Lista 9

MC358 — Fundamentos Matemáticos para Computação

Prof. Pedro J. de Rezende

2º Semestre de 2013

1. Seja b um número real. Calcule a somatória $\sum_{k=0}^{n-1} b^k$. Dica: Considere casos: $b = 0$, $b = 1$, $0 \neq b \neq 1$, e observe que $b^k = (b^{k+1} - b^k)/(b - 1)$.

2. Encontre uma fórmula para $\sum_{k=0}^{m} \left\lfloor \sqrt[3]{k} \right\rfloor$, onde m é um inteiro positivo. Dica: use a fórmula fechada de $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

3. Prove que o conjunto de números reais que são soluções das equações quadráticas $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{Z}$, é contável.

4. Dado um número natural n, considere o conjunto F_n de todas as funções de $\{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\}$ no conjunto $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$. Prove que F_n é contável.

5. Dado um número natural n, considere o conjunto F_{n^*} de todas as funções de $\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\}$ no conjunto $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$. Prove que F_{n^*} é não contável.

6. Prove que, se A e B são conjuntos de mesma cardinalidade, então $P(A)$ e $P(B)$ também possuem a mesma cardinalidade, onde $P(\bullet)$ é o conjunto das partes de $\bullet$. Dica: considere separadamente os casos finito e infinito.

7. Dado $n \in \mathbb{N}$, denote por I_n o conjunto $\{x \in \mathbb{N} \mid x < n\}$. Dizemos que um conjunto é *finito* se tem a mesma cardinalidade que I_n para algum $n \in \mathbb{N}$, e *infinito* caso contrário. Prove que se X é um conjunto infinito, então para **todo** $n \in \mathbb{N}$ existe um subconjunto de X de mesma cardinalidade que I_n.

8. Considere a sequência de Fibonacci, dada por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Prove que $F_n = (\varphi^n - \psi^n)/\sqrt{5}$, onde $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ e $\psi = (1 - \sqrt{5})/2$.

9. Seja x um número real tal que $x \neq 0$ e $x + 1/x$ é um inteiro. Prove que para todo inteiro $n \geq 1$, $x^n + 1/x^n$ é um inteiro.

10. Prove que $2^{n-1}(a^n + b^n) \geq (a + b)^n$, onde a, b e n são inteiros positivos.

11. Prove que $x^n - y^n$ é divisível por $x - y$, para $x, y \in \mathbb{R}$ com $x \neq y$, e $n \in \mathbb{N}$.

12. Prove que todo número natural $n > 0$ pode ser escrito como soma de **distintas** potências de 2.

13. Considere o seguinte jogo para duas pessoas. Coloca-se um número arbitrário de moedas sobre a mesa, e cada jogador, alternadamente, retira no mínimo 1 e no máximo 4 moedas da pilha. Quem retirar a última moeda perde o jogo.

    Defina $f(n)$ como 1 se existe uma estratégia ganhadora para o *jogador da vez* quando há n moedas na mesa, e 0 se existe uma estratégia ganhadora para seu adversário. Isto é, $f(n) = 1$ se, diante de n moedas, o *jogador da vez* consegue sempre vencer o jogo com alguma sequência de jogadas, independentemente das jogadas do adversário e $f(n) = 0$ se, diante de n moedas, o *jogador da vez* é incapaz de vencer por melhor que ele escolha suas jogadas.

    Por exemplo, $f(1) = 0$, por definição; mas $f(5) = 1$, pois, diante de 5 moedas, o *jogador da vez* consegue ganhar tirando 4 moedas.

    Determine uma fórmula para $f(n)$ e prove-a por indução.

14. Prove que todo número natural $n > 1$ é divisível por algum primo. Dica: use indução forte.

15. Considere a sequência $a_0, a_1, a_2, \ldots$ definida por: $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3$ e $a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + a_{k-3}$ para $k \geq 3$. Prove que $a_n \leq 2^n$ para todo $n \geq 0$. Dica: use indução forte.