Campinas, 16 de abril de 2024.

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II
Lista de Exercícios 2

Observação: Em exercícios que envolvam projetar um algoritmo, suponha que, na entrada do procedimento, os grafos são representados por listas de adjacência. É importante mostrar a correção do seu algoritmo: você precisará **justificar claramente** por que seu algoritmo funciona, ou fazer a demonstração formal da sua correção.

1. Seja $G = (V, E)$ um grafo não direcionado e conexo. Foram executados os algoritmos BFS e DFS em G, e a ordem na qual os vértices foram visitados foi a mesma (lembrando: o vértice é visitado no momento em que ele torna-se cinza). Certo ou errado? Justifique cada resposta.

a) Se $|V| > 3$, G não pode ser completo.

b) Se G não é completo, então G é uma árvore.

2. Seja $G = (V, E)$ uma árvore.

a) Mostre que se G possui um vértice de grau k, então G possui pelo menos k folhas.

b) Projete um algoritmo com complexidade de tempo linear no tamanho da entrada que, dado uma árvore e um vértice de grau k, devolva exatamente k folhas da árvore G.

Ruben Interian
IC - UNICAMP
Av. Albert Einstein, 1251 - Cidade Universitária
13083-852 - Campinas - SP - Brasil
http://www.ic.unicamp.br/~ruben
ruben@ic.unicamp.br
Tel.: +55 (19) 3521-0336
Fax: +55 (19) 3521-5847

3. Seja $G = (V, E)$ um grafo que cumpre a propriedade $|E| \leq 3|V|$. Projete um algoritmo eficiente, com a melhor complexidade de tempo que puder, para determinar se G possui um ciclo ímpar de comprimento exatamente 3 (um triângulo).

4. Seja G um grafo não direcionado e conexo. Projete um algoritmo de tempo polinomial que encontra uma árvore geradora de G com altura mínima. **Observações**: O grafo não é ponderado. A altura de uma árvore é a maior das distâncias desde a raiz até uma folha.

5. Seja G um grafo não direcionado e conexo, com uma função de custos $c > 0$ nas arestas. Seja T uma árvore geradora mínima de G. Suponha agora que, para cada aresta e, alteramos o custo de $c(e)$ para $c(e)^2$. A árvore T continua sendo uma árvore geradora mínima para essa nova função de custo? Prove ou dê um contraexemplo.

6. Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo. A excentricidade de um vértice $v \in V$ é o comprimento do maior caminho mínimo de v até os demais vértices do grafo, ou seja, a excentricidade de v é igual a $\max_{x \in V}\{dist(v, x)\}$. O centro do grafo G é o subconjunto dos seus vértices cuja excentricidade é mínima. Com esses dois conceitos em mente, resolva o problema a seguir.

Considere a turma de estudantes da disciplina MC558. São $n > 100$ pessoas. Alguns são amigos, outros não. Aqueles que são amigos se falam, mas aqueles que não são amigos, infelizmente, não se falam. A turma decidiu escolher um líder com o objetivo de negociar com o professor a suspensão das aulas durante a Semana de Computação. A turma queria um líder que seja amigo de todos os alunos, mas não teve ninguém com essas características. Então a turma resolveu escolher um líder que precise da menor quantidade possível de intermediários para enviar uma mensagem a todos os alunos. Ou seja, os candidatos a líder serão escolhidos calculando quantos intermediários, no máximo, o candidato irá precisar para enviar uma mensagem ao resto de estudantes através de um recado verbal enviado a outros membros do grupo com os quais ele conversa. Os melhores alunos de acordo com esse critério serão os candidatos. Todo aluno sempre tem uma forma de enviar uma mensagem ao resto da turma, por meio de algum número de intermediários.

a) Projete um algoritmo, com a melhor complexidade de tempo que puder, que ajude a turma a escolher os candidatos a líder. **(40% da questão)**

b) Projete um algoritmo, com a melhor complexidade de tempo que puder, que ajude a turma a escolher os candidatos a líder, sabendo que há exatamente $n - 1$ relações de amizade na turma. **(60% da questão)**

Ruben Interian
IC - UNICAMP
Av. Albert Einstein, 1251 - Cidade Universitária
13083-852 - Campinas - SP - Brasil
http://www.ic.unicamp.br/~ruben
ruben@ic.unicamp.br
Tel.: +55 (19) 3521-0336
Fax: +55 (19) 3521-5847

7. Um mapa turístico é dado através de um grafo direcionado $G = (V, A)$, onde V é o conjunto de vértices e A é o conjunto de arcos. Um mapa turístico é inválido se existem pelo menos dois vértices distintos $u, v \in V$ tais que (i) não há caminho de u para v, e (ii) não há caminho de v para u. Queremos verificar se o mapa é válido. Apresente um algoritmo com complexidade de tempo linear, no tamanho do grafo, para decidir se G é um mapa turístico válido ou não. Mostre que seu algoritmo está correto e justifique a sua complexidade de tempo.

8. Uma cidade possui centenas de subestações elétricas, que precisam estar conectadas entre elas por meio de fios para distribuir a energia elétrica à população. O mapa de todas as conexões possíveis entre as subestações é representado por um grafo $G = (V, E)$, o "grafo das subestações", com uma função de custos w nas arestas indicando quantos quilômetros de fios são necessários se quisermos conectar duas subestações elétricas nas quais incide aquela aresta.

Os especialistas da empresa elétrica local há vários anos conectaram as subestações, de modo que sempre há uma e apenas uma forma de chegar de uma subestação a outra, e o custo total das conexões feitas é o menor possível. Você sabe como as subestações estão conectadas. Porém, hoje um equipamento chamado tatuzão finalmente conseguiu romper uma parede de pedra de um morro que impedia uma conexão mais direta entre dois bairros da cidade, criando um túnel entre esses dois bairros. Agora, o custo em quilômetros da possível conexão direta entre duas subestações específicas da cidade, u e v, diminuiu de k quilômetros para $k' < k$, pois os fios que poderiam conectar u e v não precisariam mais contornar o morro. O custo da possível conexão direta entre o resto das subestações ficou como estava.

Projete um algoritmo que atualize a estrutura das conexões existentes entre as subestações, de modo que exista uma e apenas uma forma de chegar de uma subestação a outra, e o custo total das conexões continue sendo o menor possível, usando um tempo linear no tamanho do grafo das subestações. O algoritmo precisa funcionar sempre, independente do fato das subestações u e v estarem ou não conectadas diretamente antes da criação do túnel. Mostre a correção do seu algoritmo.

Ruben Interian
IC - UNICAMP
Av. Albert Einstein, 1251 - Cidade Universitária
13083-852 - Campinas - SP - Brasil

http://www.ic.unicamp.br/~ruben
ruben@ic.unicamp.br
Tel.: +55 (19) 3521-0336
Fax: +55 (19) 3521-5847