Lista 14

MC358 — Fundamentos Matemáticos para Computação

Prof. Pedro J. de Rezende

2º Semestre de 2013

1. Seja $R \subset A \times A$ uma relação de equivalência sobre um conjunto finito A. Denote por $[a]$ a classe de equivalência do elemento $a \in A$. Sejam $a, b \in A$. Prove que as seguintes propriedades são equivalentes:

   (a) $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

   (b) $(a, b) \in R$

   (c) $[a] = [b]$

2. Sejam $d_1, \cdots, d_n$ inteiros positivos e $n \geq 2$. Prove por indução que, se $d_1 + \cdots + d_n = 2n - 2$, então existe um grafo simples conexo sem circuitos com graus exatamente $d_1, \cdots, d_n$. Dica: perceba que deve existir pelo menos um vértice de grau 1.

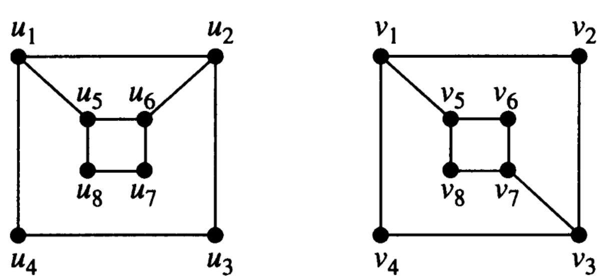
3. Seja G um grafo direcionado. Prove por indução que existe um conjunto S de vértices não adjacentes tal que todo vértice de G pode ser alcançado a partir de um vértice de S por um caminho de tamanho menor ou igual a dois. (Este é um exercício tratado em classe e deixado apenas para você escrever a prova com o devido formalismo.)

4. Mostre que isomorfismo entre grafos simples é uma relação de equivalência.

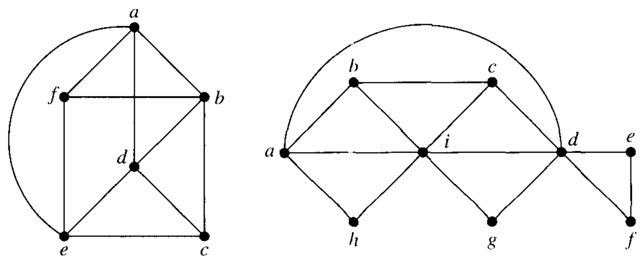
5. Defina isomorfismo entre grafos dirigidos.

6. Mostre que todo grafo conexo com n vértices tem pelo menos $n - 1$ arestas.

7. Os seguintes grafos são isomorfos? Justifique.



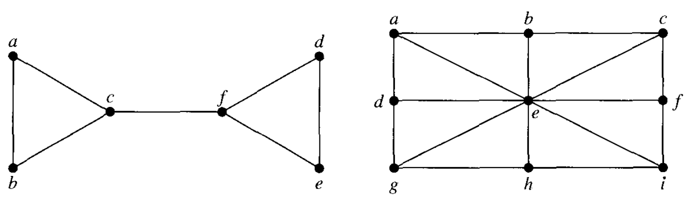
8. Determine se os seguintes grafos possuem um circuito euleriano e, caso negativo, um caminho euleriano. Justifique.



a) b)

9. Para quais valores de n e m os grafos K_n, $K_{m,n}$, C_n, W_n e Q_n possuem um circuito euleriano e um caminho euleriano?

10. Determine se os seguintes grafos possuem um circuito hamiltoniano. Justifique.



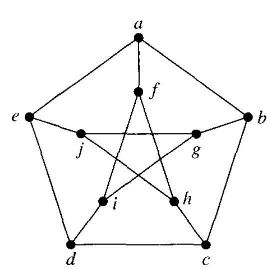
a) b)

11. Para quais valores de n e m os grafos K_n, C_n, W_n e Q_n possuem um circuito hamiltoniano ou um caminho hamiltoniano? Dica: para Q_n, use indução.

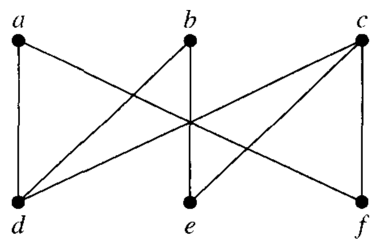
12. Considere o grafo bipartido completo $K_{n,n}$ para $n \geq 2$. User o Teorema de Ore para provar que $K_{n,n}$ é hamiltoniano. Sua prova funciona para $K_{n,n+1}$ para algum $n \geq 2$? Se sim, justifique. Se não, explique porquê.

13. Para quais valores de n e m o grafo $K_{m,n}$, possui um circuito hamiltoniano ou um caminho hamiltoniano?

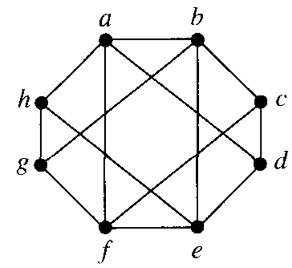
14. Mostre que o grafo de Petersen (abaixo) não possui um circuito hamiltoniano, mas que o subgrafo obtido pela remoção de um vértice v *qualquer* (e de todas as arestas incidentes em v) possui um circuito hamiltoniano.



15. Determine se os seguintes grafos são planares. Caso positivo, desenhe o grafo sem cruzamento de arestas.



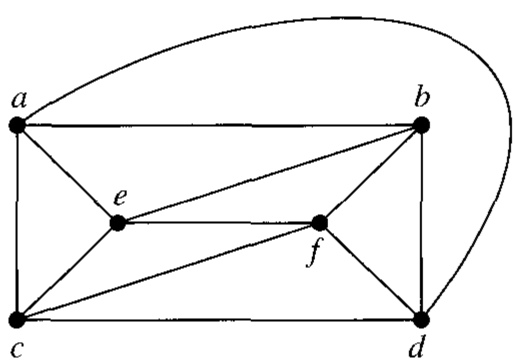
a)



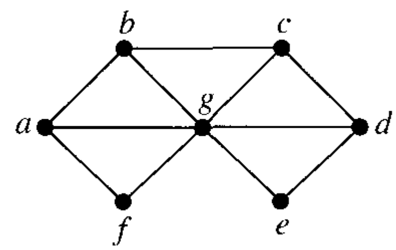
b)

16. Considere um grafo planar com k componentes conexos, e arestas e v vértices. Suponha que o plano seja dividido em r regiões por uma representação planar do grafo. Encontre uma fórmula para r em termos de e, v e k.

17. Encontre o número cromático dos seguintes grafos



a)



b)

18. Mostre que um grafo simples com um circuito ímpar não pode ser colorido com duas cores.

19. Mostre, por indução simples no número de vértices, que um grafo planar pode ser colorido usando no máximo seis cores.

20. Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. Dizemos que $S \subset V$ é um conjunto independente em G se $\forall a, b \in S, (a, b) \notin E$. Considere o seguinte problema. Dado um tabuleiro de xadrez $n \times n$ queremos determinar se é possível posicionar n damas ("rainhas") de modo que elas não se ataquem. Modele este problema como um problema de determinação de conjunto independente num grafo.