Lista 7

MC358— Fundamentos Matemáticos para Computação

Prof. Pedro J. de Rezende

2º Semestre de 2013

1. Use o método da diagonalização para provar que o problema da parada não tem solução.

2. Dados dois números racionais a e b, com $a < b$, denote por $[a, b]_{\mathbb{Q}}$ o conjunto $\{x \in \mathbb{Q} : a \leq x \leq b\}$ que denominamos de *intervalo racional*. Definimos o *tamanho* de $[a, b]_{\mathbb{Q}}$ como $b - a$. Dados dois intervalos racionais não disjuntos $[a, b]_{\mathbb{Q}}$ e $[c, d]_{\mathbb{Q}}$, sua união é o intervalo racional $[\min\{a, c\}, \max\{b, d\}]_{\mathbb{Q}}$ cujo tamanho é, portanto, $\max\{b, d\} - \min\{a, c\}$.

   Entretanto, dados dois intervalos racionais disjuntos $[a, b]_{\mathbb{Q}}$ e $[c, d]_{\mathbb{Q}}$, sua união $[a, b]_{\mathbb{Q}} \cup [c, d]_{\mathbb{Q}}$ não é um intervalo racional. Mas ainda assim podemos calcular o tamanho de sua união como $(b - a) + (d - c)$.

   Uma *cobertura* de um subconjunto $I \subset \mathbb{Q}$ por intervalos racionais é uma coleção de tais intervalos cuja união contém I.

   Considere $I = [0, 1]_{\mathbb{Q}}$. Descreva uma cobertura de I cujo tamanho total é apenas $\frac{1}{2}$.

   Dica: $\displaystyle\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2}$.

3. Prove por indução que $2^n > n^2$ para todo inteiro $n > 4$.

4. Prove por indução que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$ para todo $n \geq 1$.

5. Prove por indução que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} < 1$ para todo $n \geq 1$.