Projeto e Análise de Algoritmos II (MC558) Redes de fluxo

Prof. Dr. Ruben Interian

Resumo

- Objetivo
- Redes de fluxo
 - Método de Ford-Fulkerson
 - Fluxo máximo e corte mínimo
- Síntese

Resumo

- Objetivo
- Redes de fluxo
 - Método de Ford-Fulkerson
 - Fluxo máximo e corte mínimo
- Síntese

Objetivo

Objetivo

• Estudar os problemas de fluxo em redes, em particular, o problema do fluxo máximo.

Resumo

- Objetive
- Redes de fluxo
 - Método de Ford-Fulkerson
 - Fluxo máximo e corte mínimo
- Síntese

O que é uma rede?

A **rede** (de fluxo) é um grafo onde cada aresta/arco possui associado a ele um valor de **capacidade**.

- A capacidade do arco é uma função parecida ao custo da aresta, mas com outra interpretação.
- A capacidade refere-se à quantidade de "coisas" que o arco pode suportar/enviar.

O que é uma rede?

A **rede** (de fluxo) é um grafo onde cada aresta/arco possui associado a ele um valor de **capacidade**.

- A capacidade do arco é uma função parecida ao custo da aresta, mas com outra interpretação.
- A capacidade refere-se à quantidade de "coisas" que o arco pode suportar/enviar.

Exemplo: rodovia para veículos entre 2 cidades.

- O custo dessa rodovia seria a sua extensão (km) ou o tempo que gastamos nela.
- A capacidade dessa rodovia seria a quantidade máxima de carros que ela pode suportar por unidade de tempo.

O que é uma rede?

A **rede** (de fluxo) é um grafo onde cada aresta/arco possui associado a ele um valor de **capacidade**.

- A capacidade do arco é uma função parecida ao custo da aresta, mas com outra interpretação.
- A capacidade refere-se à quantidade de "coisas" que o arco pode suportar/enviar.

Exemplo: rodovia para veículos entre 2 cidades.

- O custo dessa rodovia seria a sua extensão (km) ou o tempo que gastamos nela.
- A capacidade dessa rodovia seria a quantidade máxima de carros que ela pode suportar por unidade de tempo.

Custo é o recurso que vamos gastar ao usar o arco.

Capacidade é o recurso que conseguimos enviar pelo arco, por unidade de tempo.

Exemplos de redes de fluxo:

• Líquido (água, petróleo) através de canos ou outras vias fluviais (rios);

Exemplos de redes de fluxo:

- Líquido (água, petróleo) através de canos ou outras vias fluviais (rios);
- Corrente elétrica através de fios condutores;

Exemplos de redes de fluxo:

- Líquido (água, petróleo) através de canos ou outras vias fluviais (rios);
- Corrente elétrica através de fios condutores:
- Informação (em bits) em redes físicas de comunicação;

Exemplos de redes de fluxo:

- Líquido (água, petróleo) através de canos ou outras vias fluviais (rios);
- Corrente elétrica através de fios condutores:
- Informação (em bits) em redes físicas de comunicação;
- Produtos ou materiais entre fornecedores e clientes em redes de conexões rodoviárias, redes ferroviárias...

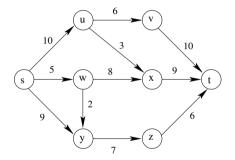
Que tipo de **problemas** podemos resolver usando essa modelagem (arestas/arcos com capacidades máximas associadas)?

• Seja G = (V, E) um grafo direcionado.

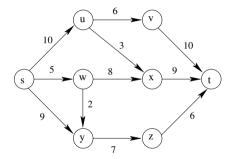
- Seja G = (V, E) um grafo direcionado.
- Existe um vértice fonte s que produz (ou possui, ou envia) um certo material.
- Existe um vértice terminal *t* que consome (ou precisa receber) esse material.

- Seja G = (V, E) um grafo direcionado.
- Existe um vértice fonte s que produz (ou possui, ou envia) um certo material.
- Existe um vértice terminal *t* que consome (ou precisa receber) esse material.
- Queremos transportar o material de s a t.

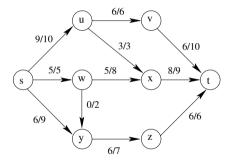
- Seja G = (V, E) um grafo direcionado.
- Existe um vértice fonte s que produz (ou possui, ou envia) um certo material.
- Existe um vértice terminal *t* que consome (ou precisa receber) esse material.
- Queremos transportar o material de s a t.



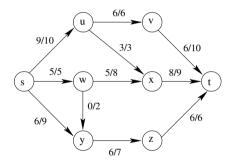
- Um arco representa um conduto (conexão),
 e o material escoa através dos arcos;
- A taxa ("velocidade") com que o material escoa é o fluxo no arco;
- A maior taxa permitida é a capacidade do arco.



- Um arco representa um conduto (conexão),
 e o material escoa através dos arcos;
- A taxa ("velocidade") com que o material escoa é o fluxo no arco;
- A maior taxa permitida é a capacidade do arco.



- Cada vértice v é um ponto de junção dos condutos. Nenhum material pode ser perdido no caminho de s a t!
- A quantidade de material que chega em v deve ser igual à quantidade de material que sai de v: temos conservação de fluxo.



Formalmente, uma rede de fluxo é uma quádrupla (G, c, s, t) onde:

- G = (V, E) é um grafo direcionado;
- $c: E \to \mathbb{R}_+$ é a função não-negativa que atribui capacidade aos arcos;
- s e t são vértices de G chamados de fonte e terminal.

Seja (G, c, s, t) uma rede de fluxo. **Hipóteses**:

• Se $(u, v) \notin E$ então c(u, v) = 0.

Seja (G, c, s, t) uma rede de fluxo. **Hipóteses**:

- Se $(u, v) \notin E$ então c(u, v) = 0.
- Todo vértice v de G pertence a algum caminho de s a t.

Seja (G, c, s, t) uma rede de fluxo. **Hipóteses**:

- Se $(u, v) \notin E$ então c(u, v) = 0.
- Todo vértice v de G pertence a algum caminho de s a t.
- Se $(u, v) \in E$, então $(v, u) \notin E$.

Seja (G, c, s, t) uma rede de fluxo. **Hipóteses**:

- Se $(u, v) \notin E$ então c(u, v) = 0.
- Todo vértice v de G pertence a algum caminho de s a t.
- Se $(u, v) \in E$, então $(v, u) \notin E$.
 - Os algoritmos funcionam sob essa hipótese.
 - Se G não a cumpre \Rightarrow podemos criar um grafo equivalente que a cumpre.

Um **fluxo** em uma rede (G, c, s, t) é uma função $f: V \times V \to \mathbb{R}_+$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1 Restrição de capacidade: para todo $u, v \in V$, $0 \le f(u, v) \le c(u, v)$.

Um **fluxo** em uma rede (G, c, s, t) é uma função $f: V \times V \to \mathbb{R}_+$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- **1** Restrição de capacidade: para todo $u, v \in V$, $0 \le f(u, v) \le c(u, v)$.
- **2** Conservação de fluxo: para todo $u \in V \setminus \{s, t\}$ temos:

$$\sum_{v\in V} f(v,u) = \sum_{v\in V} f(u,v).$$

Um **fluxo** em uma rede (G, c, s, t) é uma função $f: V \times V \to \mathbb{R}_+$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- **1** Restrição de capacidade: para todo $u, v \in V$, $0 \le f(u, v) \le c(u, v)$.
- **2** Conservação de fluxo: para todo $u \in V \setminus \{s, t\}$ temos:

$$\sum_{v\in V} f(v,u) = \sum_{v\in V} f(u,v).$$

Observações:

- Se $(u, v) \notin E$ então f(u, v) = c(u, v) = 0.
- Dizemos que f(u, v) é o fluxo que passa pelo arco (u, v).

Valor de um fluxo

O valor de um fluxo f é definido como

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s).$$

Observações:

• O valor |f| é o fluxo que sai da fonte menos o fluxo que entra. Não confundir com valor absoluto ou cardinalidade!

Valor de um fluxo

O valor de um fluxo f é definido como

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s).$$

Observações:

- O valor |f| é o fluxo que sai da fonte menos o fluxo que entra. Não confundir com valor absoluto ou cardinalidade!
- Normalmente $|f| = \sum_{v \in V} f(s, v)$, pois $\sum_{v \in V} f(v, s) = 0$. Porém, há redes auxiliares chamadas residuais usadas pelos algoritmos com arcos que entram em s.

Redes de fluxo: o problema

Problema que iremos resolver: encontrar o fluxo máximo.

Dada uma rede (G, c, s, t), encontre um fluxo f nesta rede que maximize |f|.

Redes de fluxo: o problema

Problema que iremos resolver: encontrar o fluxo máximo.

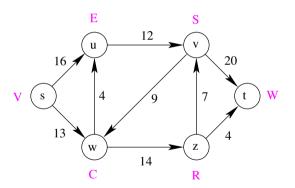
Dada uma rede (G, c, s, t), encontre um fluxo f nesta rede que maximize |f|.

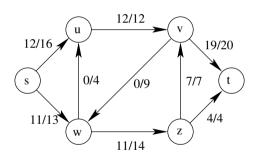
Ou seja, queremos **encontrar uma função** $f: V \times V \to \mathbb{R}_+$, que respeite as capacidades dos arcos e a conservação de fluxo, e cujo valor |f| seja o maior possível.

Uma empresa **E** tem uma fabrica na cidade V que fabrica um produto **X**:

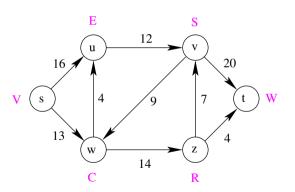
- \bullet A empresa precisa armazenar os produtos em um depósito na cidade W.
- Para transportar os produtos, a empresa contrata caminhões.
- Os caminhões viajam entre duas cidades definidas.
- Cada rota de caminhão corresponde a um arco (u, v).
- Cada caminhão pode transportar até c(u, v) caixas.

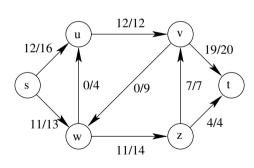
A empresa irá produzir algumas (p) caixas por dia na cidade V, e precisa enviar todas as caixas ao fim do dia para W. Qual seria o **maior** valor possível para p?



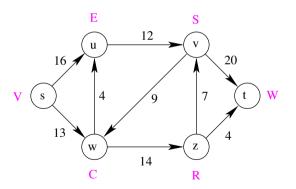


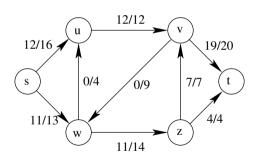
Solução ótima: fluxo com p = 23, indicado à direita





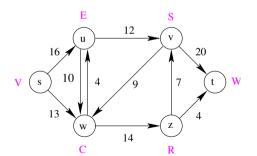
Se capacidades c(u, v) são inteiros $\Rightarrow \exists$ fluxo máximo que é inteiro.





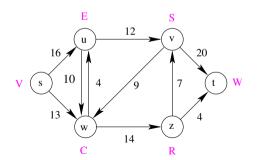
Mesmo problema, mas a rede de rotas mudou ligeiramente:

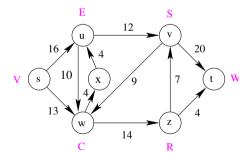
- Agora podemos transportar até 10 caixas de u a w.
- Temos arcos antiparalelos (u, w) e (w, u).
- Assumimos que não existem esses arcos ... mas podemos resolver isso.



Mesmo problema, mas a rede de rotas mudou ligeiramente:

- Escolha um dos arcos antiparalelos, no caso, (w, u).
- Substitua por dois novos arcos (w, x) e (x, u), com a mesma capacidade original.
- A nova rede tem o mesmo fluxo máximo da original.





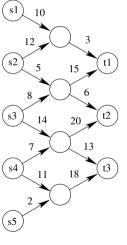
Variante do problema do fluxo máximo: redes com múltiplas fontes e terminais.

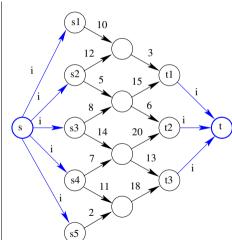
- Exemplo anterior: a empresa teria **diversas** fábricas $(s_1, ..., s_m)$ e depósitos $(t_1, ..., t_n)$.
- Podemos reduzir o problema para a versão com fonte e terminal únicos.

Variante do problema do fluxo máximo: redes com múltiplas fontes e terminais.

- Exemplo anterior: a empresa teria **diversas** fábricas (s_1, \ldots, s_m) e depósitos (t_1, \ldots, t_n) .
- Podemos reduzir o problema para a versão com fonte e terminal únicos.
- **●** Acrescente uma "nova" fonte s e, para cada i = 1, ..., m, adicione um arco (s, s_i) com capacidade ∞ .
- ② Acrescente um "novo" terminal t e, para cada i = 1, ..., n, adicione um arco (t_i, t) com capacidade $i = \infty$.

Um fluxo na nova rede corresponde a uma solução da rede original.

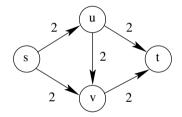




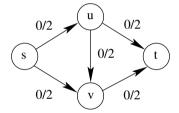
Veremos um método para resolver o problema do fluxo máximo, projetado por Ford e Fulkerson. Há vários algoritmos que usam esse método.

Ford-Fulkerson é baseado em três conceitos fundamentais:

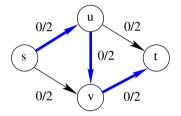
- Rede residual,
- Caminho aumentador,
- Corte.



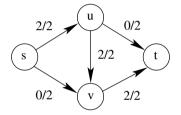
Veja este exemplo simples. O valor do fluxo máximo é 4, mas para entender o método vamos esquecer disso.



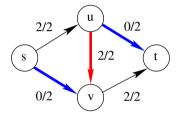
Vamos começar com fluxo nulo em todos os arcos. O valor deste fluxo é zero.



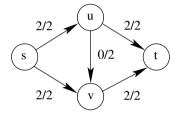
Vamos achar um caminho de s a t. Podemos aumentar o fluxo nos arcos do caminho. Nesse exemplo, podemos aumentar de 2 em cada arco.



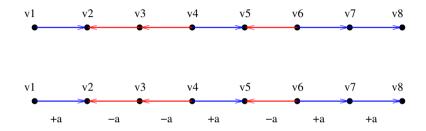
Com isso, temos um fluxo de valor 2. Mas vários arcos ficaram saturados e não há caminho para aumentar o fluxo como antes.



Podemos considerar um **pseudocaminho**. Aumentamos o fluxo nos arcos que avançam e diminuímos o fluxo nos arcos que recuam.



Obtemos um fluxo com valor 4. Neste exemplo é fácil ver que ele é máximo, pois todo arco que sai de *s* está saturado.



Temos um fluxo. Como obter um novo fluxo válido que seja maior (melhor)?

- Aumentamos ou diminuímos o fluxo dos arcos em um valor a > 0.
- Veja que estamos mantendo a conservação de fluxo.
- O valor do novo fluxo é maior. Falta garantir que o novo fluxo seja não negativo e respeite as capacidades.

Redes residuais

A rede residual obtida de (G, c, s, t) a partir de um fluxo f é a rede (G_f, c_f, s, t) com $G_f = (V, E_f)$ em que para cada $(u, v) \in E$:

• Se f(u, v) < c(u, v) então $(u, v) \in E_f$ e $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$.

$$f(u,v) < c(u,v)$$

$$c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$$





Redes residuais

• Se f(u, v) > 0 então $(v, u) \in E_f$ e $c_f(v, u) = f(u, v)$.

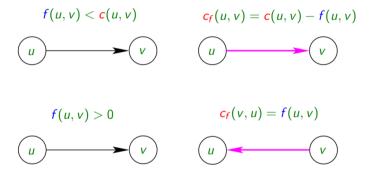
$$f(u, v) > 0$$
 $c_f(v, u) = f(u, v)$

$$u$$

$$v$$

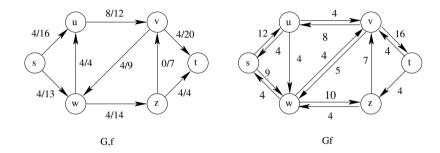
Interpretação: passar fluxo por (v, u) na rede residual significa diminuir o fluxo de (u, v) na rede original.

Redes residuais



Como **não há arcos antiparalelos** em G, então não há ambiguidade na definição de $c_f(u, v)$ nem de $c_f(v, u)$.

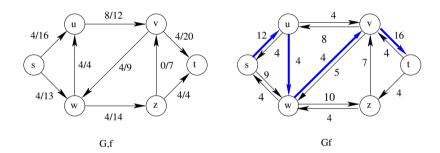
Redes residuais: um exemplo



Observeções

- O número de arcos da rede residual é $|E_f| \le 2|E|$.
- A rede residual pode conter arcos antiparalelos.

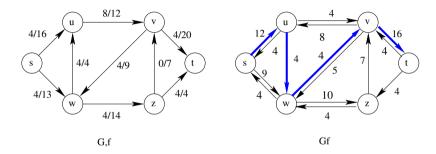
Caminhos aumentadores



Um caminho aumentador é um caminho de s a t na rede residual G_f . Corresponde a um pseudocaminho da rede original.

Se existe um **caminho aumentador** em G_f , então podemos aumentar o valor do fluxo.

Capacidade do caminho

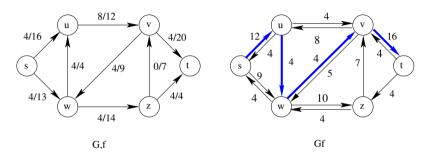


A capacidade residual de um caminho aumentador P é

$$c_f(P) = \min\{c_f(u, v) : (u, v) \in P\}.$$

Observe que temos $c_f(P) > 0$.

Arcos do caminho



Podemos dividir o conjunto de arcos de P em dois subconjuntos:

$$P^+ = \{(u, v) \in P : (u, v) \in E\}$$
 e $P^- = \{(u, v) \in P : (v, u) \in E\}.$

Um arco de P:

- pertence a P^+ se também for um arco de E.
- pertence a P⁻ se seu reverso é arco de E.

Aumentando um fluxo

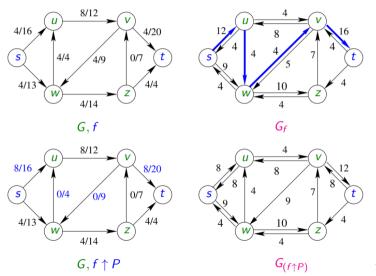
Seja $\alpha = c_f(P)$ a capacidade residual do caminho aumentador P.

- Vamos aumentar o valor do fluxo f usando P.
- Vamos criar um novo fluxo $f \uparrow P : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_+$ definido como:

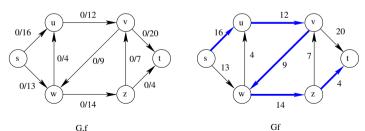
$$f \uparrow P(u, v) = \begin{cases} f(u, v) + \alpha & \text{se } (u, v) \in P^+, \\ f(u, v) - \alpha & \text{se } (v, u) \in P^-, \\ f(u, v) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja (G, c, s, t) uma rede e f um fluxo nessa rede. Se P é um caminho em G_f , então $f \uparrow P$ é um fluxo em (G, c, s, t) com valor $|f \uparrow P| = |f| + c_f(P)$.

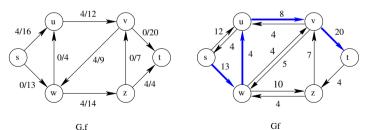
Caminhos aumentadores



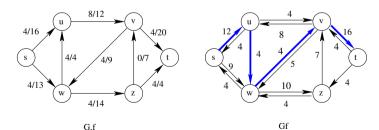
- 1: $f \leftarrow 0$
- 2: **enquanto** existe um caminho aumentador P em G_f faça
- 3: $f \leftarrow f \uparrow P$ \triangleright Veja que se f é atualizado, G_f é atualizado **devolva** f



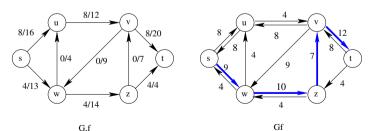
- 1: $f \leftarrow 0$
- 2: **enquanto** existe um caminho aumentador P em G_f faça
- 3: $f \leftarrow f \uparrow P$ \triangleright Veja que se f é atualizado, G_f é atualizado **devolva** f



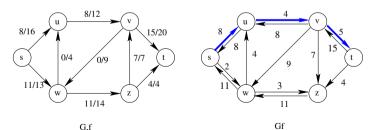
- 1: $f \leftarrow 0$
- 2: **enquanto** existe um caminho aumentador P em G_f faça
- 3: $f \leftarrow f \uparrow P$ \triangleright Veja que se f é atualizado, G_f é atualizado **devolva** f



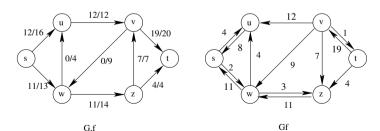
- 1: $f \leftarrow 0$
- 2: **enquanto** existe um caminho aumentador P em G_f faça
- 3: $f \leftarrow f \uparrow P$ \triangleright Veja que se f é atualizado, G_f é atualizado **devolva** f



- 1: $f \leftarrow 0$
- 2: **enquanto** existe um caminho aumentador P em G_f faça
- $f \leftarrow f \uparrow P$ \triangleright Veja que se f é atualizado, G_f é atualizado devolva f



- 1: $f \leftarrow 0$
- 2: **enquanto** existe um caminho aumentador P em G_f faça
- 3: $f \leftarrow f \uparrow P$ \triangleright Veja que se f é atualizado, G_f é atualizado **devolva** f



FordFulkerson (G, c, s, t)

- 1: $f \leftarrow 0$
- 2: **enquanto** existe um caminho aumentador P em G_f faça
- 3: $f \leftarrow f \uparrow P$ \triangleright Veja que se f é atualizado, G_f é atualizado **devolva** f

Questões pendentes:

• O método finaliza?

FordFulkerson (G, c, s, t)

- 1: $f \leftarrow 0$
- 2: **enquanto** existe um caminho aumentador P em G_f faça
- 3: $f \leftarrow f \uparrow P$ \triangleright Veja que se f é atualizado, G_f é atualizado **devolva** f

Questões pendentes:

- O método finaliza? Com capacidades inteiras, SIM.
- Devolve o fluxo máximo?

FordFulkerson (G, c, s, t)

- 1: $f \leftarrow 0$
- 2: **enquanto** existe um caminho aumentador P em G_f faça
- 3: $f \leftarrow f \uparrow P$ \triangleright Veja que se f é atualizado, G_f é atualizado **devolva** f

Questões pendentes:

- O método finaliza? Com capacidades inteiras, SIM.
- Devolve o fluxo máximo? Com capacidades inteiras, SIM (não sabemos por quê)
- Qual é a sua complexidade?

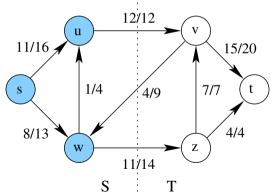
FordFulkerson (G, c, s, t)

- 1: $f \leftarrow 0$
- 2: **enquanto** existe um caminho aumentador P em G_f faça
- 3: $f \leftarrow f \uparrow P$ \triangleright Veja que se f é atualizado, G_f é atualizado **devolva** f

Questões pendentes:

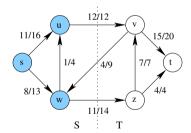
- O método finaliza? Com capacidades inteiras, SIM.
- Devolve o fluxo máximo? Com capacidades inteiras, SIM (não sabemos por quê)
- Qual é a sua complexidade? Por enquanto não podemos responder, depende.

Dado uma rede (G, c, s, t), um **corte** nessa rede é uma partição (S, T) de V em dois subconjuntos S e $T = V \setminus S$, tais que $s \in S$ e $t \in T$ ("**corte que separa** s de t").



A capacidade de um corte (5, T) é definida como

$$c(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u,v).$$



Um **corte mínimo** em uma rede é um corte cuja capacidade é mínima entre todos os cortes da rede.

Seja (G, c, s, t) uma rede de fluxo, e sejam f um fluxo nessa rede e (S, T) um corte que separa s de t. Então:

$$|f| \leq c(S,T).$$

• Essa resultado implica que o valor de um fluxo máximo é menor ou igual que a capacidade de um corte mínimo.

Seja (G, c, s, t) uma rede de fluxo, e sejam f um fluxo nessa rede e (S, T) um corte que separa s de t. Então:

$$|f| \leq c(S, T)$$
.

- Essa resultado implica que o valor de um fluxo máximo é menor ou igual que a capacidade de um corte mínimo.
- Veremos que, na verdade, essas quantidades são iguais, como demonstra o
 Teorema do fluxo máximo e corte mínimo.

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

Seja f um fluxo de uma rede (G, c, s, t). Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) O fluxo f é um fluxo máximo;
- (2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores;
- (3) |f| = c(S, T) para algum corte (S, T) de (G, c, s, t).

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

Seja f um fluxo de uma rede (G, c, s, t). Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) O fluxo f é um fluxo máximo;
- (2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores;
- (3) |f| = c(S, T) para algum corte (S, T) de (G, c, s, t).

Veja que, se as capacidades são valores inteiros, então existe um fluxo máximo inteiro, pois o fluxo máximo é a soma de capacidades inteiras de alguns arcos.

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

Seja f um fluxo de uma rede (G, c, s, t). Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) O fluxo f é um fluxo máximo;
- (2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores;
- (3) |f| = c(S, T) para algum corte (S, T) de (G, c, s, t).

Veja que, se as capacidades são valores inteiros, então existe um fluxo máximo inteiro, pois o fluxo máximo é a soma de capacidades inteiras de alguns arcos.

 $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$ mostra que **FordFulkerson** devolve o fluxo máximo.

 \rightarrow Algoritmo

Análise do método de Ford-Fulkerson

FordFulkerson (G, c, s, t)

- 1: $f \leftarrow 0$
- 2: **enquanto** existe um caminho aumentador P em G_f faça
- 3: $f \leftarrow f \uparrow P$ \triangleright Veja que se f é atualizado, G_f é atualizado **devolva** f

Análise de complexidade:

- Linha 3: podemos fazer em tempo O(V + E) = O(E).
- Linha 2: depende da forma de encontrar o caminho aumentador. Mas, se as capacidades são inteiras, no **pior caso** o valor do fluxo f pode aumentar uma unidade por iteração. Nesse caso, o algoritmo executa no máximo $|f^*|$ iterações $(|f^*| = \text{fluxo máximo na rede})$, com tempo total é $O(E|f^*|)!$

Análise do método de Ford-Fulkerson e algoritmo de Edmonds-Karp

FordFulkerson (G, c, s, t)

- 1: $f \leftarrow 0$
- 2: **enquanto** existe um caminho aumentador *P* em *G_f* faca
- 3: $f \leftarrow f \uparrow P$ \triangleright Veia que se f é atualizado. G_f é atualizado devolva f

Análise de complexidade:

• Fato: $O(E|f^*|)$ é muito ruim! Como escolher um bom caminho aumentador?

Análise do método de Ford-Fulkerson e algoritmo de Edmonds-Karp

FordFulkerson (G, c, s, t)

- 1: $f \leftarrow 0$
- 2: **enquanto** existe um caminho aumentador P em G_f faça
- 3: $f \leftarrow f \uparrow P$ \triangleright Veja que se f é atualizado, G_f é atualizado **devolva** f

Análise de complexidade:

- Fato: $O(E|f^*|)$ é muito ruim! Como escolher um bom caminho aumentador?
- Uma possibilidade é escolher o caminho mais curto de s a t em G_f .
- Edmonds e Karp mostraram que essa variante tem complexidade $O(VE^2)$.

Resumo

- Objetive
- 2 Redes de fluxo
 - Método de Ford-Fulkerson
 - Fluxo máximo e corte mínimo
- Síntese

Síntese

- O problema do fluxo máximo consiste em, dada uma rede (G, c, s, t), encontrar um fluxo f nesta rede que maximize |f|.
- O valor de um fluxo máximo de uma rede é igual à capacidade de corte mínimo dessa mesma rede.
- Se as capacidades são valores inteiros, então existe um fluxo máximo inteiro, pois o fluxo máximo é a soma de capacidades inteiras de alguns arcos.

Aplicações

- Emparelhamento (matching) em grafos bipartidos: encontrar um subconjunto de arestas em um grafo bipartido que não têm vértices em comum.
- Problema do corte mínimo: interromper o suministro em uma rede ferroviária dos alemães durante a Segunda Guerra Mundial.
- Há variantes do problema com capacidades nos vértices, que podem ser reduzidas ao problema de fluxo máximo.

Material bibliográfico e exercícios

T. Cormen et al. Algoritmos - Teoria e Prática (3a ed.). - Cap. 26

Exercícios: ver exercícios no final dos (sub)capítulos do Cap. 26.

Dúvidas

Dúvidas?