Lista 4

MC358— Fundamentos Matemáticos para Computação

Prof. Pedro J. de Rezende

2º Semestre de 2013

Lembre-se que esta lista deverá ser entregue apenas no dia 09/9.

1. Considere as premissas "Lógica é difícil ou poucos alunos gostam de lógica" e "Se matemática é fácil, então lógica não é difícil". Determine se as seguintes conclusões são válidas:
   (a) Se muitos alunos gostam de lógica, então matemática não é fácil.
   (b) Se matemática não é fácil, então poucos alunos gostam de lógica.
   (c) Matemática não é fácil ou lógica é difícil.
   (d) Lógica não é difícil ou matemática não é fácil.
   (e) Se poucos alunos gostam de lógica, então matemática não é fácil ou lógica não é difícil.

2. Use quantificadores para expressar a afirmação

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

3. Use quantificadores para expressar a definição: uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $a \in \mathbb{R}$ se

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\leq 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\geq 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

4. Seja $A\times B$ o produto cartesiano de A por B. Prove que $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$.

5. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:
   (a) n^2 é ímpar;
   (b) $1-n$ é par;
   (c) n^3 é ímpar;
   (d) n^2+1 é par.

6. Prove que é impossível cobrir, com peças de dominó 1×2, um tabuleiro de xadrez 8×8 do qual foram removidas a casa inferior esquerda e a superior direita.

7. Prove que para quaisquer inteiros a, b e m, com m positivo
$$((a \bmod m) + (b \bmod m)) \bmod m = (a + b) \bmod m.$$

8. Suponha que uma sequência de cinco uns e quatro zeros esteja disposta em torno de um círculo. Considere o algoritmo: entre dois bits iguais insira um 0 e entre dois bits diferentes insira um 1, produzindo nove bits novos; então, remova os nove bits originais. Mostre que, executando esse algoritmo repetidas vezes, você nunca obterá nove zeros. (Dica: ao invés de simplemente escrever uma looonga prova irrefletida, pense antes sobre qual estratégia de prova vista em classe resultaria numa demonstração mais sucinta.)

9. Prove que nenhum par de inteiros x e y satisfaz a equação $x^2 - 5y^2 = 2$. (Dica: considere $x^2 \bmod 5$.)

10. Prove ou disprove: para todo inteiro positivo n, $n^2 - 79n + 1601$ é um número primo.

11. Seja f uma função sobrejetora e g uma função injetora. Podemos dizer que as seguintes funções são injetoras ou sobrejetoras? Por quê? ($\circ$ denota a composição de funções.)
    (a) $f \circ g$
    (b) $g \circ h$

12. Encontre a inversa das seguintes funções e justifique:
    (a) $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = e^x$.
    (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$.

13. Seja x um número real. Mostre que $\lfloor 3x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{3} \right\rfloor$.

14. Seja A um conjunto, não necessariamente finito. Prove que não pode haver uma bijeção entre A e seu conjunto potência $P(A)$. (Dica: sendo f uma suposta bijeção, considere o conjunto $B = \{x \mid x \notin f(x)\}$.)

15. Seja P um programa e seja E uma possível entrada para P. Responda verdadeiro ou falso e justifique: o problema de se decidir se P pára com entrada E é insolúvel.