

Um algoritmo simples, eficiente e flexível para geração de grafos

João Pedro C. Morais Ruben Interian

Relatório Técnico - IC-PFG-25-05
Projeto Final de Graduação
2025 - Dezembro

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO

The contents of this report are the sole responsibility of the authors.
O conteúdo deste relatório é de única responsabilidade dos autores.

Um algoritmo simples, eficiente e flexível para geração de grafos

João Pedro C. Morais

Ruben Interian

Resumo

Este estudo apresenta um algoritmo capaz de criar grafos não direcionados com três características principais observadas em redes do mundo real: distribuição de graus de cauda longa (ou livre de escala), curtas distâncias médias entre os nós (fenômeno *small-world*) e altos coeficientes de clusterização. A ideia central é adicionar, a cada passo, um novo nó à rede e realizar passeios aleatórios sobre os nós já existentes, selecionando um subconjunto deles para ser marcado e conectado ao novo nó. Adicionalmente, com uma probabilidade ajustável, podem ser criadas arestas entre os próprios nós marcados ao final do passeio aleatório. Entre as principais vantagens do nosso algoritmo estão sua simplicidade, eficiência (complexidade de tempo próxima da linear) e flexibilidade para gerar redes com diferentes características, sem utilizar informações globais sobre a topologia da rede. Mostramos como os parâmetros podem variar para gerar redes com diferentes valores das distâncias médias entre os nós e dos coeficientes de clusterização, mantendo uma distribuição de graus de cauda longa. A implementação do nosso algoritmo está disponível publicamente em um repositório no GitHub.

1 Introdução

Nos últimos anos, o estudo de redes complexas ganhou destaque em diversas disciplinas científicas, como sociologia, física, biologia e ciência da computação [1, 2, 3, 4, 5]. Redes do mundo real frequentemente apresentam características *scale-free* e uma surpreendente proximidade entre seus nós. Essas duas propriedades, geralmente observadas em redes reais, são conhecidas como o efeito Matthew e o fenômeno *small-world*.

O efeito Matthew (também conhecido como efeito “o rico fica mais rico”, ou de vantagem acumulada) reflete uma dinâmica de conexão preferencial [6], levando ao surgimento de hubs com alto grau e distribuições de grau de cauda longa [7]. Esse comportamento é facilmente observado em redes sociais, onde a maioria das pessoas possui poucas conexões, enquanto uma minoria concentra um número muito elevado de conexões [8].

As redes sociais também são exemplos de redes com alto coeficiente de clusterização, nas quais os indivíduos tendem a formar grupos fortemente conectados, como círculos de amizade, grupos familiares ou comunidades profissionais. Nesses agrupamentos, a probabilidade de que dois amigos de uma mesma pessoa também sejam amigos entre si é maior do que em redes aleatórias, resultando em altos coeficientes de clusterização.

Por fim, a propriedade *small-world* caracteriza redes com pequenas distâncias médias, o que favorece a navegabilidade na rede. Redes de colaboração entre atores e a rede neural

do verme *C. elegans* são exemplos clássicos de redes *small-world* [9].

Modelar redes com essas três características pode ser desafiador, já que os mecanismos subjacentes a cada uma delas tendem a direcionar a estrutura da rede em sentidos diferentes. Modelos baseados em passeios aleatórios [10] já foram utilizados para gerar redes com distribuições de graus de cauda longa, capturando o crescimento natural e a adjacência preferencial de sistemas reais. Uma vantagem importante é sua capacidade de criar estruturas sem a necessidade de informações globais, o que está alinhado com o desenvolvimento orgânico de redes reais. Embora eficazes na geração de hubs e na modelagem do efeito Matthew, os passeios aleatórios tradicionais frequentemente deixam de reduzir os comprimentos dos caminhos entre os nós – uma característica crucial para redes do tipo *small-world* – e geram coeficientes de clusterização pequenos. Essas limitações dificultam a modelagem de sistemas que exigem distribuições de graus de cauda longa, altos coeficientes de clusterização e pequenas distâncias médias entre os nós.

O **objetivo** deste artigo é apresentar um algoritmo de passeios aleatórios que é simples, intuitivo e eficiente, capaz de gerar redes *small-world* com alta clusterização local e distribuições de graus de cauda longa, sem exigir nenhuma informação global sobre a rede, como os graus de todos os nós ou suas coordenadas em algum espaço euclidiano. O algoritmo proposto neste trabalho representa um avanço significativo em relação ao algoritmo apresentado por Morais e Interian [11]. Nosso algoritmo é eficiente, ou seja, linear no número de nós da rede, e flexível, gerando redes com diferentes coeficientes de clusterização e variadas distâncias médias entre os nós.

O artigo está organizado da seguinte forma. A Seção 2 apresenta trabalhos anteriores que inspiraram e contribuíram com ideias para a abordagem apresentada. Na Seção 3, descrevemos nosso algoritmo. Os resultados e características das redes geradas são apresentados na Seção 4. As conclusões são detalhadas na última seção.

2 Trabalhos anteriores

Trabalhos anteriores estudaram a geração de redes com combinações específicas das propriedades consideradas neste estudo.

Afirmando que redes reais frequentemente são altamente clusterizadas e ao mesmo tempo apresentam pequenas distâncias médias entre nós, Watts e Strogatz [9] propuseram um modelo para reproduzir tais características. Começando com um conjunto de N nós em ordem circular, onde cada nó é conectado a k vizinhos por arestas não direcionadas, os autores realizaram a reconfiguração de cada aresta com uma pequena probabilidade fixa p . O coeficiente de clusterização médio permaneceu alto, enquanto a distância média caiu para um valor pequeno, aproximadamente proporcional a $\log N$.

Modelos de redes em espaço latente também foram utilizados para investigar redes *small-world* com clusterização não muito próximas do zero [12]. Na versão mais simples, também chamada de modelo de grafo geométrico aleatório, os nós são distribuídos uniformemente ao acaso em algum espaço métrico, e dois nós i e j são conectados se e somente se a distância x_{ij} entre eles for menor que um parâmetro μ , resultando em alta clusterização e grandes distâncias médias. No entanto, o modelo pode tornar-se *small-world* ao introduzir uma

probabilidade p_{ij} de existência de uma aresta entre os nós. Por exemplo, em \mathbb{R}^d , escolhendo $p_{ij} \propto x_{ij}^{-\beta}$ com $\beta \in (d, 2d)$, obtêm-se coeficientes de clusterização não nulos e redes do tipo *small-world*, com distâncias médias escalando proporcionalmente a $\log N$ [13].

Por outro lado, redes reais também apresentam nós com alto grau, chamados hubs, que estão ausentes nos modelos mencionados. Barabási e Albert [6] propuseram um processo de adjacência preferencial que gera distribuições de graus de cauda longa. Começando com um pequeno grafo, um novo nó v é adicionado a cada iteração, com k novas arestas ligando v a k nós diferentes, escolhidos com probabilidades proporcionais aos graus dos nós. Ou seja, a probabilidade de o nó v escolher o nó w é proporcional ao grau de w naquele momento, gerando redes do tipo *scale-free*.

Para aumentar o coeficiente de clusterização das redes geradas pelo modelo de Barabási-Albert, Holme e Kim [14] introduziram uma etapa de formação de tríades realizada com probabilidade P_t após a adição de um nó e suas arestas à rede. Quando uma nova aresta conecta o novo nó v a um nó w , é adicionada uma aresta entre v e um vizinho aleatório de w , formando uma tríade entre os três nós e aumentando a clusterização da rede.

Nesse mesmo contexto, Klemm e Eguíluz [15] propuseram um modelo de crescimento com memória, no qual há nós ativos e inativos, e novas conexões são feitas exclusivamente com os nós ativos. A cada passo, um novo nó ativo é adicionado à rede, e um dos nós ativos atuais é desativado com probabilidade inversamente proporcional ao seu grau – modelando uma forma de esquecimento coletivo, onde nós muito conectados são menos propensos a serem esquecidos. Como resultado, os nós só permanecem ativos se tiverem alto grau. O modelo é capaz de gerar redes cuja distribuição de graus é uma lei de potência, e com altos coeficientes de clusterização.

Embora modelos anteriores tenham apresentado bons resultados na construção de redes *scale-free*, uma preocupação relevante é que eles requerem informação global a cada passo (por exemplo, os graus de todos os nós para calcular a probabilidade da conexão preferencial), o que pode ser pouco realista, já que em redes reais os vínculos surgem naturalmente, sem conhecimento da topologia global da rede.

Uma abordagem diferente foi proposta por Davidsen et al. [16]. O modelo mantém uma população constante de indivíduos (nós), cada um conectado por arestas não direcionadas. A cada passo, um indivíduo aleatório apresenta dois de seus conhecidos, formando uma nova aresta – esse mecanismo de conexão transitiva leva à formação de triângulos. Adicionalmente, com uma pequena probabilidade, uma pessoa é removida da rede junto com suas conexões e substituída por um novo participante com um único conhecido aleatório. Essas duas etapas alternadas – formação de triângulos e substituição de um nó – conduzem a rede a um estado estacionário. As redes resultantes exibem alta clusterização, pequenas distâncias médias e, para valores específicos dos parâmetros, apresentam distribuições de graus de cauda longa.

No entanto, Davidsen et al. [16] não investigaram o número de passos necessários para a rede atingir o estado estacionário. Isto representa uma limitação importante para a geração de redes grandes, onde a convergência pode ser lenta ou computacionalmente custosa, e onde uma complexidade de tempo não linear pode tornar inviável o uso de qualquer algoritmo com complexidade superior a linear.

Saramäki e Kaski [10] propuseram o uso de passeios aleatórios para gerar redes não direcionadas livres de escala. Eles demonstraram que não é necessário ter informações globais sobre os graus dos nós para alcançar esse resultado. Herrera e Zufiria [17] aprimoraram esse processo utilizando o número de passos dos passeios aleatórios para guiar a geração de triângulos, introduzindo uma maneira de controlar o coeficiente de clusterização usando apenas informações locais.

O processo do passeio aleatório proposto por Saramäki e Kaski [10] parte de um pequeno grafo inicial com n_0 nós. A cada iteração, um novo nó v é adicionado à rede, conectando v aos nós existentes que são escolhidos com base no passeio aleatório. Esses nós escolhidos (chamados de “nós marcados”) são identificados da seguinte maneira: iniciando de um nó aleatório w , realizam-se l passos aleatórios a partir de w , permitindo a visita a nós repetidos. Ao final de cada passeio, o nó de chegada é marcado, e o processo continua até que m nós sejam marcados. O novo nó v é então conectado aos nós marcados. O processo se encerra após a adição de N novos nós ao grafo.

Herrera e Zufiria [17] observaram que, ao variar o valor do parâmetro l (número de passos do passeio), é possível controlar o coeficiente de clusterização da rede. Se $l = 1$, o vizinho de um nó marcado também será marcado, gerando um triângulo entre esses dois vizinhos e o novo nó, afetando diretamente a clusterização. Cada nó v possui um valor associado p_v , a probabilidade de $l = 1$ se um passeio aleatório começa naquele nó.

Para reduzir as distâncias médias nas redes resultantes do modelo de Herrera e Zufiria, Morais e Interian [11] introduziram uma nova fase no algoritmo após o passeio aleatório, adicionando uma aresta especial ao final de cada iteração. Após o processo de marcação e conexão do passeio, escolhe-se um nó aleatório s da rede, seleciona-se um valor de distância d com base em alguma distribuição de probabilidade, e encontra-se um nó t a uma distância d de s para conectá-los. Com este aprimoramento simples, os autores conseguiram reduzir significativamente os comprimentos médios dos caminhos nas redes geradas, mantendo altos os coeficientes de clusterização e as propriedades *scale-free* dos modelos anteriores. No entanto, a etapa de encontrar um nó a uma distância exatamente d pode tornar o algoritmo computacionalmente custoso.

Passeios aleatórios que controlam o tamanho de cada passeio l mostraram-se eficientes para gerar redes com distribuições de cauda longa e regulação do coeficiente de clusterização. Ainda assim, a geração *eficiente* de redes que exibam simultaneamente distribuições livres de escala, altos coeficientes de clusterização e pequenos comprimentos médios dos caminhos entre os nós – mantendo baixa a complexidade de tempo e utilizando apenas informações locais, como na formação de redes reais – continua sendo um desafio, **justificando** a busca por algoritmos inovadores.

3 Desenvolvimento do Trabalho

O algoritmo de Morais e Interian [11] conseguiu reduzir as distâncias médias nas redes geradas pelo algoritmo de Herrera e Zufiria ao introduzir uma nova etapa no processo, na qual uma aresta é adicionada ligando dois nós aleatórios a uma distância d entre si, onde d é escolhido com base em uma distribuição de probabilidade. A seguir, este algoritmo é

apresentado de forma simplificada:

1. Comece com um pequeno grafo inicial com n_0 nós.
2. Adicione um novo nó v à rede.
3. Escolha um nó aleatório w . Realize um passeio aleatório a partir de w , marcando cada nó alcançado, a cada l passos. Pare quando exatamente m nós forem marcados, e conecte estes nós a v .
4. Escolha um valor d com alguma probabilidade $P(d)$ e um nó aleatório s . Encontre um nó t a uma distância d de s e conecte s e t com uma aresta.
5. Repita os passos 2 a 4 um total de N vezes.

A aresta adicional do passo 4 deste algoritmo reduz significativamente as distâncias médias dentro do grafo gerado [11]. Porém, encontrar dois nós separados por uma distância fixa d torna o algoritmo computacionalmente custoso, fazendo com que sua complexidade total seja quadrática no número de nós N , o que pode ser problemático quando o objetivo é a geração de redes grandes.

Outro problema deste método é que a nova etapa adicionado no passo 4 do algoritmo é muito heterogênea, ou seja, não está bem integrada em relação ao núcleo do algoritmo. A adição da aresta não está relacionada ao passeio aleatório, tornando o processo inconsistente ou artificial, ao contrário do crescimento orgânico das redes reais. Além disso, a aresta adicional pode reduzir o coeficiente de clusterização, já que conectar nós aleatoriamente pode abrir triângulos que permanecerão não fechados até o final do processo, limitando os coeficientes máximos de clusterização observados nas redes geradas.

Por outro lado, o algoritmo proposto neste trabalho começa com um pequeno grafo inicial $G = (V, E)$ com n_0 nós. A cada iteração, um novo nó v é adicionado ao grafo, e um passeio aleatório é realizado, marcando um nó a cada l passos até que m nós sejam marcados. Em seguida, todos os nós marcados são conectados a v . Suponha agora que l pode assumir valores entre 1 e k , com base em uma distribuição geométrica truncada. Por exemplo, se $k = 10$:

$$P(l = x) = \frac{p(1-p)^{x-1}}{1 - (1-p)^{10}}$$

Neste caso, podemos controlar o coeficiente de clusterização do grafo gerado por meio do parâmetro p . Embora a probabilidade de obter um valor alto de l seja baixa, uma pequena parcela dos passeios chegará a nós distantes, e o novo nó v funcionará como um atalho que irá reduzir as distâncias médias da rede sem a necessidade de criar arestas adicionais.

Neste momento, introduzimos um novo passo do algoritmo, conectando os nós marcados entre si com probabilidade fp , que será um novo parâmetro. Esta etapa pode ser interpretada da seguinte forma: “há dois amigos de um amigo em comum, o novo nó v , formando conexões entre si”. Este passo segue o princípio chamado *Triadic Closure* [18, 19], característica frequentemente observada em redes reais, segundo a qual, se dois nós estão conectados a um terceiro, há uma maior probabilidade de que também se conectem diretamente. Essas conexões entre os nós marcados poderiam surgir futuramente – como sugere

o princípio mencionado – mas, em nossa implementação, elas são criadas no momento em que o novo nó é adicionado.

O passo a passo do novo algoritmo é:

1. Comece com um pequeno grafo inicial $G = (V, E)$ com n_0 nós.
2. Adicione um novo nó v à rede.
3. Escolha um valor $l \in \{1, \dots, k\}$ a partir de alguma distribuição de probabilidade $P(l)$, e escolha um nó aleatório w . Realize um passeio aleatório a partir de w , marcando um nó a cada l passos. Pare quando m nós distintos forem marcados e conecte cada um deles a v .
4. Para cada par de nós marcados, conecte-os com probabilidade fp .
5. Repita os passos 2 a 4 um total de N vezes.

Os Algoritmos 1 e 2 detalham esse processo. O Algoritmo 1 explica como funciona o passeio aleatório a partir do nó *start* com a distribuição de probabilidade P .

Algorithm 1 RandomWalk (G, start, P, m)

```

1: marked  $\leftarrow$  {start}
2: current  $\leftarrow$  start
3: while |marked| <  $m$  do
4:   Escolha  $l \in \{1, \dots, 10\}$  com probabilidade  $P(l)$ .
5:   for  $i = 1$  até  $l$  do
6:     neighbors  $\leftarrow$  G[current].neighbors
7:     current  $\leftarrow$  vizinho aleatório de neighbors
8:   marked  $\leftarrow$  marked  $\cup$  {current}
9: return marked

```

O Algoritmo 2 descreve o processo de geração da rede. Ele recebe como entrada um grafo inicial G , normalmente pequeno e conexo, o número de nós N a serem adicionados, o parâmetro de distribuição P usado pelo passeio aleatório, o número de arestas m a serem adicionadas para cada novo nó, e a probabilidade fp de criação de arestas entre os vizinhos selecionados.

A complexidade de tempo de pior caso do Algoritmo 1 é $O(km)$, onde m é o número de nós a serem marcados. O laço principal roda até que m nós tenham sido visitados e, a cada iteração, no máximo um novo nó é adicionado. O valor l sorteado está limitado por um valor pequeno k , fazendo com que cada iteração custe no máximo $O(k)$ operações. Portanto, a complexidade total é $O(km) = O(m)$ para k pequeno.

Algorithm 2 GenerateNetwork (G, N, P, m, fp)

```

1: repeat  $N$  times
2:    $start \leftarrow$  nó aleatório de  $G$ 
3:    $marked \leftarrow$  RandomWalk( $G, start, p, m$ )
4:    $v \leftarrow G.add\_node()$ 
5:   for  $u \in marked$  do
6:      $G.add\_edge(v, u)$ 
7:   for all  $\{u_1, u_2\} \subset marked$  do
8:     Com probabilidade  $fp$ , execute  $G.add\_edge(u_1, u_2)$ 
9: return  $G$ 

```

Agora podemos calcular a complexidade de tempo do algoritmo de geração da rede. O laço principal roda N vezes. Em cada iteração, realiza-se um passeio aleatório com complexidade $O(m)$, adiciona-se um novo nó e conecta-se a m nós (também $O(m)$), e são consideradas $O(m^2)$ possíveis arestas entre os pares de nós marcados. Assim, a complexidade final é $O(N \cdot (m + m + m^2)) = O(Nm^2)$.

Embora o resultado seja quadrático em m , este parâmetro deve tomar valores pequenos, já que o objetivo é gerar redes esparsas. Gerar redes densas está fora do escopo deste trabalho, já que estudos empíricos mostram que grandes redes reais – sociais, tecnológicas, biológicas e ecológicas – são esparsas, com números pequenos de arestas incidentes a cada vértice, na média. Assim, a complexidade atual representa uma melhoria significativa em relação ao algoritmo anterior, permitindo que N alcance valores muito maiores.

4 Resultados

Esta seção apresenta as principais propriedades das redes geradas pelo algoritmo proposto. Demonstramos como o método pode produzir grafos com ampla variedade de características, assim como com características semelhantes às observadas em redes reais. Nos experimentos, o grafo inicial G utilizado foi um ciclo com 10 vértices (isto é, o grafo circular C_{10}). Cada linha da tabela representa uma execução distinta do algoritmo.

A análise é centrada em três métricas fundamentais: o coeficiente de clusterização C , que reflete a probabilidade média de que dois vizinhos de um nó também sejam vizinhos entre si; o comprimento médio do caminho mais curto \bar{L} , que expressa a distância média entre todos os pares de nós; e o expoente da lei de potência γ , que descreve como os graus dos nós se distribuem, com $P(k) \propto k^{-\gamma}$, onde $P(k)$ é a probabilidade de um nó ter grau k . Esse expoente é estimado pela inclinação da reta ajustada à distribuição de graus em escala log-log, utilizando o método dos mínimos quadrados.

As figuras mostram que é possível gerar uma significativa variedade de redes com o algoritmo. As figuras 1 e 2 mostram que o coeficiente de clusterização cresce de maneira praticamente linear com o aumento de p e de fp , fornecendo múltiplas possibilidades para o controle desta métrica nas redes geradas. A figura 3 mostra a relação entre m e \bar{L} , que diminui consideravelmente com o aumento de m , chegando a valores inferiores a três.

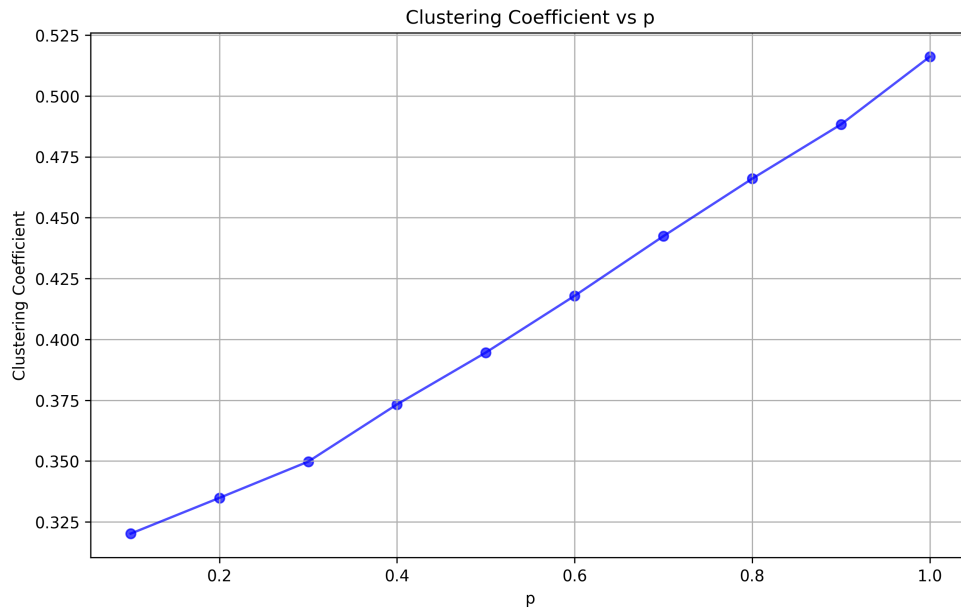


Figura 1: Controlando C utilizando p ($fp = 0.5$, $m = 5$, $N = 20000$).

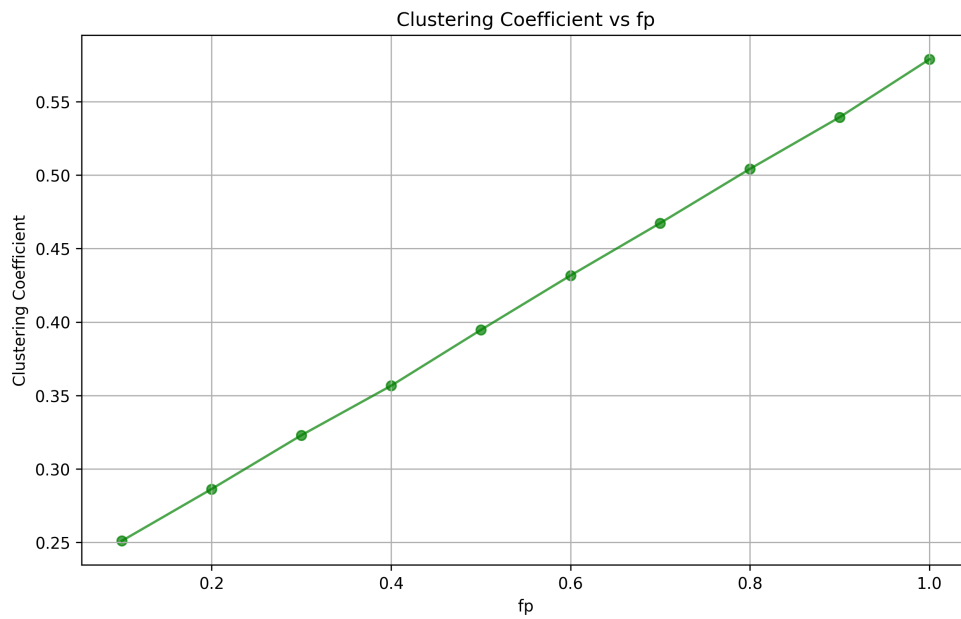


Figura 2: Controlando C utilizando fp ($p = 0.5$, $m = 5$, $N = 20000$)

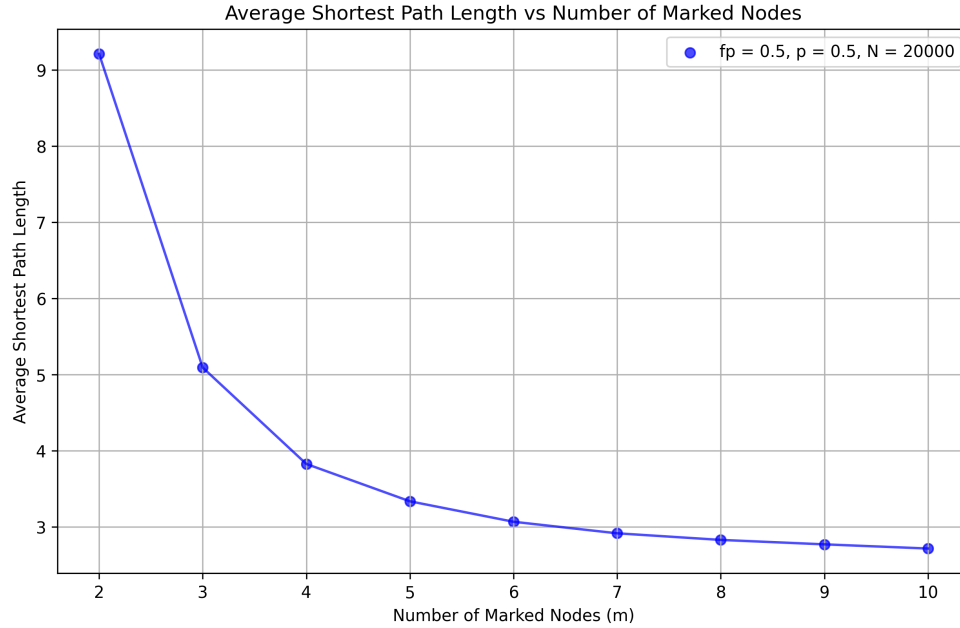


Figura 3: Controlando \bar{L} utilizando m ($fp = 0.5, p = 0.5, N = 20000$)

A Tabela 1 mostra que, ao aumentar o número de nós N (com $m = 5$ e $p_1 = 0,5$ fixos), os coeficientes de clusterização se estabilizam em um nível alto após $N = 10.000$, refletindo os altos coeficientes de clusterização das redes reais, enquanto o expoente γ diminui lentamente. Além disso, tanto a tabela quanto a Figura 4 indicam que, apesar das variações estocásticas, o comprimento médio dos caminhos cresce de forma logarítmica com N , confirmando o comportamento *small-world* das redes geradas.

Tabela 1: Redes geradas e suas respectivas métricas para diferentes valores de N ($m = 2, p = 0,5$). Parâmetro: número total de nós N adicionados ao grafo. Métricas apresentadas: coeficiente de clusterização C ; distância média \bar{L} ; expoente estimado da lei de potência γ ; e grau máximo da rede d_{max} .

N	C	\bar{L}	γ	d_{max}
100	0.5910	4.6854	-1.0766	14
200	0.6082	5.5087	-1.2228	23
1000	0.5733	6.8307	-1.7672	37
2000	0.5566	6.9737	-1.9692	48
5000	0.5611	7.5983	-2.2840	56
10000	0.5443	8.5549	-2.4097	83
20000	0.5546	9.6340	-2.6570	68
50000	0.5509	9.5437	-2.7631	130
100000	0.5550	10.5823	-2.9616	103

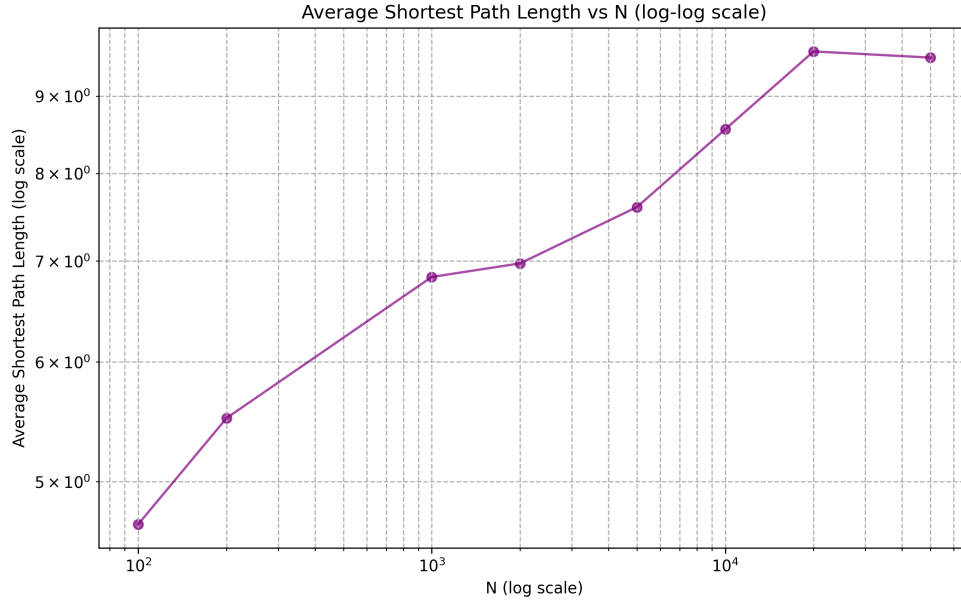


Figura 4: Comparação de N com a distância média, em escala log-log ($p = 0.5$, $fp = 0.5$, $m = 2$).

5 Conclusões

Este trabalho abordou o desafio de gerar redes que simultaneamente apresentem distribuições de graus de cauda longa, altos coeficientes de clusterização e curtas distâncias médias entre os nós – três propriedades fundamentais observadas em redes reais, mas difíceis de alcançar ao mesmo tempo por algoritmos eficientes.

Os resultados mostraram que o algoritmo proposto atinge essas três propriedades com eficiência e consistência, mesmo em redes com número elevado de nós. As métricas estruturais das redes geradas podem ser controladas de forma precisa por meio de poucos parâmetros: o coeficiente de clusterização cresce com os valores de p e fp , enquanto o aumento de m reduz significativamente a distância média entre os nós, sem comprometer a esparsidade da rede ou a distribuição de graus de cauda longa.

Diferentemente de outros modelos, este método não requer nenhum conhecimento global da topologia da rede, e mantém a sua complexidade computacional reduzida, linear no número de nós, o que o torna viável para aplicações em larga escala e mais aderente à formação orgânica de redes reais.

Referências

- [1] G. F. de Arruda, F. A. Rodrigues, and Y. Moreno. Fundamentals of spreading processes in single and multilayer complex networks. *Physics Reports*, 756:1–59, 2018.

- [2] R. Interian, R. G. Marzo, I. Mendoza, and C. C. Ribeiro. Network polarization, filter bubbles, and echo chambers: an annotated review of measures and reduction methods. *International Transactions in Operational Research*, 30(6):3122–3158, 2023.
- [3] C. Seguin, O. Sporns, and A. Zalesky. Brain network communication: concepts, models and applications. *Nature Reviews Neuroscience*, 24(9):557–574, 2023.
- [4] B. Zhou, P. Holme, Z. Gong, C. Zhan, Y. Huang, X. Lu, and X. Meng. The nature and nurture of network evolution. *Nature Communications*, 14(1):7031, 2023.
- [5] R. Interian. A political radicalization framework based on Moral Foundations Theory. *Mathematics*, 12(13), 2024.
- [6] A.-L. Barabási and R. Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286(5439):509–512, 1999.
- [7] A. Broido and A. Clauset. Scale-free networks are rare. *Nature Communications*, 10(1):1017, 2019.
- [8] S. Bhattacharya, S. Sinha, and S. Roy. Impact of structural properties on network structure for online social networks. *Procedia Computer Science*, 167:1200–1209, 2020. International Conference on Computational Intelligence and Data Science.
- [9] D. Watts and S. Strogatz. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, 393(6684):440–442, 1998.
- [10] J. Saramäki and K. Kaski. Scale-free networks generated by random walkers. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 341:80–86, 2004.
- [11] João Pedro C. Morais and Ruben Interian. A simple and flexible algorithm to generate real-world networks, 2025. <https://link.springer.com/book/9783031936180> (Em impressão).
- [12] M. Boguñá, I. Bonamassa, M. de Domenico, S. Havlin, D. Krioukov, and M. A. Serrano. Network geometry. *Nature Reviews Physics*, 3(2):114–135, 2021.
- [13] M. Boguñá, D. Krioukov, P. Almagro, and M. A. Serrano. Small worlds and clustering in spatial networks. *Phys. Rev. Res.*, 2:023040, 2020.
- [14] P. Holme and B. J. Kim. Growing scale-free networks with tunable clustering. *Physical Review E*, 65(2), 2002.
- [15] Konstantin Klemm and Víctor M. Eguíluz. Highly clustered scale-free networks. *Physical Review E*, 65(3), February 2002.
- [16] Jörn Davidsen, Holger Ebel, and Stefan Bornholdt. Emergence of a small world from local interactions: Modeling acquaintance networks. *Physical Review Letters*, 88(12), March 2002.

- [17] C. Herrera and P. J. Zufria. Generating scale-free networks with adjustable clustering coefficient via random walks. In *2011 IEEE Network Science Workshop*, pages 167–172, 2011.
- [18] Mark S. Granovetter. The strength of weak ties. *American Journal of Sociology*, 78(6):1360–1380, May 1973.
- [19] David Easley and Jon Kleinberg. *Networks, Crowds, and Markets: Reasoning about a Highly Connected World*. Cambridge University Press, 2010.