Campinas, 6 de junho de 2024.

**MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II**
**Lista de Exercícios 3**

**Observação**: Em exercícios que envolvam projetar um algoritmo ou uma redução, apresente um pseudocódigo semelhante àquele dos algoritmos vistos em aula. Suponha que, na entrada do procedimento, os grafos são representados por listas de adjacência. Pode utilizar proposições, teoremas e algoritmos vistos em aula, enunciando o resultado que irá utilizar. *Grafo* se refere a um *grafo não direcionado*, a menos que seja indicado explicitamente que o grafo é direcionado.

**1.** Considere a seguinte versão do Problema da Mochila:

> Dados $n$ valores inteiros positivos $c_1, c_2, \ldots, c_n$, e um inteiro $K$, encontrar inteiros $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tais que $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = K$.

Veja que, nessa versão, é possível escolher qualquer quantidade ($x_i$) de itens de um determinado tipo $i$, e a capacidade $K$ da mochila precisa ser preenchida completamente.

Encontre uma redução dessa versão do Problema da Mochila para o problema de encontrar um caminho mínimo entre dois vértices de um grafo direcionado e acíclico.

Responda à pergunta: A sua redução prova que existe um algoritmo determinístico polinomial para essa versão do Problema da Mochila? Ou seja, a sua redução prova que essa versão do Problema da Mochila está em **P**?

**2.** Um emparelhamento em um grafo $G = (V, E)$ é um conjunto de arestas tais que cada vértice do grafo aparece em, no máximo, uma aresta do emparelhamento. Um emparelhamento máximo é um emparelhamento que possui a maior quantidade possível de arestas. Encontre uma redução do problema de encontrar um emparelhamento máximo em um grafo bipartido para o problema de encontrar um fluxo máximo em uma rede de fluxo.

**3.** Considere o problema: Dados $n$ intervalos fechados, cada um da forma $[a_i, b_i]$, $i = 1, \ldots, n$, onde $a_i$ e $b_i$ são inteiros, calcular, para cada intervalo, em quantos outros intervalos ele está contido.

a) Projete um algoritmo com complexidade $o(n^2)$ que resolva o problema.

b) Encontre uma cota inferior não trivial (superior a linear) para este problema.

**Dica**: use reduções. Veja que no a) aparece 'o pequena', não 'O grande'.

Ruben Interian
IC - UNICAMP
Av. Albert Einstein, 1251 - Cidade Universitária
13083-852 - Campinas - SP - Brasil
http://www.ic.unicamp.br/~ruben
ruben@ic.unicamp.br
Tel.: +55 (19) 3521-0336
Fax: +55 (19) 3521-5847

**4.** Uma empresa de software está planejando começar a comercializar 3 versões diferentes do seu novo aplicativo aos seus clientes. Cada versão do aplicativo precisa ter garantido o atendimento ao cliente durante o primeiro mês de contrato, o que é feito por quatro Centrais de Atendimento. Cada versão do aplicativo pode ser atendida por qualquer uma das centrais. Os custos, em dólares, de manter as equipes de atendimento nas Centrais no primeiro mês de contrato dependem da quantidade de softwares vendidos, e estão indicados na tabela:

| | Custo unitário, Central de Atendimento | | | |
|---|---|---|---|---|
| Versão do aplicativo | Central #1 | Central #2 | Central #3 | Central #4 |
| 1ra | 4 | 4 | 5 | 7 |
| 2da | 6 | 7 | 5 | 6 |
| 3ra | 12 | 10 | 8 | 11 |

A quantidade de horas-homem necessária para que cada Central de Atendimento atenda cada cliente do aplicativo estão indicadas abaixo:

| | Horas-homem | | | |
|---|---|---|---|---|
| Versão do aplicativo | Central #1 | Central #2 | Central #3 | Central #4 |
| 1ra | 0.3 | 0.25 | 0.2 | 0.2 |
| 2da | 0.2 | 0.3 | 0.2 | 0.25 |
| 3ra | 0.8 | 0.6 | 0.6 | 0.5 |

Sabe-se que pelo menos 4000, 5000 e 3000 clientes irão adquirir a 1ra, 2da, e 3ra versão, respectivamente. As horas-homem disponíveis em cada Central de Atendimento são 1500, 1200, 1500 e 2000, respectivamente nas 4 centrais. Proponha uma formulação de programação linear para o problema visando minimizar o custo de atendimento total no primeiro mês de contrato.

**5.** O Melhor Restaurante de Campinas abre todos os dias, de segunda a domingo. De acordo com a frequência dos clientes, o dono do restaurante sabe quantos funcionários ele precisa em cada dia da semana. Esta informação é dada na tabela. Cada funcionário deve trabalhar 5 dias seguidos, e descansar nos outros dois dias. O dono do restaurante precisa definir os dias nos quais cada funcionário irá trabalhar, minimizando o número de funcionários contratados. Proponha uma formulação de programação linear inteira para o problema. Explique com detalhes porque a sua formulação (a sua redução para PLI) é válida.

| Dia da semana | Seg. | Ter. | Qua. | Qui. | Sex. | Sáb. | Dom. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de funcionários | 32 | 36 | 42 | 45 | 57 | 51 | 30 |

Ruben Interian
IC - UNICAMP
Av. Albert Einstein, 1251 - Cidade Universitária
13083-852 - Campinas - SP - Brasil
http://www.ic.unicamp.br/~ruben
ruben@ic.unicamp.br
Tel.: +55 (19) 3521-0336
Fax: +55 (19) 3521-5847

**6.** O Problema das Rainhas consiste em determinar a quantidade máxima de rainhas de xadrez em um tabuleiro de tamanho $n \times n$, tal que nenhuma das rainhas possa atacar a outra. Proponha uma formulação de programação linear inteira para o problema. Explique com detalhes porque a sua formulação (a sua redução para PLI) é válida.

**7.** Projete um algoritmo determinístico e um algoritmo não determinístico que resolvam o problema a seguir. Mostre a correção e analise a complexidade de cada algoritmo.

> Dado um grafo $G = (V, E)$, e um inteiro positivo $k$, decidir se é possível atribuir $k$ cores aos vértices do grafo de forma que não haja dois vértices adjacentes que compartilhem a mesma cor.

**8.** Dois problemas $P$ e $Q$ são polinomialmente equivalentes se $P \propto_{\text{poli}} Q$ e $Q \propto_{\text{poli}} P$. A partir das definições das classes de problemas vistas em aula, escreva uma prova formal de que todos os problemas em $\mathcal{NP}$-completo são polinomialmente equivalentes.

**9.** As versões de decisão dos problemas Clique e Conjunto Independente são $\mathcal{NP}$-completos. Agora, considere o problema de decisão a seguir.

> Dado um grafo $G$ e um inteiro $k$, determinar se $G$ possui, ao mesmo tempo, uma clique de tamanho $k$ e um conjunto independente de tamanho $k$.

Prove que este problema é $\mathcal{NP}$-completo.

Ruben Interian
IC - UNICAMP
Av. Albert Einstein, 1251 - Cidade Universitária
13083-852 - Campinas - SP - Brasil
http://www.ic.unicamp.br/~ruben
ruben@ic.unicamp.br
Tel.: +55 (19) 3521-0336
Fax: +55 (19) 3521-5847