# Lista de Exercícios: Grafos[1]

MC348 — Fundamentos Matemáticos para Computação

Pedro J. de Rezende

1º Semestre de 2008

Assunto: Grafos

## Exercícios

1. Um grafo $G$ é *k-regular* se todo vértice de $G$ possui grau $k$.
   (a) Quais dos seguintes grafos são grafos regulares:
      i. grafos completos;
      ii. ciclos;
      iii. grafos bipartidos;
      iv. $n$-cubo;
      v. grafos bipartidos completos.
   (b) Quantas arestas possui um grafo $k$-regular com $n$ vértices?

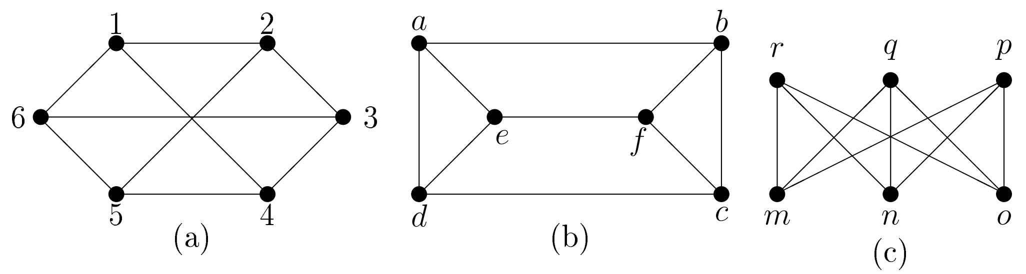
2. O *k-cubo* ($Q_k$) é um grafo simples cujos vértices são $k$-uplas ordenadas de 0's e 1's, e tal que dois vértices são adjacentes se e somente se diferem em exatamente uma coordenada.
   (a) Desenhe $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ e $Q_4$.
   (b) Qual é o número de vértices e arestas de cada um desses grafos?
   (c) Qual é o número de vértices e arestas de $Q_k$?
   (d) Demonstre que $Q_k$ é um grafo bipartido.

3. Se $G$ possui vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$, a seqüência $(gr(v_1), gr(v_2), \ldots, gr(v_n))$ é denominada *seqüência de graus* de $G$.
   (a) Existe um grafo com a seguinte seqüência de graus: 3,3,3,3,5,6,6,6,6?
   (b) Existe um grafo com a seguinte seqüência de graus: 1,1,3,3,3,3,5,6,8,9?
   (c) Existe um grafo *simples* com a seqüência de graus do item (b)?

4. Demonstre que a seqüência $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ de inteiros não negativos é uma seqüência de graus de algum grafo se e somente se $\sum_{i=1}^{n} d_i$ é par.

[1] Com a colaboração de Célia P. de Mello.

5. Os grafos abaixo são isomorfos? Analise cada par deles. Demonstre que são isomorfos, se o forem; caso contrário, justifique porque não o são.




6. Um grafo simples é *auto-complementar* se $G \cong \overline{G}$.
   (a) Dê exemplos de grafos auto-complementares.
   (b) Prove que um grafo auto-complementar tem $4k$ ou $4k+1$ vértices, para $k$ inteiro não negativo.

7. Mostre que a relação de isomorfismo entre grafos é uma relação de equivalência.

8. Prove que se dois grafos são isomorfos, então possuem o mesmo número de vértices e o mesmo número de arestas. A recíproca é verdadeira?

9. Prove que se dois grafos são isomorfos, então possuem a mesma seqüência de graus. A recíproca é verdadeira?

10. Quantos componentes conexos possuem os seguintes grafos:
    (a) $K_7$;
    (b) $K_{3,3}$;
    (c) $\overline{K_{1,5}}$;
    (d) $\overline{C_4}$;
    (e) $C_9$.

11. O *grafo tripartite completo* $K_{r,s,t}$ consiste de três conjuntos de vértices de tamanhos $r$, $s$ e $t$, com arestas unindo dois vértices se e somente se eles pertencem a conjuntos distintos.
    (a) Desenhe os grafos $K_{2,2,2}$ e $K_{2,3,3}$.
    (b) Quantos vértices e arestas o grafo $K_{r,s,t}$ possui (exprima sua resposta em função de $r$, $s$ e $t$)?
    (c) Qual é o complemento de $K_{r,s,t}$?

12. Prove que se todo vértice de um grafo $G$ possui grau maior ou igual a 2, então $G$ tem um ciclo.

13. Prove, por indução em $n$, que se um grafo $G$ tem $n$ vértices e pelo menos $n$ arestas, então $G$ tem um ciclo.

14. Seja $G$ um grafo simples com $n \geq 2$ vértices. Suponha que para todo vértice $v$ de $G$, $d(v) \geq (n-1)/2$. Prove que $G$ é conexo.

15. Dê exemplo de:

    (a) Um grafo euleriano que não é hamiltoniano.

    (b) Um grafo hamiltoniano que não é euleriano.

16. Para que valores de $n$ o grafo completo $K_n$ tem um circuito de Euler?

17. Demonstre que se $G$ é um grafo bipartido com $n$ vértices e $n$ é ímpar, então $G$ não é um grafo hamiltoniano.