} \end{cases}$$

Precisamos calcular

$$E[X_i] = \Pr \{ \text{candidato } i \text{ ser contratado} \}$$

- ▶ o candidato i é contratado na linha 6 do algoritmo
- ▶ isso acontece se i é melhor entre candidatos $1, 2, \dots, i$
- ▶ como supomos uma distribuição, cada um entre eles tem a mesma chance ser o melhor
- ▶ assim $E[X_i] = \Pr \{ \text{candidato } i \text{ ser contratado} \} = 1/i$

Análise de CONTRATAR ASSISTENTE

Começamos definindo uma variável indicadora

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se o candidato } i \text{ é contratado} \\ 0 & \text{se o candidato } i \text{ não é contratado} \end{cases}$$

Precisamos calcular

$$E[X_i] = \Pr \{ \text{candidato } i \text{ ser contratado} \}$$

- ▶ o candidato i é contratado na linha 6 do algoritmo
- ▶ isso acontece se i é melhor entre candidatos $1, 2, \dots, i$
- ▶ como supomos uma distribuição, cada um entre eles tem a mesma chance ser o melhor
- ▶ assim $E[X_i] = \Pr \{ \text{candidato } i \text{ ser contratado} \} = 1/i$

Análise de CONTRATAR ASSISTENTE

Começamos definindo uma variável indicadora

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se o candidato } i \text{ é contratado} \\ 0 & \text{se o candidato } i \text{ não é contratado} \end{cases}$$

Precisamos calcular

$$E[X_i] = \Pr \{ \text{candidato } i \text{ ser contratado} \}$$

- ▶ o candidato i é contratado na linha 6 do algoritmo
- ▶ isso acontece se i é melhor entre candidatos $1, 2, \dots, i$
- ▶ como supomos uma distribuição, cada um entre eles tem a mesma chance ser o melhor
- ▶ assim $E[X_i] = \Pr \{ \text{candidato } i \text{ ser contratado} \} = 1/i$

Análise de CONTRATAR ASSISTENTE

Começamos definindo uma variável indicadora

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se o candidato } i \text{ é contratado} \\ 0 & \text{se o candidato } i \text{ não é contratado} \end{cases}$$

Precisamos calcular

$$E[X_i] = \Pr \{ \text{candidato } i \text{ ser contratado} \}$$

- ▶ o candidato i é contratado na linha 6 do algoritmo
- ▶ isso acontece se i é melhor entre candidatos $1, 2, \dots, i$
- ▶ como supomos uma distribuição, cada um entre eles tem a mesma chance ser o melhor
- ▶ assim $E[X_i] = \Pr \{ \text{candidato } i \text{ ser contratado} \} = 1/i$

Análise de CONTRATAR ASSISTENTE

Começamos definindo uma variável indicadora

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se o candidato } i \text{ é contratado} \\ 0 & \text{se o candidato } i \text{ não é contratado} \end{cases}$$

Precisamos calcular

$$E[X_i] = \Pr \{ \text{candidato } i \text{ ser contratado} \}$$

- ▶ o candidato i é contratado na linha 6 do algoritmo
- ▶ isso acontece se i é melhor entre candidatos $1, 2, \dots, i$
- ▶ como supomos uma distribuição, cada um entre eles tem a mesma chance ser o melhor
- ▶ assim $E[X_i] = \Pr \{ \text{candidato } i \text{ ser contratado} \} = 1/i$

Análise de CONTRATARASSISTENTE (cont)

Agora podemos estimar o custo esperado

- ▶ seja X a variável que guarda o número de contratações
- ▶ então $X = \sum_{i=1}^n X_i$

$$\begin{aligned} E[X] &= E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] \\ &= \sum_{i=1}^n E[X_i] \\ &= \sum_{i=1}^n 1/i \\ &= \ln n + O(1) \end{aligned}$$

Assim, o custo médio de contratação é $O(c_h \ln n)$!

Análise de CONTRATARASSISTENTE (cont)

Agora podemos estimar o custo esperado

- ▶ seja X a variável que guarda o número de contratações
- ▶ então $X = \sum_{i=1}^n X_i$

$$\begin{aligned} E[X] &= E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] \\ &= \sum_{i=1}^n E[X_i] \\ &= \sum_{i=1}^n 1/i \\ &= \ln n + O(1) \end{aligned}$$

Assim, o custo médio de contratação é $O(c_h \ln n)$!

Análise de CONTRATARASSISTENTE (cont)

Agora podemos estimar o custo esperado

- ▶ seja X a variável que guarda o número de contratações
- ▶ então $X = \sum_{i=1}^n X_i$

$$\begin{aligned} E[X] &= E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] \\ &= \sum_{i=1}^n E[X_i] \\ &= \sum_{i=1}^n 1/i \\ &= \ln n + O(1) \end{aligned}$$

Assim, o custo médio de contratação é $O(c_h \ln n)$!

Análise de CONTRATARASSISTENTE (cont)

Agora podemos estimar o custo esperado

- ▶ seja X a variável que guarda o número de contratações
- ▶ então $X = \sum_{i=1}^n X_i$

$$\begin{aligned} E[X] &= E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] \\ &= \sum_{i=1}^n E[X_i] \\ &= \sum_{i=1}^n 1/i \\ &= \ln n + O(1) \end{aligned}$$

Assim, o custo médio de contratação é $O(c_h \ln n)$!

Análise de CONTRATARASSISTENTE (cont)

Agora podemos estimar o custo esperado

- ▶ seja X a variável que guarda o número de contratações
- ▶ então $X = \sum_{i=1}^n X_i$

$$\begin{aligned} E[X] &= E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] \\ &= \sum_{i=1}^n E[X_i] \\ &= \sum_{i=1}^n 1/i \\ &= \ln n + O(1) \end{aligned}$$

Assim, o custo médio de contratação é $O(c_h \ln n)$!

Análise de CONTRATARASSISTENTE (cont)

Agora podemos estimar o custo esperado

- ▶ seja X a variável que guarda o número de contratações
- ▶ então $X = \sum_{i=1}^n X_i$

$$\begin{aligned} E[X] &= E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] \\ &= \sum_{i=1}^n E[X_i] \\ &= \sum_{i=1}^n 1/i \\ &= \ln n + O(1) \end{aligned}$$

Assim, o custo médio de contratação é $O(c_h \ln n)$!

Análise de CONTRATARASSISTENTE (cont)

Agora podemos estimar o custo esperado

- ▶ seja X a variável que guarda o número de contratações
- ▶ então $X = \sum_{i=1}^n X_i$

$$\begin{aligned} E[X] &= E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] \\ &= \sum_{i=1}^n E[X_i] \\ &= \sum_{i=1}^n 1/i \\ &= \ln n + O(1) \end{aligned}$$

Assim, o custo médio de contratação é $O(c_h \ln n)$!

Análise de CONTRATARASSISTENTE (cont)

Agora podemos estimar o custo esperado

- ▶ seja X a variável que guarda o número de contratações
- ▶ então $X = \sum_{i=1}^n X_i$

$$\begin{aligned} E[X] &= E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] \\ &= \sum_{i=1}^n E[X_i] \\ &= \sum_{i=1}^n 1/i \\ &= \ln n + O(1) \end{aligned}$$

Assim, o custo médio de contratação é $O(c_h \ln n)$!

Algoritmos aleatorizados

Algumas considerações sobre a análise anterior

- ▶ entrevistamos na ordem dada
- ▶ presumimos que cada ordem tem a mesma probabilidade
- ▶ isso nem sempre é razoável

Podemos garantir essa propriedade de outra forma

- ▶ primeiro recebemos toda a lista de candidatos
- ▶ depois permutamos aleatoriamente essa lista
- ▶ garantimos que cada ordem tem a mesma probabilidade

Algoritmos aleatorizados

- ▶ executamos uma ou mais instruções aleatórias
- ▶ para uma entrada fixa, pode haver diferentes execuções
- ▶ o tempo de execução é em si uma variável aleatória

Algoritmos aleatorizados

Algumas considerações sobre a análise anterior

- ▶ entrevistamos na ordem dada
- ▶ presumimos que cada ordem tem a mesma probabilidade
- ▶ isso nem sempre é razoável

Podemos garantir essa propriedade de outra forma

- ▶ primeiro recebemos toda a lista de candidatos
- ▶ depois permutamos aleatoriamente essa lista
- ▶ garantimos que cada ordem tem a mesma probabilidade

Algoritmos aleatorizados

- ▶ executamos uma ou mais instruções aleatórias
- ▶ para uma entrada fixa, pode haver diferentes execuções
- ▶ o tempo de execução é em si uma variável aleatória

Algoritmos aleatorizados

Algumas considerações sobre a análise anterior

- ▶ entrevistamos na ordem dada
- ▶ presumimos que cada ordem tem a mesma probabilidade
- ▶ isso nem sempre é razoável

Podemos garantir essa propriedade de outra forma

- ▶ primeiro recebemos toda a lista de candidatos
- ▶ depois permutamos aleatoriamente essa lista
- ▶ garantimos que cada ordem tem a mesma probabilidade

Algoritmos aleatorizados

- ▶ executamos uma ou mais instruções aleatórias
- ▶ para uma entrada fixa, pode haver diferentes execuções
- ▶ o tempo de execução é em si uma variável aleatória

Algoritmos aleatorizados

Algumas considerações sobre a análise anterior

- ▶ entrevistamos na ordem dada
- ▶ presumimos que cada ordem tem a mesma probabilidade
- ▶ isso nem sempre é razoável

Podemos garantir essa propriedade de outra forma

- ▶ primeiro recebemos toda a lista de candidatos
- ▶ depois permutamos aleatoriamente essa lista
- ▶ garantimos que cada ordem tem a mesma probabilidade

Algoritmos aleatorizados

- ▶ executamos uma ou mais instruções aleatórias
- ▶ para uma entrada fixa, pode haver diferentes execuções
- ▶ o tempo de execução é em si uma variável aleatória

Algoritmos aleatorizados

Algumas considerações sobre a análise anterior

- ▶ entrevistamos na ordem dada
- ▶ presumimos que cada ordem tem a mesma probabilidade
- ▶ isso nem sempre é razoável

Podemos garantir essa propriedade de outra forma

- ▶ primeiro recebemos toda a lista de candidatos
- ▶ depois permutamos aleatoriamente essa lista
- ▶ garantimos que cada ordem tem a mesma probabilidade

Algoritmos aleatorizados

- ▶ executamos uma ou mais instruções aleatórias
- ▶ para uma entrada fixa, pode haver diferentes execuções
- ▶ o tempo de execução é em si uma variável aleatória

Algoritmos aleatorizados

Algumas considerações sobre a análise anterior

- ▶ entrevistamos na ordem dada
- ▶ presumimos que cada ordem tem a mesma probabilidade
- ▶ isso nem sempre é razoável

Podemos garantir essa propriedade de outra forma

- ▶ primeiro recebemos toda a lista de candidatos
- ▶ depois permutamos aleatoriamente essa lista
- ▶ garantimos que cada ordem tem a mesma probabilidade

Algoritmos aleatorizados

- ▶ executamos uma ou mais instruções aleatórias
- ▶ para uma entrada fixa, pode haver diferentes execuções
- ▶ o tempo de execução é em si uma variável aleatória

Algoritmos aleatorizados

Algumas considerações sobre a análise anterior

- ▶ entrevistamos na ordem dada
- ▶ presumimos que cada ordem tem a mesma probabilidade
- ▶ isso nem sempre é razoável

Podemos garantir essa propriedade de outra forma

- ▶ primeiro recebemos toda a lista de candidatos
- ▶ depois permutamos **aleatoriamente** essa lista
- ▶ garantimos que cada ordem tem a mesma probabilidade

Algoritmos aleatorizados

- ▶ executamos uma ou mais instruções aleatórias
- ▶ para uma entrada fixa, pode haver diferentes execuções
- ▶ o tempo de execução é em si uma variável aleatória

Algoritmos aleatorizados

Algumas considerações sobre a análise anterior

- ▶ entrevistamos na ordem dada
- ▶ presumimos que cada ordem tem a mesma probabilidade
- ▶ isso nem sempre é razoável

Podemos garantir essa propriedade de outra forma

- ▶ primeiro recebemos toda a lista de candidatos
- ▶ depois permutamos **aleatoriamente** essa lista
- ▶ garantimos que cada ordem tem a mesma probabilidade

Algoritmos aleatorizados

- ▶ executamos uma ou mais instruções aleatórias
- ▶ para uma entrada fixa, pode haver diferentes execuções
- ▶ o tempo de execução é em si uma variável aleatória

Algoritmos aleatorizados

Algumas considerações sobre a análise anterior

- ▶ entrevistamos na ordem dada
- ▶ presumimos que cada ordem tem a mesma probabilidade
- ▶ isso nem sempre é razoável

Podemos garantir essa propriedade de outra forma

- ▶ primeiro recebemos toda a lista de candidatos
- ▶ depois permutamos **aleatoriamente** essa lista
- ▶ garantimos que cada ordem tem a mesma probabilidade

Algoritmos aleatorizados

- ▶ executamos uma ou mais instruções aleatórias
- ▶ para uma entrada fixa, pode haver diferentes execuções
- ▶ o tempo de execução é em si uma variável aleatória

Algoritmos aleatorizados

Algumas considerações sobre a análise anterior

- ▶ entrevistamos na ordem dada
- ▶ presumimos que cada ordem tem a mesma probabilidade
- ▶ isso nem sempre é razoável

Podemos garantir essa propriedade de outra forma

- ▶ primeiro recebemos toda a lista de candidatos
- ▶ depois permutamos **aleatoriamente** essa lista
- ▶ garantimos que cada ordem tem a mesma probabilidade

Algoritmos aleatorizados

- ▶ executamos uma ou mais instruções aleatórias
- ▶ para uma entrada fixa, pode haver diferentes execuções
- ▶ o tempo de execução é em si uma variável aleatória

Algoritmos aleatorizados

Algumas considerações sobre a análise anterior

- ▶ entrevistamos na ordem dada
- ▶ presumimos que cada ordem tem a mesma probabilidade
- ▶ isso nem sempre é razoável

Podemos garantir essa propriedade de outra forma

- ▶ primeiro recebemos toda a lista de candidatos
- ▶ depois permutamos **aleatoriamente** essa lista
- ▶ garantimos que cada ordem tem a mesma probabilidade

Algoritmos aleatorizados

- ▶ executamos uma ou mais instruções aleatórias
- ▶ para uma entrada fixa, pode haver diferentes execuções
- ▶ o tempo de execução é em si uma variável aleatória

Algoritmos aleatorizados

Algumas considerações sobre a análise anterior

- ▶ entrevistamos na ordem dada
- ▶ presumimos que cada ordem tem a mesma probabilidade
- ▶ isso nem sempre é razoável

Podemos garantir essa propriedade de outra forma

- ▶ primeiro recebemos toda a lista de candidatos
- ▶ depois permutamos aleatoriamente essa lista
- ▶ garantimos que cada ordem tem a mesma probabilidade

Algoritmos aleatorizados

- ▶ executamos uma ou mais instruções aleatórias
- ▶ para uma entrada fixa, pode haver diferentes execuções
- ▶ o tempo de execução é em si uma variável aleatória

Versão aleatorizada de CONTRATARASSISTENTE

CONTRATARASSISTENTEALEATORIZADO(n)

```
1  permute aleatoriamente a lista dos candidatos
2  melhor  $\leftarrow 0$   ▷ candidato 0 é um candidato dummy
3  para  $i \leftarrow 1$  até  $n$ 
4      entreviste candidato  $i$ 
5      se candidato  $i$  é melhor que melhor
6          melhor  $\leftarrow i$ 
7          contrate candidato  $i$ 
```

O custo esperado de contratação é $O(c_h \ln n)$!

- ▶ após a linha 1, cada ordem aparece com a mesma chance
- ▶ temos uma situação completamente análoga à da análise de CONTRATARASSISTENTE

Versão aleatorizada de CONTRATARASSISTENTE

CONTRATARASSISTENTEALEATORIZADO(n)

```
1  permuta aleatoriamente a lista dos candidatos
2  melhor  $\leftarrow 0$    $\triangleright$  candidato 0 é um candidato dummy
3  para  $i \leftarrow 1$  até  $n$ 
4      entreviste candidato  $i$ 
5      se candidato  $i$  é melhor que melhor
6          melhor  $\leftarrow i$ 
7      contrate candidato  $i$ 
```

O custo esperado de contratação é $O(c_h \ln n)$!

- ▶ após a linha 1, cada ordem aparece com a mesma chance
- ▶ temos uma situação completamente análoga à da análise de CONTRATARASSISTENTE

Versão aleatorizada de CONTRATARASSISTENTE

CONTRATARASSISTENTEALEATORIZADO(n)

```
1  permute aleatoriamente a lista dos candidatos
2  melhor  $\leftarrow 0$   ▷ candidato 0 é um candidato dummy
3  para  $i \leftarrow 1$  até  $n$ 
4      entreviste candidato  $i$ 
5      se candidato  $i$  é melhor que melhor
6          melhor  $\leftarrow i$ 
7      contrate candidato  $i$ 
```

O custo esperado de contratação é $O(c_h \ln n)$!

- ▶ após a linha 1, cada ordem aparece com a mesma chance
- ▶ temos uma situação completamente análoga à da análise de CONTRATARASSISTENTE

Versão aleatorizada de CONTRATARASSISTENTE

CONTRATARASSISTENTEALEATORIZADO(n)

```
1  permute aleatoriamente a lista dos candidatos
2  melhor  $\leftarrow 0$   ▷ candidato 0 é um candidato dummy
3  para  $i \leftarrow 1$  até  $n$ 
4      entreviste candidato  $i$ 
5      se candidato  $i$  é melhor que melhor
6          melhor  $\leftarrow i$ 
7          contrate candidato  $i$ 
```

O custo esperado de contratação é $O(c_h \ln n)$!

- ▶ após a linha 1, cada ordem aparece com a mesma chance
- ▶ temos uma situação completamente análoga à da análise de CONTRATARASSISTENTE

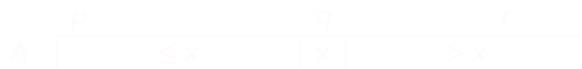
Quick Sort

QuickSort

QUICKSORT é baseado em **divisão e conquista**.

Divisão:

- ▶ divida em subvetores $A[p \dots q-1]$ e $A[q+1 \dots r]$
- ▶ tais que $A[p \dots q-1] \leq A[q] < A[q+1 \dots r]$



Conquista:

- ▶ ordene os subvetores recursivamente

Combinação:

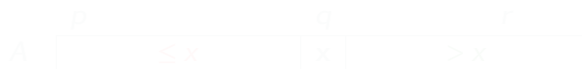
- ▶ nada a fazer, o vetor está ordenado.

QuickSort

QUICKSORT é baseado em **divisão e conquista**.

Divisão:

- ▶ divida em subvetores $A[p \dots q-1]$ e $A[q+1 \dots r]$
- ▶ tais que $A[p \dots q-1] \leq A[q] < A[q+1 \dots r]$



Conquista:

- ▶ ordene os subvetores recursivamente

Combinação:

- ▶ nada a fazer, o vetor está ordenado.

QuickSort

QUICKSORT é baseado em **divisão e conquista**.

Divisão:

- ▶ divida em subvetores $A[p \dots q-1]$ e $A[q+1 \dots r]$
- ▶ tais que $A[p \dots q-1] \leq A[q] < A[q+1 \dots r]$



Conquista:

- ▶ ordene os subvetores recursivamente

Combinação:

- ▶ nada a fazer, o vetor está ordenado.

QuickSort

QUICKSORT é baseado em **divisão e conquista**.

Divisão:

- ▶ divida em subvetores $A[p \dots q-1]$ e $A[q+1 \dots r]$
- ▶ tais que $A[p \dots q-1] \leq A[q] < A[q+1 \dots r]$



Conquista:

- ▶ ordene os subvetores recursivamente

Combinação:

- ▶ nada a fazer, o vetor está ordenado.

QuickSort

QUICKSORT é baseado em **divisão e conquista**.

Divisão:

- ▶ divida em subvetores $A[p \dots q-1]$ e $A[q+1 \dots r]$
- ▶ tais que $A[p \dots q-1] \leq A[q] < A[q+1 \dots r]$



Conquista:

- ▶ ordene os subvetores recursivamente

Combinação:

- ▶ nada a fazer, o vetor está ordenado.

QuickSort

QUICKSORT é baseado em **divisão e conquista**.

Divisão:

- ▶ divida em subvetores $A[p \dots q-1]$ e $A[q+1 \dots r]$
- ▶ tais que $A[p \dots q-1] \leq A[q] < A[q+1 \dots r]$



Conquista:

- ▶ ordene os subvetores recursivamente

Combinação:

- ▶ nada a fazer, o vetor está ordenado.

QuickSort

QUICKSORT é baseado em **divisão e conquista**.

Divisão:

- ▶ divida em subvetores $A[p \dots q-1]$ e $A[q+1 \dots r]$
- ▶ tais que $A[p \dots q-1] \leq A[q] < A[q+1 \dots r]$



Conquista:

- ▶ ordene os subvetores recursivamente

Combinação:

- ▶ nada a fazer, o vetor está ordenado.

QuickSort

QUICKSORT é baseado em **divisão e conquista**.

Divisão:

- ▶ divida em subvetores $A[p \dots q-1]$ e $A[q+1 \dots r]$
- ▶ tais que $A[p \dots q-1] \leq A[q] < A[q+1 \dots r]$



Conquista:

- ▶ ordene os subvetores recursivamente

Combinação:

- ▶ nada a fazer, o vetor está ordenado.

QuickSort

QUICKSORT é baseado em **divisão e conquista**.

Divisão:

- ▶ divida em subvetores $A[p \dots q-1]$ e $A[q+1 \dots r]$
- ▶ tais que $A[p \dots q-1] \leq A[q] < A[q+1 \dots r]$



Conquista:

- ▶ ordene os subvetores recursivamente

Combinação:

- ▶ nada a fazer, o vetor está ordenado.

Problema do particionamento

Problema

Entrada:

- ▶ um vetor $A[p \dots r]$

Saída:

- ▶ um índice q , com $p \leq q \leq r$, tal que

$$A[p \dots q-1] \leq A[q] < A[q+1 \dots r]$$

Entrada:

	p								r	
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

Saída:

	p				q				r	
A	33	11	22	33	44	55	99	66	77	88

Problema do particionamento

Problema

Entrada:

- ▶ um vetor $A[p \dots r]$

Saída:

- ▶ um índice q , com $p \leq q \leq r$, tal que

$$A[p \dots q-1] \leq A[q] < A[q+1 \dots r]$$

Entrada:

	p									r
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

Saída:

	p				q					r
A	33	11	22	33	44	55	99	66	77	88

Problema do particionamento

Problema

Entrada:

- ▶ um vetor $A[p \dots r]$

Saída:

- ▶ um índice q , com $p \leq q \leq r$, tal que

$$A[p \dots q-1] \leq A[q] < A[q+1 \dots r]$$

Entrada:

	p								r	
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

Saída:

	p				q				r	
A	33	11	22	33	44	55	99	66	77	88

Problema do particionamento

Problema

Entrada:

- ▶ um vetor $A[p \dots r]$

Saída:

- ▶ um índice q , com $p \leq q \leq r$, tal que

$$A[p \dots q-1] \leq A[q] < A[q+1 \dots r]$$

Entrada:

	p								r	
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

Saída:

	p				q				r	
A	33	11	22	33	44	55	99	66	77	88

Problema do particionamento

Problema

Entrada:

- ▶ um vetor $A[p \dots r]$

Saída:

- ▶ um índice q , com $p \leq q \leq r$, tal que

$$A[p \dots q-1] \leq A[q] < A[q+1 \dots r]$$

Entrada:

	p								r	
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

Saída:

	p				q				r	
A	33	11	22	33	44	55	99	66	77	88

Problema do particionamento

Problema

Entrada:

- ▶ um vetor $A[p \dots r]$

Saída:

- ▶ um índice q , com $p \leq q \leq r$, tal que

$$A[p \dots q-1] \leq A[q] < A[q+1 \dots r]$$

Entrada:

	p								r	
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

Saída:

	p				q				r	
A	33	11	22	33	44	55	99	66	77	88

Problema do particionamento

Problema

Entrada:

- ▶ um vetor $A[p \dots r]$

Saída:

- ▶ um índice q , com $p \leq q \leq r$, tal que

$$A[p \dots q-1] \leq A[q] < A[q+1 \dots r]$$

Entrada:

	p							r		
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

Saída:

	p				q				r	
A	33	11	22	33	44	55	99	66	77	88

Problema do particionamento

Problema

Entrada:

- ▶ um vetor $A[p \dots r]$

Saída:

- ▶ um índice q , com $p \leq q \leq r$, tal que

$$A[p \dots q-1] \leq A[q] < A[q+1 \dots r]$$

Entrada:

	p							r		
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

Saída:

	p				q				r	
A	33	11	22	33	44	55	99	66	77	88

Problema do particionamento

Problema

Entrada:

- ▶ um vetor $A[p \dots r]$

Saída:

- ▶ um índice q , com $p \leq q \leq r$, tal que

$$A[p \dots q-1] \leq A[q] < A[q+1 \dots r]$$

Entrada:

	p							r		
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

Saída:

	p				q				r	
A	33	11	22	33	44	55	99	66	77	88

Ideia:

- ▶ pivô x será o último elemento em $A[r]$
- ▶ índices i e j definem dois subvetores

$$A[p \dots i] \leq x \quad \text{e} \quad A[i+1 \dots j-1] > x$$

- ▶ varremos com j da primeira até a penúltima posição
 - ▶ se $A[j] \leq x$, trocamos $A[i+1]$ com $A[j]$ e incrementamos i
 - ▶ se $A[j] > x$, apenas continuamos

Ideia:

- ▶ pivô x será o último elemento em $A[r]$
- ▶ índices i e j definem dois subvetores

$$A[p \dots i] \leq x \quad \text{e} \quad A[i+1 \dots j-1] > x$$

- ▶ varremos com j da primeira até a penúltima posição
 - ▶ se $A[j] \leq x$, trocamos $A[i+1]$ com $A[j]$ e incrementamos i
 - ▶ se $A[j] > x$, apenas continuamos

Particionando

Ideia:

- ▶ pivô x será o último elemento em $A[r]$
- ▶ índices i e j definem dois subvetores

$$A[p \dots i] \leq x \quad \text{e} \quad A[i+1 \dots j-1] > x$$

- ▶ varremos com j da primeira até a penúltima posição
 - ▶ se $A[j] \leq x$, trocamos $A[i+1]$ com $A[j]$ e incrementamos i
 - ▶ se $A[j] > x$, apenas continuamos

Particionando

Ideia:

- ▶ pivô x será o último elemento em $A[r]$
- ▶ índices i e j definem dois subvetores

$$A[p \dots i] \leq x \quad \text{e} \quad A[i+1 \dots j-1] > x$$

- ▶ varremos com j da primeira até a penúltima posição
 - ▶ se $A[j] \leq x$, trocamos $A[i+1]$ com $A[j]$ e incrementamos i
 - ▶ se $A[j] > x$, apenas continuamos

Particionando

Ideia:

- ▶ pivô x será o último elemento em $A[r]$
- ▶ índices i e j definem dois subvetores

$$A[p \dots i] \leq x \quad \text{e} \quad A[i+1 \dots j-1] > x$$

- ▶ varremos com j da primeira até a penúltima posição
 - ▶ se $A[j] \leq x$, trocamos $A[i+1]$ com $A[j]$ e incrementamos i
 - ▶ se $A[j] > x$, apenas continuamos

Particionando

	p								r	
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

i	j								x	
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

	i		j							x
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

	i			j						x
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

	i				j					x
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

	i				j				x	
A	33	11	55	77	99	22	88	66	33	44

Particionando

	i	j								x
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

	i	j								x
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

	i	j								x
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

	i	j								x
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

	i	j								x
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

	i	j								x
A	33	11	55	77	99	22	88	66	33	44

Particionando

	i	j								x
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

	i	j								x
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

	i	j								x
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

	i	j								x
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

	i	j								x
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

	i	j								x
A	33	11	55	77	99	22	88	66	33	44

Particionando

	i	j								x
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

	i	j								x
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

	i	j								x
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

	i		j							x
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

	i			j						x
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

		i			j					x
A	33	11	55	77	99	22	88	66	33	44

Particionando

	i	j								x
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

	i	j								x
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

	i	j								x
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

	i	j								x
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

	i		j							x
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

	i		j							x
A	33	11	55	77	99	22	88	66	33	44

Particionando

	i	j								x
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

	i	j								x
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

	i	j								x
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

	i	j								x
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

	i	j								x
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

	i	j								x
A	33	11	55	77	99	22	88	66	33	44

Particionando

	i	j								x
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

	i	j								x
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

	i	j								x
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

	i		j							x
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

	i			j						x
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

		i			j					x
A	33	11	55	77	99	22	88	66	33	44

Particionando

	i				j			x		
A	33	11	55	77	99	22	88	66	33	44

			i				j			x
A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44

			i				j		x	
A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44

			i						j	x
A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44

			i						j	
A	33	11	22	33	99	55	88	66	77	44

	p				q				r	
A	33	11	22	33	44	55	88	66	77	99

Particionando

	i				j			x		
A	33	11	55	77	99	22	88	66	33	44

			i			j			x	
A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44

			i				j		x	
A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44

			i					j	x	
A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44

				i					j	
A	33	11	22	33	99	55	88	66	77	44

	p				q				r	
A	33	11	22	33	44	55	88	66	77	99

Particionando

	i				j			x		
A	33	11	55	77	99	22	88	66	33	44

			i			j			x	
A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44

			i				j		x	
A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44

			i					j	x	
A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44

				i					j	
A	33	11	22	33	99	55	88	66	77	44

	p				q				r	
A	33	11	22	33	44	55	88	66	77	99

Particionando

	i				j			x		
A	33	11	55	77	99	22	88	66	33	44

			i			j			x	
A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44

			i				j		x	
A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44

			i					j	x	
A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44

			i						j	
A	33	11	22	33	99	55	88	66	77	44

	p				q				r	
A	33	11	22	33	44	55	88	66	77	99

Particionando

	i				j			x		
A	33	11	55	77	99	22	88	66	33	44

			i			j			x	
A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44

			i				j		x	
A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44

			i					j	x	
A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44

			i						j	
A	33	11	22	33	99	55	88	66	77	44

	p				q				r	
A	33	11	22	33	44	55	88	66	77	99

Particionando

	i				j			x		
A	33	11	55	77	99	22	88	66	33	44

			i			j			x	
A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44

			i				j		x	
A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44

			i					j	x	
A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44

			i						j	
A	33	11	22	33	99	55	88	66	77	44

	p				q				r	
A	33	11	22	33	44	55	88	66	77	99

Algoritmo PARTICIONE

```
PARTICIONE( $A, p, r$ )  
1   $x \leftarrow A[r]$   $\triangleright$   $x$  é o pivô  
2   $i \leftarrow p - 1$   
3  para  $j \leftarrow p$  até  $r - 1$   
4      se  $A[j] \leq x$   
5           $i \leftarrow i + 1$   
6           $A[i] \leftrightarrow A[j]$   
7   $A[i+1] \leftrightarrow A[r]$   
8  devolva  $i + 1$ 
```

Invariantes

No começo de cada iteração da linha 3 vale

1. $A[p \dots i] \leq x$
2. $A[i+1 \dots j-1] > x$
3. $A[r] = x$

Algoritmo PARTICIONE

PARTICIONE(A, p, r)

```
1   $x \leftarrow A[r]$   ▷  $x$  é o pivô
2   $i \leftarrow p - 1$ 
3  para  $j \leftarrow p$  até  $r - 1$ 
4      se  $A[j] \leq x$ 
5           $i \leftarrow i + 1$ 
6           $A[i] \leftrightarrow A[j]$ 
7   $A[i+1] \leftrightarrow A[r]$ 
8  devolva  $i + 1$ 
```

Invariantes

No começo de cada iteração da linha 3 vale

1. $A[p \dots i] \leq x$
2. $A[i+1 \dots j-1] > x$
3. $A[r] = x$

Algoritmo PARTICIONE

PARTICIONE(A, p, r)

```
1   $x \leftarrow A[r]$   $\triangleright$   $x$  é o pivô
2   $i \leftarrow p - 1$ 
3  para  $j \leftarrow p$  até  $r - 1$ 
4      se  $A[j] \leq x$ 
5           $i \leftarrow i + 1$ 
6           $A[i] \leftrightarrow A[j]$ 
7   $A[i+1] \leftrightarrow A[r]$ 
8  devolva  $i + 1$ 
```

Invariantes

No começo de cada iteração da linha 3 vale

1. $A[p \dots i] \leq x$
2. $A[i+1 \dots j-1] > x$
3. $A[r] = x$

Algoritmo PARTICIONE

PARTICIONE(A, p, r)

```
1   $x \leftarrow A[r]$   $\triangleright$   $x$  é o pivô
2   $i \leftarrow p - 1$ 
3  para  $j \leftarrow p$  até  $r - 1$ 
4      se  $A[j] \leq x$ 
5           $i \leftarrow i + 1$ 
6           $A[i] \leftrightarrow A[j]$ 
7   $A[i+1] \leftrightarrow A[r]$ 
8  devolva  $i + 1$ 
```

Invariantes

No começo de cada iteração da linha 3 vale

1. $A[p \dots i] \leq x$
2. $A[i+1 \dots j-1] > x$
3. $A[r] = x$

Algoritmo PARTICIONE

PARTICIONE(A, p, r)

```
1   $x \leftarrow A[r]$   $\triangleright$   $x$  é o pivô
2   $i \leftarrow p - 1$ 
3  para  $j \leftarrow p$  até  $r - 1$ 
4      se  $A[j] \leq x$ 
5           $i \leftarrow i + 1$ 
6           $A[i] \leftrightarrow A[j]$ 
7   $A[i+1] \leftrightarrow A[r]$ 
8  devolva  $i + 1$ 
```

Invariantes

No começo de cada iteração da linha 3 vale

1. $A[p \dots i] \leq x$
2. $A[i+1 \dots j-1] > x$
3. $A[r] = x$

Complexidade de PARTICIONE

PARTICIONE(A, p, r)		Tempo
1	$x \leftarrow A[r] \quad \triangleright x \text{ é o pivô}$	?
2	$i \leftarrow p - 1$	?
3	para $j \leftarrow p$ até $r - 1$	?
4	se $A[j] \leq x$	?
5	$i \leftarrow i + 1$	?
6	$A[i] \leftrightarrow A[j]$	?
7	$A[i+1] \leftrightarrow A[r]$	?
8	devolva $i + 1$	?

Se $n := r - p + 1$, então a complexidade no pior caso é

$$T(n) = ?$$

Complexidade de PARTICIONE

PARTICIONE(A, p, r)		Tempo
1	$x \leftarrow A[r] \quad \triangleright x \text{ é o pivô}$	?
2	$i \leftarrow p - 1$	?
3	para $j \leftarrow p$ até $r - 1$	?
4	se $A[j] \leq x$	?
5	$i \leftarrow i + 1$	?
6	$A[i] \leftrightarrow A[j]$	?
7	$A[i+1] \leftrightarrow A[r]$	?
8	devolva $i + 1$	?

Se $n := r - p + 1$, então a complexidade no pior caso é

$$T(n) = ?$$

Complexidade de PARTICIONE

PARTICIONE(A, p, r)		Tempo
1	$x \leftarrow A[r] \quad \triangleright x \text{ é o pivô}$	$\Theta(1)$
2	$i \leftarrow p - 1$	$\Theta(1)$
3	para $j \leftarrow p$ até $r - 1$	$\Theta(n)$
4	se $A[j] \leq x$	$\Theta(n)$
5	$i \leftarrow i + 1$	$O(n)$
6	$A[i] \leftrightarrow A[j]$	$O(n)$
7	$A[i+1] \leftrightarrow A[r]$	$\Theta(1)$
8	devolva $i + 1$	$\Theta(1)$

Se $n := r - p + 1$, então a complexidade no pior caso é

$$T(n) = ?$$

Complexidade de PARTICIONE

PARTICIONE(A, p, r)		Tempo
1	$x \leftarrow A[r] \quad \triangleright x \text{ é o pivô}$	$\Theta(1)$
2	$i \leftarrow p - 1$	$\Theta(1)$
3	para $j \leftarrow p$ até $r - 1$	$\Theta(n)$
4	se $A[j] \leq x$	$\Theta(n)$
5	$i \leftarrow i + 1$	$O(n)$
6	$A[i] \leftrightarrow A[j]$	$O(n)$
7	$A[i+1] \leftrightarrow A[r]$	$\Theta(1)$
8	devolva $i + 1$	$\Theta(1)$

Se $n := r - p + 1$, então a complexidade no pior caso é

$$T(n) = \Theta(2n + 4) + O(2n) = \Theta(n)$$

QuickSort

QUICKSORT(A, p, r)

1 se $p < r$

2 $q \leftarrow \text{PARTICIONE}(A, p, r)$

3 **QUICKSORT**($A, p, q - 1$)

4 **QUICKSORT**($A, q + 1, r$)

	p								r	
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

QuickSort

QUICKSORT(A, p, r)

1 se $p < r$

2 $q \leftarrow \text{PARTICIONE}(A, p, r)$

3 **QUICKSORT**($A, p, q - 1$)

4 **QUICKSORT**($A, q + 1, r$)

	p				q					r
A	33	11	22	33	44	55	88	66	77	99

QuickSort

QUICKSORT(A, p, r)

1 se $p < r$

2 $q \leftarrow \text{PARTICIONE}(A, p, r)$

3 **QUICKSORT**($A, p, q - 1$)

4 **QUICKSORT**($A, q + 1, r$)

	p				q					r
A	11	22	33	33	44	55	88	66	77	99

QuickSort

QUICKSORT(A, p, r)

1 se $p < r$

2 $q \leftarrow \text{PARTICIONE}(A, p, r)$

3 **QUICKSORT**($A, p, q - 1$)

4 **QUICKSORT**($A, q + 1, r$)

	p				q					r
A	11	22	33	33	44	55	66	77	88	99

Complexidade de QUICKSORT

	QUICKSORT(A, p, r)	Tempo
1	se $p < r$	?
2	$q \leftarrow \text{PARTICIONE}(A, p, r)$	?
3	QUICKSORT($A, p, q - 1$)	?
4	QUICKSORT($A, q + 1, r$)	?

Seja $n := r - p + 1$ o número total de elementos

- ▶ desses, $k := q - p$ são “pequenos”
- ▶ enquanto $n - k - 1$ são “grandes”

O tempo de execução é

$$T(n) = ?$$

Complexidade de QUICKSORT

	QUICKSORT(A, p, r)	Tempo
1	se $p < r$	?
2	$q \leftarrow \text{PARTICIONE}(A, p, r)$	?
3	QUICKSORT($A, p, q - 1$)	?
4	QUICKSORT($A, q + 1, r$)	?

Seja $n := r - p + 1$ o número total de elementos

- ▶ desses, $k := q - p$ são “pequenos”
- ▶ enquanto $n - k - 1$ são “grandes”

O tempo de execução é

$$T(n) = ?$$

Complexidade de QUICKSORT

	QUICKSORT(A, p, r)	Tempo
1	se $p < r$	?
2	$q \leftarrow \text{PARTICIONE}(A, p, r)$	?
3	QUICKSORT($A, p, q - 1$)	?
4	QUICKSORT($A, q + 1, r$)	?

Seja $n := r - p + 1$ o número total de elementos

- ▶ desses, $k := q - p$ são “pequenos”
- ▶ enquanto $n - k - 1$ são “grandes”

O tempo de execução é

$$T(n) = ?$$

Complexidade de QUICKSORT

	QUICKSORT(A, p, r)	Tempo
1	se $p < r$	?
2	$q \leftarrow \text{PARTICIONE}(A, p, r)$	?
3	QUICKSORT($A, p, q - 1$)	?
4	QUICKSORT($A, q + 1, r$)	?

Seja $n := r - p + 1$ o número total de elementos

- ▶ desses, $k := q - p$ são “pequenos”
- ▶ enquanto $n - k - 1$ são “grandes”

O tempo de execução é

$$T(n) = ?$$

Complexidade de QUICKSORT

QUICKSORT(A, p, r)		Tempo
1	se $p < r$	?
2	$q \leftarrow \text{PARTICIONE}(A, p, r)$	?
3	QUICKSORT($A, p, q - 1$)	?
4	QUICKSORT($A, q + 1, r$)	?

Seja $n := r - p + 1$ o número total de elementos

- ▶ desses, $k := q - p$ são “pequenos”
- ▶ enquanto $n - k - 1$ são “grandes”

O tempo de execução é

$$T(n) = ?$$

Complexidade de QUICKSORT

	QUICKSORT(A, p, r)	Tempo
1	se $p < r$	?
2	$q \leftarrow \text{PARTICIONE}(A, p, r)$	?
3	QUICKSORT($A, p, q - 1$)	?
4	QUICKSORT($A, q + 1, r$)	?

Seja $n := r - p + 1$ o número total de elementos

- ▶ desses, $k := q - p$ são “pequenos”
- ▶ enquanto $n - k - 1$ são “grandes”

O tempo de execução é

$$T(n) = ?$$

Complexidade de QUICKSORT

	QUICKSORT(A, p, r)	Tempo
1	se $p < r$	$\Theta(1)$
2	$q \leftarrow \text{PARTICIONE}(A, p, r)$	$\Theta(n)$
3	QUICKSORT($A, p, q - 1$)	$T(k)$
4	QUICKSORT($A, q + 1, r$)	$T(n - k - 1)$

Seja $n := r - p + 1$ o número total de elementos

- ▶ desses, $k := q - p$ são “pequenos”
- ▶ enquanto $n - k - 1$ são “grandes”

O tempo de execução é

$$T(n) = ?$$

Complexidade de QUICKSORT

	QUICKSORT(A, p, r)	Tempo
1	se $p < r$	$\Theta(1)$
2	$q \leftarrow \text{PARTICIONE}(A, p, r)$	$\Theta(n)$
3	QUICKSORT($A, p, q - 1$)	$T(k)$
4	QUICKSORT($A, q + 1, r$)	$T(n - k - 1)$

Seja $n := r - p + 1$ o número total de elementos

- ▶ desses, $k := q - p$ são “pequenos”
- ▶ enquanto $n - k - 1$ são “grandes”

O tempo de execução é

$$T(n) = T(k) + T(n - k - 1) + \Theta(n)$$

Encontramos uma recorrência

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 0, 1 \\ T(k) + T(n - k - 1) + \Theta(n) & \text{se } n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

- ▶ o parâmetro da recorrência é apenas n
- ▶ o valor de k depende do caso

Encontramos uma recorrência

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 0, 1 \\ T(k) + T(n - k - 1) + \Theta(n) & \text{se } n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

- ▶ o parâmetro da recorrência é apenas n
- ▶ o valor de k depende do caso

Encontramos uma recorrência

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 0, 1 \\ T(k) + T(n - k - 1) + \Theta(n) & \text{se } n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

- ▶ o parâmetro da recorrência é apenas n
- ▶ o valor de k depende do caso

Encontramos uma recorrência

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 0, 1 \\ T(k) + T(n - k - 1) + \Theta(n) & \text{se } n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

- ▶ o parâmetro da recorrência é apenas n
- ▶ o valor de k depende do caso

Limitando inferiormente o pior caso

Se o vetor estiver ordenado, então

$$T(n) = T(n-1) + T(0) + \Theta(n)$$

Resolvendo para esse caso, obtemos $T(n) = \Theta(n^2)$.

Limitando inferiormente o pior caso

Se o vetor estiver ordenado, então

$$T(n) = T(n-1) + T(0) + \Theta(n)$$

Resolvendo para esse caso, obtemos $T(n) = \Theta(n^2)$.

Limitando inferiormente o pior caso

Se o vetor estiver ordenado, então

$$T(n) = T(n-1) + T(0) + \Theta(n)$$

Resolvendo para esse caso, obtemos $T(n) = \Theta(n^2)$.

Limitando inferiormente o pior caso

Se o vetor estiver ordenado, então

$$T(n) = T(n-1) + T(0) + \Theta(n)$$

Resolvendo para esse caso, obtemos $T(n) = \Theta(n^2)$.

Limitando superiormente o melhor caso

Se **PARTICIONE** sempre dividir em duas partes “iguais”, temos

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil - 1) + \Theta(n)$$

Simplificando para

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$$

obtemos $T(n) = \Theta(n \log n)$.

Limitando superiormente o melhor caso

Se PARTICIONE sempre dividir em duas partes “iguais”, temos

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil - 1) + \Theta(n)$$

Simplificando para

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$$

obtemos $T(n) = \Theta(n \log n)$.

Limitando superiormente o melhor caso

Se **PARTICIONE** sempre dividir em duas partes “iguais”, temos

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil - 1) + \Theta(n)$$

Simplificando para

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$$

obtemos $T(n) = \Theta(n \log n)$.

Limitando superiormente o melhor caso

Se **PARTICIONE** sempre dividir em duas partes “iguais”, temos

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil - 1) + \Theta(n)$$

Simplificando para

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$$

obtemos $T(n) = \Theta(n \log n)$.

Limitando superiormente o melhor caso

Se **PARTICIONE** sempre dividir em duas partes “iguais”, temos

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil - 1) + \Theta(n)$$

Simplificando para

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$$

obtemos $T(n) = \Theta(n \log n)$.

Algumas conclusões

Até agora, concluímos que QUICKSORT

- ▶ no pior caso, leva tempo pelo menos $\Omega(n^2)$
- ▶ no melhor caso, leva tempo no máximo $O(n \log n)$

Mas na média, qual dos dois limitantes está mais próximo do comportamento típico do algoritmo?

Caso médio

Ná média, QUICKSORT leva tempo $O(n \log n)$

- ▶ casos ruins ocorrem quando os subvetores obtidos por PARTICIONE são **desbalanceados**
 - ▶ muitos poucos elementos pequenos e muitos grandes
 - ▶ ou vice-versa
- ▶ na maioria das instâncias, cada subvetor obtido tem alguma fração constante dos elementos do vetor

Podemos ilustrar esse fato assim:

- ▶ suponha que sempre dividimos na proporção $\frac{1}{10}$ para $\frac{9}{10}$
- ▶ a recorrência seria da forma

$$T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n-1}{10} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{9(n-1)}{10} \right\rceil\right) + \Theta(n)$$

- ▶ cuja a solução é $T(n) = \Theta(n \log n)$.

Caso médio

Ná média, QUICKSORT leva tempo $O(n \log n)$

- ▶ casos ruins ocorrem quando os subvetores obtidos por PARTICIONE são **desbalanceados**
 - ▶ muitos poucos elementos pequenos e muitos grandes
 - ▶ ou vice-versa
- ▶ na maioria das instâncias, cada subvetor obtido tem alguma fração constante dos elementos do vetor

Podemos ilustrar esse fato assim:

- ▶ suponha que sempre dividimos na proporção $\frac{1}{10}$ para $\frac{9}{10}$
- ▶ a recorrência seria da forma

$$T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n-1}{10} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{9(n-1)}{10} \right\rceil\right) + \Theta(n)$$

- ▶ cuja a solução é $T(n) = \Theta(n \log n)$.

Caso médio

Ná média, QUICKSORT leva tempo $O(n \log n)$

- ▶ casos ruins ocorrem quando os subvetores obtidos por PARTICIONE são **desbalanceados**
 - ▶ muitos poucos elementos pequenos e muitos grandes
 - ▶ ou vice-versa
- ▶ na maioria das instâncias, cada subvetor obtido tem alguma fração constante dos elementos do vetor

Podemos ilustrar esse fato assim:

- ▶ suponha que sempre dividimos na proporção $\frac{1}{10}$ para $\frac{9}{10}$
- ▶ a recorrência seria da forma

$$T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n-1}{10} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{9(n-1)}{10} \right\rceil\right) + \Theta(n)$$

- ▶ cuja a solução é $T(n) = \Theta(n \log n)$.

Caso médio

Ná média, QUICKSORT leva tempo $O(n \log n)$

- ▶ casos ruins ocorrem quando os subvetores obtidos por PARTICIONE são **desbalanceados**
 - ▶ muitos poucos elementos pequenos e muitos grandes
 - ▶ ou vice-versa
- ▶ na maioria das instâncias, cada subvetor obtido tem alguma fração constante dos elementos do vetor

Podemos ilustrar esse fato assim:

- ▶ suponha que sempre dividimos na proporção $\frac{1}{10}$ para $\frac{9}{10}$
- ▶ a recorrência seria da forma

$$T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n-1}{10} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{9(n-1)}{10} \right\rceil\right) + \Theta(n)$$

- ▶ cuja a solução é $T(n) = \Theta(n \log n)$.

Caso médio

Ná média, QUICKSORT leva tempo $O(n \log n)$

- ▶ casos ruins ocorrem quando os subvetores obtidos por PARTICIONE são **desbalanceados**
 - ▶ muitos poucos elementos pequenos e muitos grandes
 - ▶ ou vice-versa
- ▶ na maioria das instâncias, cada subvetor obtido tem alguma fração constante dos elementos do vetor

Podemos ilustrar esse fato assim:

- ▶ suponha que sempre dividimos na proporção $\frac{1}{10}$ para $\frac{9}{10}$
- ▶ a recorrência seria da forma

$$T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n-1}{10} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{9(n-1)}{10} \right\rceil\right) + \Theta(n)$$

- ▶ cuja a solução é $T(n) = \Theta(n \log n)$.

Caso médio

Ná média, QUICKSORT leva tempo $O(n \log n)$

- ▶ casos ruins ocorrem quando os subvetores obtidos por PARTICIONE são **desbalanceados**
 - ▶ muitos poucos elementos pequenos e muitos grandes
 - ▶ ou vice-versa
- ▶ na maioria das instâncias, cada subvetor obtido tem alguma fração constante dos elementos do vetor

Podemos ilustrar esse fato assim:

- ▶ suponha que sempre dividimos na proporção $\frac{1}{10}$ para $\frac{9}{10}$
- ▶ a recorrência seria da forma

$$T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n-1}{10} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{9(n-1)}{10} \right\rceil\right) + \Theta(n)$$

- ▶ cuja a solução é $T(n) = \Theta(n \log n)$.

Caso médio

Ná média, QUICKSORT leva tempo $O(n \log n)$

- ▶ casos ruins ocorrem quando os subvetores obtidos por PARTICIONE são **desbalanceados**
 - ▶ muitos poucos elementos pequenos e muitos grandes
 - ▶ ou vice-versa
- ▶ na maioria das instâncias, cada subvetor obtido tem alguma fração constante dos elementos do vetor

Podemos ilustrar esse fato assim:

- ▶ suponha que sempre dividimos na proporção $\frac{1}{10}$ para $\frac{9}{10}$
- ▶ a recorrência seria da forma

$$T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n-1}{10} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{9(n-1)}{10} \right\rceil\right) + \Theta(n)$$

- ▶ cuja a solução é $T(n) = \Theta(n \log n)$.

Caso médio

Ná média, QUICKSORT leva tempo $O(n \log n)$

- ▶ casos ruins ocorrem quando os subvetores obtidos por PARTICIONE são **desbalanceados**
 - ▶ muitos poucos elementos pequenos e muitos grandes
 - ▶ ou vice-versa
- ▶ na maioria das instâncias, cada subvetor obtido tem alguma fração constante dos elementos do vetor

Podemos ilustrar esse fato assim:

- ▶ suponha que sempre dividimos na proporção $\frac{1}{10}$ para $\frac{9}{10}$
- ▶ a recorrência seria da forma

$$T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n-1}{10} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{9(n-1)}{10} \right\rceil\right) + \Theta(n)$$

- ▶ cuja a solução é $T(n) = \Theta(n \log n)$.

Caso médio

Ná média, QUICKSORT leva tempo $O(n \log n)$

- ▶ casos ruins ocorrem quando os subvetores obtidos por PARTICIONE são **desbalanceados**
 - ▶ muitos poucos elementos pequenos e muitos grandes
 - ▶ ou vice-versa
- ▶ na maioria das instâncias, cada subvetor obtido tem alguma fração constante dos elementos do vetor

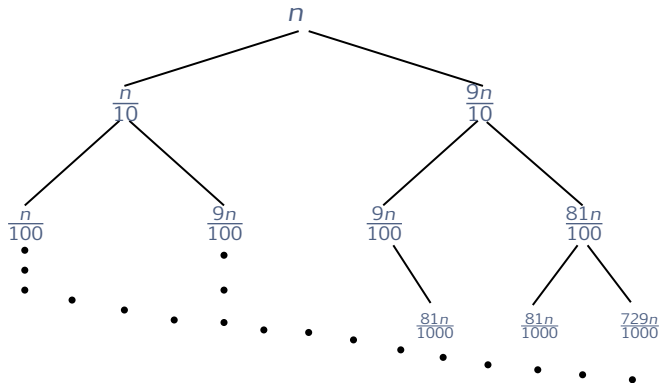
Podemos ilustrar esse fato assim:

- ▶ suponha que sempre dividimos na proporção $\frac{1}{10}$ para $\frac{9}{10}$
- ▶ a recorrência seria da forma

$$T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n-1}{10} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{9(n-1)}{10} \right\rceil\right) + \Theta(n)$$

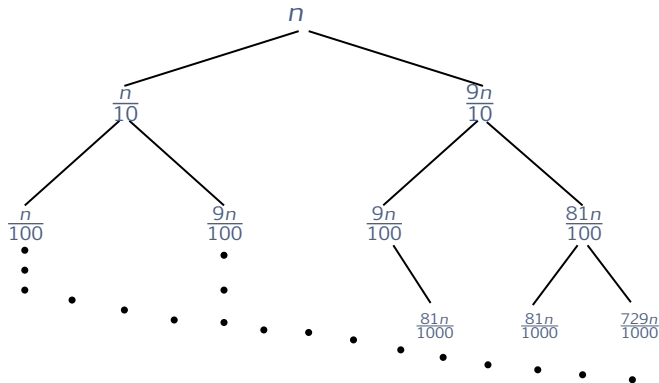
- ▶ cuja a solução é $T(n) = \Theta(n \log n)$.

Árvore de recorrência



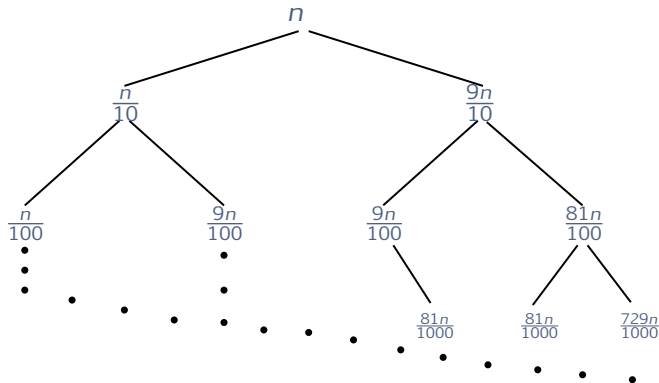
- ▶ o ramo mais comprido tem comprimento $\log_{10/9} n$
- ▶ em cada nível o custo é no máximo $O(n)$
- ▶ então, o custo total é $O(n \log n)$

Árvore de recorrência



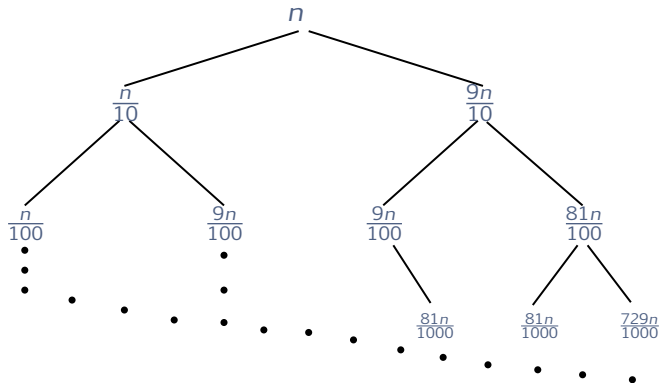
- ▶ o ramo mais comprido tem comprimento $\log_{10/9} n$
- ▶ em cada nível o custo é no máximo $O(n)$
- ▶ então, o custo total é $O(n \log n)$

Árvore de recorrência



- ▶ o ramo mais comprido tem comprimento $\log_{10/9} n$
- ▶ em cada nível o custo é no máximo $O(n)$
- ▶ então, o custo total é $O(n \log n)$

Árvore de recorrência



- ▶ o ramo mais comprido tem comprimento $\log_{10/9} n$
- ▶ em cada nível o custo é no máximo $O(n)$
- ▶ então, o custo total é $O(n \log n)$

QUICKSORT aleatorizado

- ▶ o pior caso ocorre devido a escolhas infelizes do pivô
- ▶ podemos minimizar isso usando aleatoriedade
- ▶ criamos uma versão de PARTICIONE aleatorizada

PARTICIONE-ALEATÓRIO(A, p, r)

```
1   $i \leftarrow \text{RANDOM}(p, r)$   
2   $A[i] \leftrightarrow A[r]$   
3  devolva PARTICIONE( $A, p, r$ )
```

QUICKSORT-ALEATÓRIO(A, p, r)

```
1  se  $p < r$   
2     $q \leftarrow \text{PARTICIONE-ALEATÓRIO}(A, p, r)$   
3    QUICKSORT-ALEATÓRIO( $A, p, q - 1$ )  
4    QUICKSORT-ALEATÓRIO( $A, q + 1, r$ )
```

QUICKSORT aleatorizado

- ▶ o pior caso ocorre devido a escolhas infelizes do pivô
- ▶ podemos minimizar isso usando aleatoriedade
- ▶ criamos uma versão de PARTICIONE aleatorizada

PARTICIONE-ALEATÓRIO(A, p, r)

```
1   $i \leftarrow \text{RANDOM}(p, r)$   
2   $A[i] \leftrightarrow A[r]$   
3  devolva PARTICIONE( $A, p, r$ )
```

QUICKSORT-ALEATÓRIO(A, p, r)

```
1  se  $p < r$   
2     $q \leftarrow \text{PARTICIONE-ALEATÓRIO}(A, p, r)$   
3    QUICKSORT-ALEATÓRIO( $A, p, q - 1$ )  
4    QUICKSORT-ALEATÓRIO( $A, q + 1, r$ )
```

QUICKSORT aleatorizado

- ▶ o pior caso ocorre devido a escolhas infelizes do pivô
- ▶ podemos minimizar isso usando aleatoriedade
- ▶ criamos uma versão de **PARTICIONE** aleatorizada

PARTICIONE-ALEATÓRIO(A, p, r)

```
1   $i \leftarrow \text{RANDOM}(p, r)$   
2   $A[i] \leftrightarrow A[r]$   
3  devolva PARTICIONE( $A, p, r$ )
```

QUICKSORT-ALEATÓRIO(A, p, r)

```
1  se  $p < r$   
2     $q \leftarrow \text{PARTICIONE-ALEATÓRIO}(A, p, r)$   
3    QUICKSORT-ALEATÓRIO( $A, p, q - 1$ )  
4    QUICKSORT-ALEATÓRIO( $A, q + 1, r$ )
```

QUICKSORT aleatorizado

- ▶ o pior caso ocorre devido a escolhas infelizes do pivô
- ▶ podemos minimizar isso usando aleatoriedade
- ▶ criamos uma versão de **PARTICIONE** aleatorizada

PARTICIONE-ALEATÓRIO(A, p, r)

```
1   $i \leftarrow \text{RANDOM}(p, r)$   
2   $A[i] \leftrightarrow A[r]$   
3  devolva PARTICIONE( $A, p, r$ )
```

QUICKSORT-ALEATÓRIO(A, p, r)

```
1  se  $p < r$   
2     $q \leftarrow \text{PARTICIONE-ALEATÓRIO}(A, p, r)$   
3    QUICKSORT-ALEATÓRIO( $A, p, q - 1$ )  
4    QUICKSORT-ALEATÓRIO( $A, q + 1, r$ )
```

QUICKSORT aleatorizado

- ▶ o pior caso ocorre devido a escolhas infelizes do pivô
- ▶ podemos minimizar isso usando aleatoriedade
- ▶ criamos uma versão de **PARTICIONE** aleatorizada

PARTICIONE-ALEATÓRIO(A, p, r)

```
1   $i \leftarrow \text{RANDOM}(p, r)$   
2   $A[i] \leftrightarrow A[r]$   
3  devolva PARTICIONE( $A, p, r$ )
```

QUICKSORT-ALEATÓRIO(A, p, r)

```
1  se  $p < r$   
2     $q \leftarrow \text{PARTICIONE-ALEATÓRIO}(A, p, r)$   
3    QUICKSORT-ALEATÓRIO( $A, p, q - 1$ )  
4    QUICKSORT-ALEATÓRIO( $A, q + 1, r$ )
```

Tempo esperado de QUICKSORT-ALEATÓRIO

Começamos com algumas definições

- ▶ vamos supor que todos os elementos são distintos
- ▶ sejam $z_1 < z_2 < \dots < z_n$ esses elementos ordenados.
- ▶ seja $Z_{ij} = \{z_i, z_{i+1}, \dots, z_j\}$

Queremos estimar o número esperado de comparações

- ▶ seja X_{ij} a variável que diz se z_i foi comparado com z_j

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } z_i \text{ foi comparado com } z_j \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- ▶ então, o número total de comparações X é

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n X_{ij}.$$

- ▶ nosso objetivo é calcular $E[X]$

Tempo esperado de QUICKSORT-ALEATÓRIO

Começamos com algumas definições

- ▶ vamos supor que todos os elementos são distintos
- ▶ sejam $z_1 < z_2 < \dots < z_n$ esses elementos ordenados.
- ▶ seja $Z_{ij} = \{z_i, z_{i+1}, \dots, z_j\}$

Queremos estimar o número esperado de comparações

- ▶ seja X_{ij} a variável que diz se z_i foi comparado com z_j

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } z_i \text{ foi comparado com } z_j \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- ▶ então, o número total de comparações X é

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n X_{ij}.$$

- ▶ nosso objetivo é calcular $E[X]$

Tempo esperado de QUICKSORT-ALEATÓRIO

Começamos com algumas definições

- ▶ vamos supor que todos os elementos são distintos
- ▶ sejam $z_1 < z_2 < \dots < z_n$ esses elementos ordenados.
- ▶ seja $Z_{ij} = \{z_i, z_{i+1}, \dots, z_j\}$

Queremos estimar o número esperado de comparações

- ▶ seja X_{ij} a variável que diz se z_i foi comparado com z_j

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } z_i \text{ foi comparado com } z_j \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- ▶ então, o número total de comparações X é

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n X_{ij}.$$

- ▶ nosso objetivo é calcular $E[X]$

Tempo esperado de QUICKSORT-ALEATÓRIO

Começamos com algumas definições

- ▶ vamos supor que todos os elementos são distintos
- ▶ sejam $z_1 < z_2 < \dots < z_n$ esses elementos ordenados.
- ▶ seja $Z_{ij} = \{z_i, z_{i+1}, \dots, z_j\}$

Queremos estimar o número esperado de comparações

- ▶ seja X_{ij} a variável que diz se z_i foi comparado com z_j

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } z_i \text{ foi comparado com } z_j \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- ▶ então, o número total de comparações X é

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n X_{ij}.$$

- ▶ nosso objetivo é calcular $E[X]$

Tempo esperado de QUICKSORT-ALEATÓRIO

Começamos com algumas definições

- ▶ vamos supor que todos os elementos são distintos
- ▶ sejam $z_1 < z_2 < \dots < z_n$ esses elementos ordenados.
- ▶ seja $Z_{ij} = \{z_i, z_{i+1}, \dots, z_j\}$

Queremos estimar o número esperado de comparações

- ▶ seja X_{ij} a variável que diz se z_i foi comparado com z_j

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } z_i \text{ foi comparado com } z_j \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- ▶ então, o número total de comparações X é

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n X_{ij}.$$

- ▶ nosso objetivo é calcular $E[X]$

Tempo esperado de QUICKSORT-ALEATÓRIO

Começamos com algumas definições

- ▶ vamos supor que todos os elementos são distintos
- ▶ sejam $z_1 < z_2 < \dots < z_n$ esses elementos ordenados.
- ▶ seja $Z_{ij} = \{z_i, z_{i+1}, \dots, z_j\}$

Queremos estimar o número esperado de comparações

- ▶ seja X_{ij} a variável que diz se z_i foi comparado com z_j

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } z_i \text{ foi comparado com } z_j \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- ▶ então, o número total de comparações X é

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n X_{ij}.$$

- ▶ nosso objetivo é calcular $E[X]$

Tempo esperado de QUICKSORT-ALEATÓRIO

Começamos com algumas definições

- ▶ vamos supor que todos os elementos são distintos
- ▶ sejam $z_1 < z_2 < \dots < z_n$ esses elementos ordenados.
- ▶ seja $Z_{ij} = \{z_i, z_{i+1}, \dots, z_j\}$

Queremos estimar o número esperado de comparações

- ▶ seja X_{ij} a variável que diz se z_i foi comparado com z_j

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } z_i \text{ foi comparado com } z_j \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- ▶ então, o número total de comparações X é

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n X_{ij}.$$

- ▶ nosso objetivo é calcular $E[X]$

Tempo esperado de QUICKSORT-ALEATÓRIO

Começamos com algumas definições

- ▶ vamos supor que todos os elementos são distintos
- ▶ sejam $z_1 < z_2 < \dots < z_n$ esses elementos ordenados.
- ▶ seja $Z_{ij} = \{z_i, z_{i+1}, \dots, z_j\}$

Queremos estimar o número esperado de comparações

- ▶ seja X_{ij} a variável que diz se z_i foi comparado com z_j

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } z_i \text{ foi comparado com } z_j \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- ▶ então, o número total de comparações X é

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n X_{ij}.$$

- ▶ nosso objetivo é calcular $E[X]$

Tempo esperado de QUICKSORT-ALEATÓRIO

Começamos com algumas definições

- ▶ vamos supor que todos os elementos são distintos
- ▶ sejam $z_1 < z_2 < \dots < z_n$ esses elementos ordenados.
- ▶ seja $Z_{ij} = \{z_i, z_{i+1}, \dots, z_j\}$

Queremos estimar o número esperado de comparações

- ▶ seja X_{ij} a variável que diz se z_i foi comparado com z_j

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } z_i \text{ foi comparado com } z_j \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- ▶ então, o número total de comparações X é

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n X_{ij}.$$

- ▶ nosso objetivo é calcular $E[X]$

Tempo esperado de QUICKSORT-ALEATÓRIO

Começamos com algumas definições

- ▶ vamos supor que todos os elementos são distintos
- ▶ sejam $z_1 < z_2 < \dots < z_n$ esses elementos ordenados.
- ▶ seja $Z_{ij} = \{z_i, z_{i+1}, \dots, z_j\}$

Queremos estimar o número esperado de comparações

- ▶ seja X_{ij} a variável que diz se z_i foi comparado com z_j

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } z_i \text{ foi comparado com } z_j \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- ▶ então, o número total de comparações X é

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n X_{ij}.$$

- ▶ nosso objetivo é calcular $E[X]$

Tempo esperado de QUICKSORT-ALEATÓRIO (cont)

Pela linearidade da esperança:

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n X_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E[X_{ij}]$$

Como X_{ij} é uma variável indicadora,

$$E[X_{ij}] = \Pr\{z_i \text{ ser comparado com } z_j\}$$

Tempo esperado de QUICKSORT-ALEATÓRIO (cont)

Pela linearidade da esperança:

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n X_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E[X_{ij}]$$

Como X_{ij} é uma variável indicadora,

$$E[X_{ij}] = \Pr\{z_i \text{ ser comparado com } z_j\}$$

Tempo esperado de QUICKSORT-ALEATÓRIO (cont)

Pela linearidade da esperança:

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n X_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E[X_{ij}]$$

Como X_{ij} é uma variável indicadora,

$$E[X_{ij}] = \Pr\{z_i \text{ ser comparado com } z_j\}$$

Tempo esperado de QUICKSORT-ALEATÓRIO (cont)

Pela linearidade da esperança:

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n X_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E[X_{ij}]$$

Como X_{ij} é uma variável indicadora,

$$E[X_{ij}] = \Pr\{z_i \text{ ser comparado com } z_j\}$$

Comparação de dois elementos

Considere a escolha do pivô e a comparação entre z_i e z_j :

$$\underbrace{z_1, z_2, \dots, z_{i-1}}_{\text{posterga}}, \underbrace{z_i, z_{i+1}, \dots, z_{j-1}}_{\text{não comp.}}, \underbrace{z_j, z_{j+1}, \dots, z_n}_{\text{posterga}}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & Pr\{z_i \text{ ser comparado com } z_j\} \\ &= Pr\{z_i \text{ ou } z_j \text{ ser escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}\} \\ &= Pr\{z_i \text{ ser escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}\} + \\ &\quad Pr\{z_j \text{ ser escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}\} \\ &= \frac{1}{j-i+1} + \frac{1}{j-i+1} = \frac{2}{j-i+1}. \end{aligned}$$

Comparação de dois elementos

Considere a escolha do pivô e a comparação entre z_i e z_j :

$$\underbrace{z_1, z_2, \dots, z_{i-1}}_{\text{posterga}}, \underbrace{z_i, z_{i+1}, \dots, z_{j-1}}_{\text{não comp.}}, \underbrace{z_j, z_{j+1}, \dots, z_n}_{\text{posterga}}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & Pr\{z_i \text{ ser comparado com } z_j\} \\ &= Pr\{z_i \text{ ou } z_j \text{ ser escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}\} \\ &= Pr\{z_i \text{ ser escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}\} + \\ &\quad Pr\{z_j \text{ ser escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}\} \\ &= \frac{1}{j-i+1} + \frac{1}{j-i+1} = \frac{2}{j-i+1}. \end{aligned}$$

Comparação de dois elementos

Considere a escolha do pivô e a comparação entre z_i e z_j :

$$\underbrace{z_1, z_2, \dots, z_{i-1}}_{\text{posterga}}, \underbrace{z_i, z_{i+1}, \dots, z_{j-1}}_{\text{não comp.}}, \underbrace{z_j, z_{j+1}, \dots, z_n}_{\text{posterga}}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & Pr\{z_i \text{ ser comparado com } z_j\} \\ &= Pr\{z_i \text{ ou } z_j \text{ ser escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}\} \\ &= Pr\{z_i \text{ ser escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}\} + \\ &\quad Pr\{z_j \text{ ser escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}\} \\ &= \frac{1}{j-i+1} + \frac{1}{j-i+1} = \frac{2}{j-i+1}. \end{aligned}$$

Comparação de dois elementos

Considere a escolha do pivô e a comparação entre z_i e z_j :

$$\underbrace{z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, \textcolor{red}{z_i}}_{\text{posterga}}, \underbrace{\textcolor{green}{z_{i+1}}, \dots, \textcolor{green}{z_{j-1}}, \textcolor{red}{z_j}}_{\text{não comp.}}, \underbrace{z_{j+1}, \dots, z_n}_{\text{posterga}}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \Pr\{z_i \text{ ser comparado com } z_j\} \\ &= \Pr\{z_i \text{ ou } z_j \text{ ser escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}\} \\ &= \Pr\{z_i \text{ ser escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}\} + \\ & \quad \Pr\{z_j \text{ ser escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}\} \\ &= \frac{1}{j-i+1} + \frac{1}{j-i+1} = \frac{2}{j-i+1}. \end{aligned}$$

Comparação de dois elementos

Considere a escolha do pivô e a comparação entre z_i e z_j :

$$\underbrace{z_1, z_2, \dots, z_{i-1}}_{\text{posterga}}, \underbrace{z_i, z_{i+1}, \dots, z_{j-1}}_{\text{não comp.}}, \underbrace{z_j, z_{j+1}, \dots, z_n}_{\text{posterga}}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & Pr\{z_i \text{ ser comparado com } z_j\} \\ &= Pr\{z_i \text{ ou } z_j \text{ ser escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}\} \\ &= Pr\{z_i \text{ ser escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}\} + \\ &\quad Pr\{z_j \text{ ser escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}\} \\ &= \frac{1}{j-i+1} + \frac{1}{j-i+1} = \frac{2}{j-i+1}. \end{aligned}$$

Comparação de dois elementos

Considere a escolha do pivô e a comparação entre z_i e z_j :

$$\underbrace{z_1, z_2, \dots, z_{i-1}}_{\text{posterga}}, \underbrace{z_i, z_{i+1}, \dots, z_{j-1}}_{\text{não comp.}}, \underbrace{z_j, z_{j+1}, \dots, z_n}_{\text{posterga}}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & Pr\{z_i \text{ ser comparado com } z_j\} \\ &= Pr\{z_i \text{ ou } z_j \text{ ser escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}\} \\ &= Pr\{z_i \text{ ser escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}\} + \\ &\quad Pr\{z_j \text{ ser escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}\} \\ &= \frac{1}{j-i+1} + \frac{1}{j-i+1} = \frac{2}{j-i+1}. \end{aligned}$$

Comparação de dois elementos

Considere a escolha do pivô e a comparação entre z_i e z_j :

$$\underbrace{z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, \textcolor{red}{z_i}}_{\text{posterga}}, \underbrace{\textcolor{green}{z_{i+1}}, \dots, \textcolor{green}{z_{j-1}}, \textcolor{red}{z_j}}_{\text{não comp.}}, \underbrace{z_{j+1}, \dots, z_n}_{\text{posterga}}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & Pr\{z_i \text{ ser comparado com } z_j\} \\ &= Pr\{z_i \text{ ou } z_j \text{ ser escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}\} \\ &= Pr\{z_i \text{ ser escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}\} + \\ &\quad Pr\{z_j \text{ ser escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}\} \\ &= \frac{1}{j-i+1} + \frac{1}{j-i+1} = \frac{2}{j-i+1}. \end{aligned}$$

Comparação de dois elementos

Considere a escolha do pivô e a comparação entre z_i e z_j :

$$\underbrace{z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, \textcolor{red}{z_i}}_{\text{posterga}}, \underbrace{\textcolor{green}{z_{i+1}}, \dots, \textcolor{green}{z_{j-1}}, \textcolor{red}{z_j}}_{\text{não comp.}}, \underbrace{z_{j+1}, \dots, z_n}_{\text{posterga}}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & Pr\{z_i \text{ ser comparado com } z_j\} \\ &= Pr\{z_i \text{ ou } z_j \text{ ser escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}\} \\ &= Pr\{z_i \text{ ser escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}\} + \\ &\quad Pr\{z_j \text{ ser escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}\} \\ &= \frac{1}{j-i+1} + \frac{1}{j-i+1} = \frac{2}{j-i+1}. \end{aligned}$$

Comparação de dois elementos

Considere a escolha do pivô e a comparação entre z_i e z_j :

$$\underbrace{z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, \textcolor{red}{z_i}}_{\text{posterga}}, \underbrace{\textcolor{green}{z_{i+1}}, \dots, \textcolor{green}{z_{j-1}}, \textcolor{red}{z_j}}_{\text{não comp.}}, \underbrace{z_{j+1}, \dots, z_n}_{\text{posterga}}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & Pr\{z_i \text{ ser comparado com } z_j\} \\ &= Pr\{z_i \text{ ou } z_j \text{ ser escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}\} \\ &= Pr\{z_i \text{ ser escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}\} + \\ &\quad Pr\{z_j \text{ ser escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}\} \\ &= \frac{1}{j-i+1} + \frac{1}{j-i+1} = \frac{2}{j-i+1}. \end{aligned}$$

Tempo esperado de QUICKSORT-ALEATÓRIO (cont)

Portanto,

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E[X_{ij}] \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{2}{j-i+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} \frac{2}{k+1} \\ &< \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^n \frac{2}{k} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} O(\log n) \\ &= O(n \log n) \end{aligned}$$

Conclusão

O consumo de tempo esperado pelo QUICKSORT-ALEATÓRIO para **itens distintos** é $O(n \log n)$.

Algumas observações:

1. qual o tempo esperado de QUICKSORT-ALEATÓRIO quando todos os elementos são iguais?
2. podemos modificar QUICKSORT-ALEATÓRIO para executar em tempo esperado $O(n \log n)$ quando há elementos iguais.
 - ▶ modificamos PARTICIONE-ALEATÓRIO para dividir o vetor em três partes: menores, iguais e maiores que o pivô
 - ▶ faça isso como **exercício**

Conclusão

O consumo de tempo esperado pelo QUICKSORT-ALEATÓRIO para **itens distintos** é $O(n \log n)$.

Algumas observações:

1. qual o tempo esperado de QUICKSORT-ALEATÓRIO quando todos os elementos são iguais?
2. podemos modificar QUICKSORT-ALEATÓRIO para executar em tempo esperado $O(n \log n)$ quando há elementos iguais.
 - ▶ modificamos PARTICIONE-ALEATÓRIO para dividir o vetor em três partes: menores, iguais e maiores que o pivô
 - ▶ faça isso como **exercício**

Conclusão

O consumo de tempo esperado pelo QUICKSORT-ALEATÓRIO para **itens distintos** é $O(n \log n)$.

Algumas observações:

1. qual o tempo esperado de QUICKSORT-ALEATÓRIO quando todos os elementos são iguais?
2. podemos modificar QUICKSORT-ALEATÓRIO para executar em tempo esperado $O(n \log n)$ quando há elementos iguais.
 - ▶ modificamos PARTICIONE-ALEATÓRIO para dividir o vetor em três partes: menores, iguais e maiores que o pivô
 - ▶ faça isso como **exercício**

Conclusão

O consumo de tempo esperado pelo QUICKSORT-ALEATÓRIO para **itens distintos** é $O(n \log n)$.

Algumas observações:

1. qual o tempo esperado de QUICKSORT-ALEATÓRIO quando todos os elementos são iguais?
2. podemos modificar QUICKSORT-ALEATÓRIO para executar em tempo esperado $O(n \log n)$ quando há elementos iguais.
 - ▶ modificamos PARTICIONE-ALEATÓRIO para dividir o vetor em três partes: menores, iguais e maiores que o pivô
 - ▶ faça isso como **exercício**

Conclusão

O consumo de tempo esperado pelo QUICKSORT-ALEATÓRIO para **itens distintos** é $O(n \log n)$.

Algumas observações:

1. qual o tempo esperado de QUICKSORT-ALEATÓRIO quando todos os elementos são iguais?
2. podemos modificar QUICKSORT-ALEATÓRIO para executar em tempo esperado $O(n \log n)$ quando há elementos iguais.
 - ▶ modificamos PARTICIONE-ALEATÓRIO para dividir o vetor em três partes: menores, iguais e maiores que o pivô
 - ▶ faça isso como **exercício**

Conclusão

O consumo de tempo esperado pelo QUICKSORT-ALEATÓRIO para **itens distintos** é $O(n \log n)$.

Algumas observações:

1. qual o tempo esperado de QUICKSORT-ALEATÓRIO quando todos os elementos são iguais?
2. podemos modificar QUICKSORT-ALEATÓRIO para executar em tempo esperado $O(n \log n)$ quando há elementos iguais.
 - ▶ modificamos PARTICIONE-ALEATÓRIO para dividir o vetor em três partes: menores, iguais e maiores que o pivô
 - ▶ faça isso como **exercício**