Projeto e Análise de Algoritmos II (MC558)
Introdução à Programação Linear

Prof. Dr. Ruben Interian

Resumo

Resumo

1. Revisão do conteúdo e objetivo
2. Programação Linear
3. Síntese

Objetivo

- Aprender a **modelar** problemas usando formulações de **Programação Linear** e (um pouco) **Programação Linear Inteira**.
- Conhecer os principais algoritmos que resolvem problemas de **PL** (não iremos estudar como esses algoritmos funcionam).

Resumo

Exemplo 1

José está se preparando para se aposentar. Para garantir uma aposentadoria tranquila, ele resolve aplicar suas economias em fundos de investimento. Os fundos possuem períodos de maturidade, ou *duration*, diferentes (tempo para recuperar a inversão com os juros). A seguir, as informações sobre os seis fundos que José achou no mercado:

Exemplo 1

José está se preparando para se aposentar. Para garantir uma aposentadoria tranquila, ele resolve aplicar suas economias em fundos de investimento. Os fundos possuem períodos de maturidade, ou *duration*, diferentes (tempo para recuperar a inversão com os juros). A seguir, as informações sobre os seis fundos que José achou no mercado:

Fundo	Rendimento anual	Período de maturidade	Classificação no mercado
1	8.65%	11 anos	Excelente
2	9.50%	10 anos	Bom
3	10.00%	6 anos	Aceitável
4	8.75%	10 anos	Excelente
5	9.25%	7 anos	Bom
6	9.00%	13 anos	Muito bom

Exemplo 1

José dispõe de R$ 750.000,00 em economias.
Para dar maior segurança ao investimento, José consultou um amigo dele, analista financeiro, que lhe fez as seguintes recomendações:

Exemplo 1

José dispõe de R$ 750.000,00 em economias.
Para dar maior segurança ao investimento, José consultou um amigo dele, analista financeiro, que lhe fez as seguintes recomendações:

- (i) não investir mais de 25% do dinheiro em um único fundo;

Exemplo 1

José dispõe de R$ 750.000,00 em economias.
Para dar maior segurança ao investimento, José consultou um amigo dele, analista financeiro, que lhe fez as seguintes recomendações:

- (i) não investir mais de 25% do dinheiro em um único fundo;
- (ii) pelo menos metade do dinheiro deveria ser investido em fundos de longo prazo, i.e., com pelo menos 10 anos de maturidade;

Exemplo 1

José dispõe de R$ 750.000,00 em economias.
Para dar maior segurança ao investimento, José consultou um amigo dele, analista financeiro, que lhe fez as seguintes recomendações:

- (i) não investir mais de 25% do dinheiro em um único fundo;
- (ii) pelo menos metade do dinheiro deveria ser investido em fundos de longo prazo, i.e., com pelo menos 10 anos de maturidade;
- (iii) no máximo 35% do investimento deveria ser aplicado nos fundos com classificação inferior a "Muito bom".

Exemplo 1

José dispõe de R$ 750.000,00 em economias.
Para dar maior segurança ao investimento, José consultou um amigo dele, analista financeiro, que lhe fez as seguintes recomendações:

- (i) não investir mais de 25% do dinheiro em um único fundo;
- (ii) pelo menos metade do dinheiro deveria ser investido em fundos de longo prazo, i.e., com pelo menos 10 anos de maturidade;
- (iii) no máximo 35% do investimento deveria ser aplicado nos fundos com classificação inferior a "Muito bom".

Como José deve aplicar o seu dinheiro de modo a **maximizar o seu lucro anual**?

Exemplo 1: Formulação

- **Variáveis** x_i: total investido no fundo i.

Exemplo 1: Formulação

- **Variáveis** x_i: total investido no fundo i.
- **Função objetivo** $\max y = .0865x_1 + .095x_2 + .10x_3 + .0875x_4 + .0925x_5 + .09x_6$.

Exemplo 1: Formulação

- **Variáveis** x_i: total investido no fundo i.
- **Função objetivo** $\max y = .0865x_1 + .095x_2 + .10x_3 + .0875x_4 + .0925x_5 + .09x_6$.
- **Restrição** (i) $x_i \leq 187.500$, $i = 1, \ldots, 6$ (máx. 25%, cada fundo).

Exemplo 1: Formulação

- **Variáveis** x_i: total investido no fundo i.
- **Função objetivo** $\max y = .0865x_1 + .095x_2 + .10x_3 + .0875x_4 + .0925x_5 + .09x_6$.
- **Restrição** (i) $x_i \leq 187.500$, $i = 1, \ldots, 6$ (máx. 25%, cada fundo).
- **Restrição** (ii) $x_1 + x_2 + x_4 + x_6 \geq 375.000$ (metade em fundos de longo prazo).

Exemplo 1: Formulação

- **Variáveis** x_i: total investido no fundo i.
- **Função objetivo** $\max y = .0865x_1 + .095x_2 + .10x_3 + .0875x_4 + .0925x_5 + .09x_6$.
- **Restrição** (i) $x_i \leq 187.500$, $i = 1, \ldots, 6$ (máx. 25%, cada fundo).
- **Restrição** (ii) $x_1 + x_2 + x_4 + x_6 \geq 375.000$ (metade em fundos de longo prazo).
- **Restrição** (iii) $x_2 + x_3 + x_5 \leq 262.500$ (máx. 35%, fundos piores a 'Muito bom').

Exemplo 1: Formulação

- **Variáveis** x_i: total investido no fundo i.
- **Função objetivo** $\max y = .0865x_1 + .095x_2 + .10x_3 + .0875x_4 + .0925x_5 + .09x_6$.
- **Restrição** (i) $x_i \leq 187.500$, $i = 1, \ldots, 6$ (máx. 25%, cada fundo).
- **Restrição** (ii) $x_1 + x_2 + x_4 + x_6 \geq 375.000$ (metade em fundos de longo prazo).
- **Restrição** (iii) $x_2 + x_3 + x_5 \leq 262.500$ (máx. 35%, fundos piores a 'Muito bom').
- **Total investido** $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 750.000$.

Exemplo 1: Formulação

- **Variáveis** x_i: total investido no fundo i.
- **Função objetivo** $\max y = .0865x_1 + .095x_2 + .10x_3 + .0875x_4 + .0925x_5 + .09x_6$.
- **Restrição** (i) $x_i \leq 187.500$, $i = 1, \ldots, 6$ (máx. 25%, cada fundo).
- **Restrição** (ii) $x_1 + x_2 + x_4 + x_6 \geq 375.000$ (metade em fundos de longo prazo).
- **Restrição** (iii) $x_2 + x_3 + x_5 \leq 262.500$ (máx. 35%, fundos piores a 'Muito bom').
- **Total investido** $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 750.000$.
- **Não-negatividade** $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$.

Programas Lineares (PL)

Problema de **Programação Linear** (PL): queremos otimizar (maximizar ou minimizar) uma função linear, cujas variáveis estão sujeitas a um conjunto de restrições: igualdades ou desigualdades lineares.

Programas Lineares (PL)

Problema de **Programação Linear** (PL): queremos otimizar (maximizar ou minimizar) uma função linear, cujas variáveis estão sujeitas a um conjunto de restrições: igualdades ou desigualdades lineares.

Uma função linear sobre variáveis $x_1, \ldots, x_n$ tem a forma:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n,$$

onde $c_1, \ldots, c_n$ são constantes reais.

Programas Lineares (PL)

Problema de **Programação Linear** (PL): queremos otimizar (maximizar ou minimizar) uma função linear, cujas variáveis estão sujeitas a um conjunto de restrições: igualdades ou desigualdades lineares.

Uma função linear sobre variáveis $x_1, \ldots, x_n$ tem a forma:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n,$$

onde $c_1, \ldots, c_n$ são constantes reais.

As restrições tem uma das três formas ($a_1, \ldots, a_n$, b são reais):

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b \text{ (igualdade)}$$
$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \leq b \text{ (desigualdade)}$$
$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \geq b \text{ (desigualdade)}$$

Programas Lineares (PL)

Problema de Programação Linear (PL)

Entrada: matriz $A_{m\times n}$, vetor $b \in \mathbb{R}^m$, vetor $c \in \mathbb{R}^n$.

Objetivo: encontrar valores para as variáveis reais não negativas $x_1, x_2, \ldots, x_n = x$, que minimizem a soma $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, sujeito a m restrições $Ax \leq b$.

Programas Lineares (PL)

Problema de Programação Linear (PL)

Entrada: matriz $A_{m \times n}$, vetor $b \in \mathbb{R}^m$, vetor $c \in \mathbb{R}^n$.

Objetivo: encontrar valores para as variáveis reais não negativas $x_1, x_2, \ldots, x_n = x$, que minimizem a soma $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, sujeito a m restrições $Ax \leq b$.

Matematicamente, o problema geralmente é formulado assim:

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ \text{sujeito a } & Ax \leq b, x \geq 0 \end{aligned}$$

Programas Lineares (PL)

Problema de Programação Linear (PL)

Entrada: matriz $A_{m \times n}$, vetor $b \in \mathbb{R}^m$, vetor $c \in \mathbb{R}^n$.

Objetivo: encontrar valores para as variáveis reais não negativas $x_1, x_2, \ldots, x_n = x$, que minimizem a soma $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, sujeito a m restrições $Ax \leq b$.

Matematicamente, o problema geralmente é formulado assim:

$$\min \; c^T x$$
$$\text{sujeito a } Ax \leq b, x \geq 0$$

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\text{sujeito a } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \text{ para } i = 1, \ldots, m$$
$$x_j \geq 0 \text{ para } j = 1, \ldots, n$$

PL: igualdades e desigualdades

E se tivermos uma **restrição de igualdade**?

PL: igualdades e desigualdades

E se tivermos uma **restrição de igualdade**?

- Veja que $f(x) = b$ **se e somente se** $f(x) \leq b$ e $f(x) \geq b$.

PL: igualdades e desigualdades

E se tivermos uma **restrição de igualdade**?

- Veja que $f(x) = b$ **se e somente se** $f(x) \leq b$ e $f(x) \geq b$.
- $f(x) \geq b$ **se e somente se** $-f(x) \leq -b$.

PL: igualdades e desigualdades

E se tivermos uma **restrição de igualdade**?

- Veja que $f(x) = b$ **se e somente se** $f(x) \leq b$ e $f(x) \geq b$.
- $f(x) \geq b$ **se e somente se** $-f(x) \leq -b$.
- Portanto, $f(x) = b$ **se e somente se** $f(x) \leq b$ e $-f(x) \leq -b$.

PL: igualdades e desigualdades

E se tivermos uma **restrição de igualdade**?

- Veja que $f(x) = b$ **se e somente se** $f(x) \leq b$ e $f(x) \geq b$.
- $f(x) \geq b$ **se e somente se** $-f(x) \leq -b$.
- Portanto, $f(x) = b$ **se e somente se** $f(x) \leq b$ e $-f(x) \leq -b$.

E se o problema é de **maximizar** a função objetivo?

PL: igualdades e desigualdades

E se tivermos uma **restrição de igualdade**?

- Veja que $f(x) = b$ **se e somente se** $f(x) \leq b$ e $f(x) \geq b$.
- $f(x) \geq b$ **se e somente se** $-f(x) \leq -b$.
- Portanto, $f(x) = b$ **se e somente se** $f(x) \leq b$ e $-f(x) \leq -b$.

E se o problema é de **maximizar** a função objetivo?

- Maximizar $f(x)$ é a mesma coisa que minimizar $-f(x)$.

Exemplo 2

A CPFL tem um plano de instalar uma usina termoelétrica em Campinas. Porém, a empresa tem dificuldade em atender às exigências impostas pelas leis de proteção ambiental referentes aos poluentes emitidos na atmosfera. O carvão necessário para aquecer as caldeiras deverá ser fornecido por três minas. As propriedades dos diferentes tipos de carvão produzidos em cada uma das minas estão indicadas na tabela abaixo, com valores relativos à queima de uma tonelada de carvão.

Mina	Enxofre (em ppm)	Poeira de Carvão (em Kg)	Vapor produzido (em Kg)
1 – Morro Velho	1100	1.7	24000
2 – Monjolo	3500	3.2	36000
3 – Jabuticaba	1300	2.4	28000

Exemplo 2

Os 3 tipos de carvão são misturados e combinados em qualquer proporção. As emissões de poluentes e de vapor de uma mistura são proporcionais aos valores indicados na tabela. As exigências ambientais requerem que:

- (i) para cada tonelada de carvão queimada a quantidade de enxofre não deve ser superior a 2.500 $\mathtt{ppm}$.
- (ii) para cada tonelada de carvão queimada a quantidade de poeira de carvão não deve ser superior a 2.8 $\mathtt{kg}$

Exemplo 2

Os 3 tipos de carvão são misturados e combinados em qualquer proporção. As emissões de poluentes e de vapor de uma mistura são proporcionais aos valores indicados na tabela. As exigências ambientais requerem que:

- (i) para cada tonelada de carvão queimada a quantidade de enxofre não deve ser superior a 2.500 $\mathtt{ppm}$.
- (ii) para cada tonelada de carvão queimada a quantidade de poeira de carvão não deve ser superior a 2.8 $\mathtt{kg}$

Os engenheiros querem determinar qual é a **quantidade máxima de vapor** (energia) que é possível gerar com a queima de uma tonelada de carvão.

Exemplo 2: Formulação

- **Variáveis**

  x_1: proporção de carvão da mina Morro Velho

  x_2: proporção de carvão da mina Monjolo

  x_3: proporção de carvão da mina Jabuticaba

Exemplo 2: Formulação

- **Variáveis**

  x_1: proporção de carvão da mina Morro Velho

  x_2: proporção de carvão da mina Monjolo

  x_3: proporção de carvão da mina Jabuticaba

- **Função objetivo** $\max y = 24000x_1 + 36000x_2 + 28000x_3$

Exemplo 2: Formulação

- **Variáveis**

  x_1: proporção de carvão da mina Morro Velho

  x_2: proporção de carvão da mina Monjolo

  x_3: proporção de carvão da mina Jabuticaba

- **Função objetivo** $\max y = 24000x_1 + 36000x_2 + 28000x_3$

- **Restrição** (i) Produção de enxofre: $1100x_1 + 3500x_2 + 1300x_3 \leq 2500$

Exemplo 2: Formulação

- **Variáveis**

  x_1: proporção de carvão da mina Morro Velho

  x_2: proporção de carvão da mina Monjolo

  x_3: proporção de carvão da mina Jabuticaba

- **Função objetivo** $\max y = 24000x_1 + 36000x_2 + 28000x_3$
- **Restrição** (i) Produção de enxofre: $1100x_1 + 3500x_2 + 1300x_3 \leq 2500$
- **Restrição** (ii) Emissão de poeira: $1.7x_1 + 3.2x_2 + 2.4x_3 \leq 2.8$

Exemplo 2: Formulação

- **Variáveis**

  x_1: proporção de carvão da mina Morro Velho

  x_2: proporção de carvão da mina Monjolo

  x_3: proporção de carvão da mina Jabuticaba
- **Função objetivo** $\max y = 24000x_1 + 36000x_2 + 28000x_3$
- **Restrição** (i) Produção de enxofre: $1100x_1 + 3500x_2 + 1300x_3 \leq 2500$
- **Restrição** (ii) Emissão de poeira: $1.7x_1 + 3.2x_2 + 2.4x_3 \leq 2.8$
- **Proporção da mistura** $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

Exemplo 2: Formulação

- **Variáveis**

  x_1: proporção de carvão da mina Morro Velho

  x_2: proporção de carvão da mina Monjolo

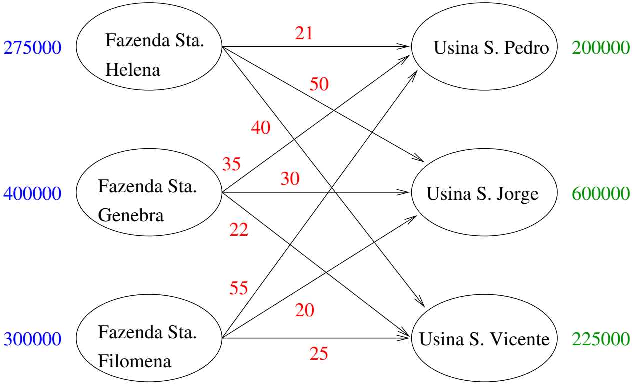
  x_3: proporção de carvão da mina Jabuticaba
- **Função objetivo** $\max y = 24000x_1 + 36000x_2 + 28000x_3$
- **Restrição** (i) Produção de enxofre: $1100x_1 + 3500x_2 + 1300x_3 \leq 2500$
- **Restrição** (ii) Emissão de poeira: $1.7x_1 + 3.2x_2 + 2.4x_3 \leq 2.8$
- **Proporção da mistura** $x_1 + x_2 + x_3 = 1$
- **Não-negatividade** $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Exemplo 3

A empresa **Meu Agro** possui três fazendas com canaviais e três usinas de produção de álcool. Os administradores da empresa estão organizando a logística da colheita da cana para a safra deste ano.

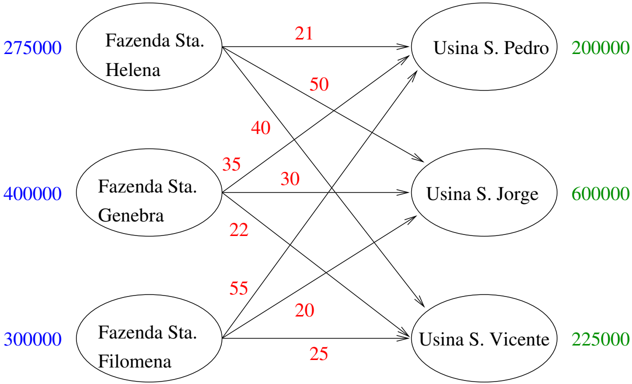
O transporte da cana das fazendas para as usinas é terceirizado. Há um custo fixo, por quilômetro e por tonelada de cana, cobrado pela transportadora. A produção das fazendas, a capacidade de processamento das usinas (em toneladas), e as distâncias em quilômetros entre as fazendas e as usinas são esquematizadas a seguir.

Exemplo 3



275000
Fazenda Sta. Helena
400000
Fazenda Sta. Genebra
300000
Fazenda Sta. Filomena
Usina S. Pedro
200000
Usina S. Jorge
600000
Usina S. Vicente
225000
21
50
40
35
30
22
55
20
25

Exemplo 3



Qual deve ser a quantidade de cana transportada de cada fazenda para cada usina de modo a **minimizar o custo total do transporte**?

Exemplo 3: Formulação

- **Variáveis**: x_{ij} : $\left\{ \begin{array}{l} \text{quantidade de cana transportada} \\ \text{da fazenda } i \text{ para a usina } j \end{array} \right.$

Exemplo 3: Formulação

- **Variáveis**: x_{ij} : $\left\{ \begin{array}{l} \text{quantidade de cana transportada} \\ \text{da fazenda } i \text{ para a usina } j \end{array} \right.$
- **Função objetivo**: $\min y = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} d_{ij} x_{ij}$.

Exemplo 3: Formulação

- **Variáveis**: x_{ij} : $\left\{ \begin{array}{l} \text{quantidade de cana transportada} \\ \text{da fazenda } i \text{ para a usina } j \end{array} \right.$
- **Função objetivo**: $\min y = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} d_{ij} x_{ij}$.
- **Restrições de capacidades das usinas**:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 200000 \quad \text{(Usina São Pedro)}$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 600000 \quad \text{(Usina São Jorge)}$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 225000 \quad \text{(Usina São Vicente)}$$

- **Escoamento da produção das fazendas**:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 275000 \quad \text{(Fazenda Santa Helena)}$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 400000 \quad \text{(Fazenda Santa Genebra)}$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 300000 \quad \text{(Fazenda Santa Filomena)}$$

Exemplo 3: Formulação

- **Variáveis**: x_{ij} : $\left\{ \begin{array}{l} \text{quantidade de cana transportada} \\ \text{da fazenda } i \text{ para a usina } j \end{array} \right.$
- **Função objetivo**: $\min y = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} d_{ij} x_{ij}$.
- **Restrições de capacidades das usinas**:

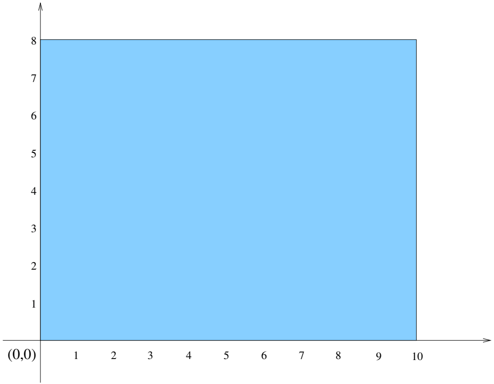
$$\begin{array}{ll} x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 200000 & \text{(Usina São Pedro)} \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 600000 & \text{(Usina São Jorge)} \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 225000 & \text{(Usina São Vicente)} \end{array}$$

- **Escoamento da produção das fazendas**:

$$\begin{array}{ll} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 275000 & \text{(Fazenda Santa Helena)} \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 400000 & \text{(Fazenda Santa Genebra)} \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 300000 & \text{(Fazenda Santa Filomena)} \end{array}$$

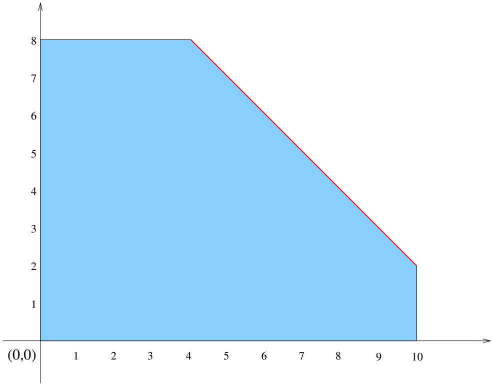
- **Não-negatividade**: $x_{ij} \geq 0$ para todo $(i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$.

PL: solução gráfica



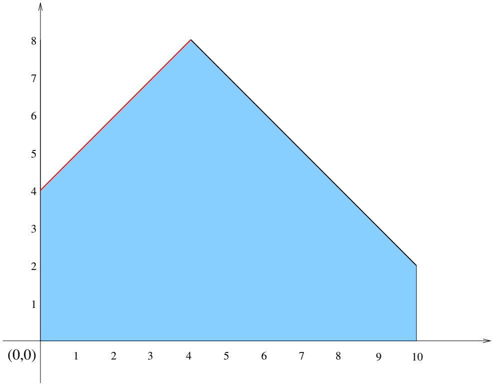
- $x_1, x_2 \geq 0$

PL: solução gráfica



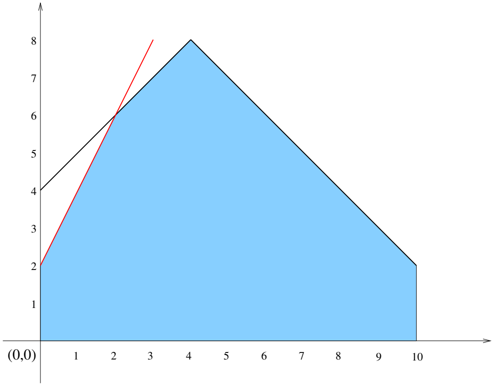
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$

PL: solução gráfica



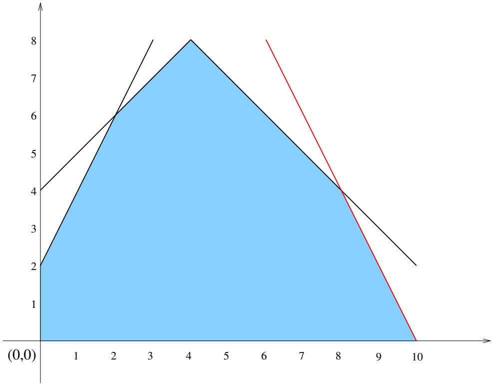
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$

PL: solução gráfica



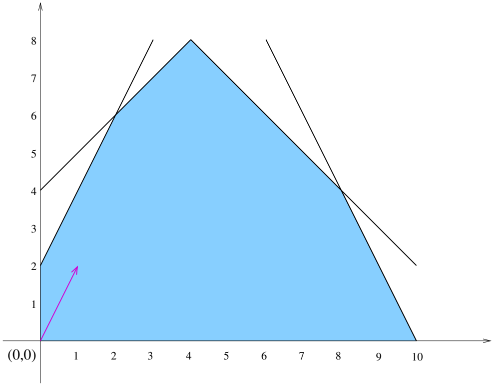
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$

PL: solução gráfica



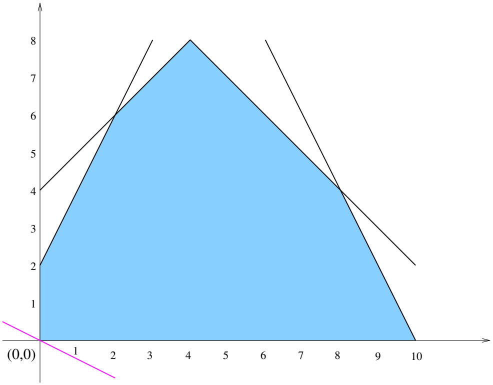
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$

PL: solução gráfica



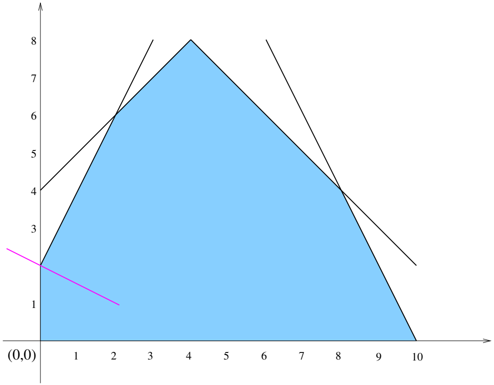
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$
- $\max y = x_1 + 2x_2$

PL: solução gráfica



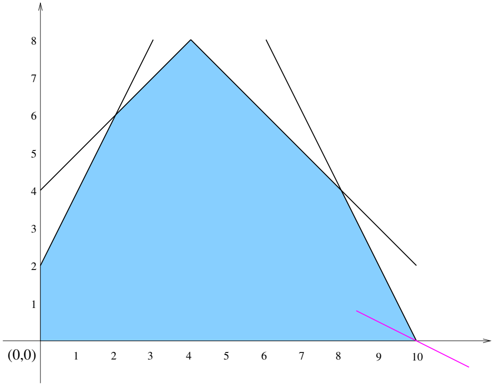
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$
- $\max y = x_1 + 2x_2$
- $y = x_1 + 2x_2 = 0$

PL: solução gráfica



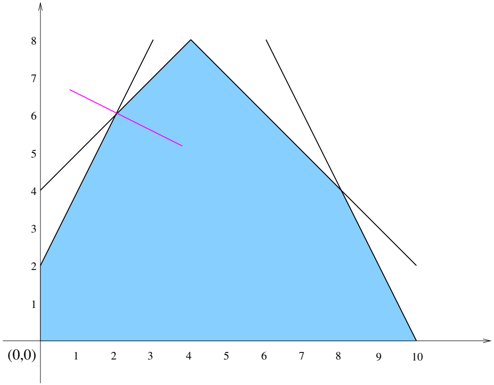
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$
- $\max y = x_1 + 2x_2$
- $y = x_1 + 2x_2 = 4$

PL: solução gráfica



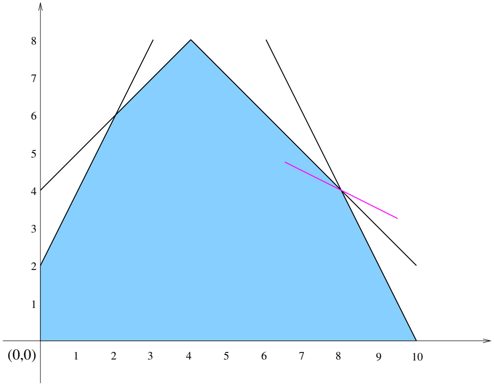
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$
- $\max y = x_1 + 2x_2$
- $y = x_1 + 2x_2 = 10$

PL: solução gráfica



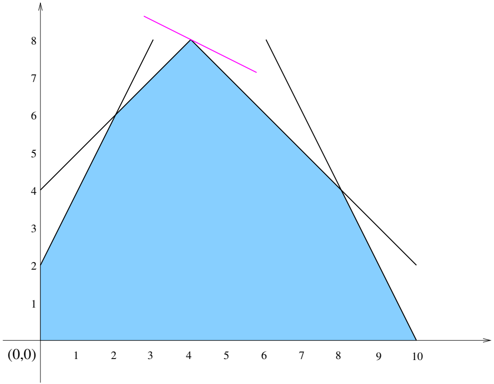
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$
- $\max y = x_1 + 2x_2$
- $y = x_1 + 2x_2 = 14$

PL: solução gráfica



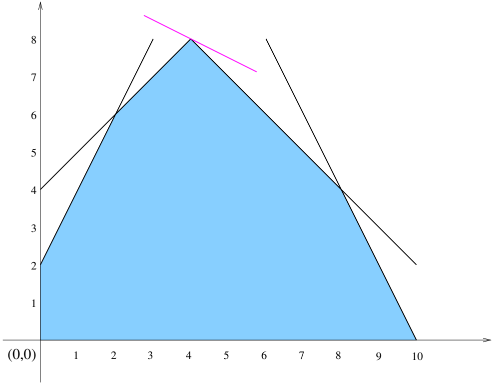
- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$
- $\max y = x_1 + 2x_2$
- $y = x_1 + 2x_2 = 16$

PL: solução gráfica



- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$
- $\max y = x_1 + 2x_2$
- $y = x_1 + 2x_2 = 20$

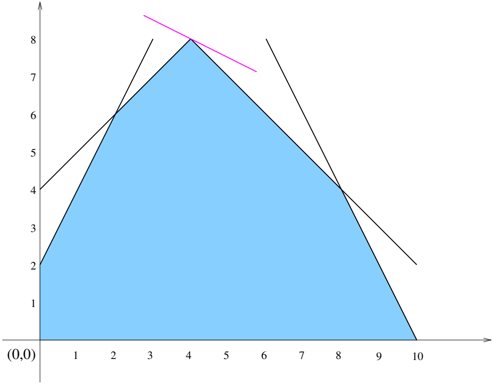
PL: solução gráfica



- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$
- $\max y = x_1 + 2x_2$
- $y = x_1 + 2x_2 = 20$

Observação: O conjunto de soluções de um sistema de inequações lineares é um **polítopo convexo** denominado região viável. Os seus pontos são soluções viáveis do PL.

PL: solução gráfica



- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 \leq 12$
- $-x_1 + x_2 \leq 4$
- $-2x_1 + x_2 \leq 2$
- $2x_1 + x_2 \leq 20$
- $\max y = x_1 + 2x_2$
- $y = x_1 + 2x_2 = 20$

Observação: O conjunto de soluções de um sistema de inequações lineares é um **polítopo convexo** denominado região viável. Os seus pontos são soluções viáveis do PL.

Intuição: Existe uma solução ótima do PL que é um ponto extremo (vértice) desse poliedro.

PL vs PLI

Encontre 5 diferenças entre os dois problemas

Programação Linear (**PL**):

Entrada: Matriz $A_{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$.
Objetivo: Achar o vetor $x \in \mathbb{R}^n$ que minimize $c^T x$, sujeito a $Ax \leq b, x \geq 0$.

$$\min \ c^T x$$
$$\text{sujeito a } Ax \leq b, x \geq 0$$

Programação Linear Inteira (**PLI**):

Entrada: Matriz $A_{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$.
Objetivo: Achar o vetor $x \in \mathbb{Z}^n$ que minimize $c^T x$, sujeito a $Ax \leq b, x \geq 0$.

$$\min \ c^T x$$
$$\text{sujeito a } Ax \leq b, x \geq 0$$

PL vs PLI

Encontre 5 diferenças entre os dois problemas

Programação Linear (**PL**):

Entrada: Matriz $A_{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$.
Objetivo: Achar o vetor $x \in \mathbb{R}^n$ que minimize $c^T x$, sujeito a $Ax \leq b, x \geq 0$.

$$\min c^T x$$
$$\text{sujeito a } Ax \leq b, x \geq 0$$

Programação Linear Inteira (**PLI**):

Entrada: Matriz $A_{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$.
Objetivo: Achar o vetor $x \in \mathbb{Z}^n$ que minimize $c^T x$, sujeito a $Ax \leq b, x \geq 0$.

$$\min c^T x$$
$$\text{sujeito a } Ax \leq b, x \geq 0$$

Apenas há uma diferença: $x \in \mathbb{R}^n$ **vs** $x \in \mathbb{Z}^n$.

PLI: Exemplo 1

Em uma plataforma marítima de petróleo, a inspeção das válvulas é feita por equipes divididas em turnos de trabalho de 8 horas. Um turno é composto de dois períodos de trabalho de 4 horas, separados por um descanso também de 4 horas. Terminado o seu turno, a equipe descansa por 12 horas seguidas. No total, são seis turnos de trabalho.

Em cada período, um conjunto de válvulas da plataforma precisam ser inspecionadas, havendo um funcionário para cada válvula a ser inspecionada. O número de válvulas a inspecionar em cada período, e os horários de trabalho dos turnos ao longo do dia são mostrados na tabela a seguir.

PLI: Exemplo 1

Turno	Período					
	00–04	04–08	08–12	12–16	16–20	20–24
1	$\surd$		$\surd$			
2		$\surd$		$\surd$		
3			$\surd$		$\surd$	
4				$\surd$		$\surd$
5	$\surd$				$\surd$	
6		$\surd$				$\surd$
Válvulas a inspecionar	6	7	15	9	13	10

PLI: Exemplo 1

Turno	Período					
	00–04	04–08	08–12	12–16	16–20	20–24
1	$\surd$		$\surd$			
2		$\surd$		$\surd$		
3			$\surd$		$\surd$	
4				$\surd$		$\surd$
5	$\surd$				$\surd$	
6		$\surd$				$\surd$
Válvulas a inspecionar	6	7	15	9	13	10

Qual o **número mínimo de funcionários** necessário para montar as equipes de inspeção das válvulas?

PLI: Exemplo 1 (formulação)

- **Variáveis**: x_i: número de funcionários no turno i.
- **Função objetivo**: $\min y = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$.
- **Restrições**: (número de funcionários por turno)

$$
\begin{array}{ll}
x_1 + x_5 \geq 6 & \text{(período 00–04)} \\
x_2 + x_6 \geq 7 & \text{(período 04–08)} \\
x_1 + x_3 \geq 15 & \text{(período 08–12)} \\
x_2 + x_4 \geq 9 & \text{(período 12–16)} \\
x_3 + x_5 \geq 13 & \text{(período 16–20)} \\
x_4 + x_6 \geq 10 & \text{(período 20–24)}
\end{array}
$$

- **Não-negatividade**: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$
- **Integralidade**: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathbb{Z}$.

Complexidade de PL

Complexidade do problema de **PL**:

- **Simplex (1947)**:
  Primeiro algoritmo conhecido para **PL**. Muito eficiente na prática, no entanto com complexidade de pior caso **exponencial** no tamanho da entrada.

Complexidade de PL

Complexidade do problema de **PL**:

- **Simplex (1947)**:
  Primeiro algoritmo conhecido para **PL**. Muito eficiente na prática, no entanto com complexidade de pior caso **exponencial** no tamanho da entrada.
- **Método dos Elipsóides (1979)**:
  Primeiro algoritmo **polinomial** para PL. Muito **ineficiente** na prática.

Complexidade de PL

Complexidade do problema de **PL**:

- **Simplex (1947)**:
  Primeiro algoritmo conhecido para **PL**. Muito eficiente na prática, no entanto com complexidade de pior caso **exponencial** no tamanho da entrada.

- **Método dos Elipsóides (1979)**:
  Primeiro algoritmo **polinomial** para PL. Muito **ineficiente** na prática.

- **Método dos Pontos Interiores (1984-1988)**:
  Algoritmo **polinomial** para PL, o primeiro em ser competitivo com o **Simplex** na prática.

Complexidade de PLI

Complexidade do problema de **PLI**: **Não se conhece** **algoritmo polinomial para o problema de PLI**. **É um problema NP-difícil**.

Complexidade de PLI

Complexidade do problema de **PLI**: **Não se conhece algoritmo polinomial para o problema de PLI**. **É um problema NP-difícil**.

No entanto, existem diversos algoritmos e estratégias que podem melhorar a eficiência da solução das formulações de **PLI**. É uma área ativa e com muitas aplicações.

PL e PLI são Reduções

Suponha que temos um problema **P**. Criar uma formulação de **PL** ou **PLI** para o problema **P** é a mesma coisa que criar uma redução **P** $\propto$ **PL** ou **P** $\propto$ **PLI**.

- **PL** e **PLI** são Reduções!

PL e PLI são Reduções

Suponha que temos um problema **P**. Criar uma formulação de **PL** ou **PLI** para o problema **P** é a mesma coisa que criar uma redução **P** $\propto$ **PL** ou **P** $\propto$ **PLI**.

- **PL** e **PLI** são Reduções!
- Como toda redução, ela não necessariamente cria o algoritmo mais eficiente para o problema. No entanto, **P** $\propto$ **PL** significa que há algoritmo polinomial para **P**.

PL e PLI são Reduções

Suponha que temos um problema **P**. Criar uma formulação de **PL** ou **PLI** para o problema **P** é a mesma coisa que criar uma redução **P** $\propto$ **PL** ou **P** $\propto$ **PLI**.

- **PL** e **PLI** são Reduções!
- Como toda redução, ela não necessariamente cria o algoritmo mais eficiente para o problema. No entanto, **P** $\propto$ **PL** significa que há algoritmo polinomial para **P**.
- Na prática criar uma formulação **PL** ou **PLI** é uma ferramenta muito eficiente para a resolução de um problema novo e complexo.

Resumo

Síntese

- Vimos vários exemplos de modelagem de problemas usando formulações de **Programação Linear** e **Programação Linear Inteira**.
- Há diferenças entre **PL** e **PLI**. Existem algoritmos eficientes para **PL**, e.g.: **Simplex**, quase sempre, e **Método dos Pontos Interiores**.
- **PLI** é uma área ativa de pesquisa que possui muitas aplicações.

Aplicações

- **Produção**: otimizar alocação de recursos, minimizar os custos;
- **Logística**: otimizar sistemas de transporte, distribuição de mercadorias;
- **Finanças**: alocação de investimentos em carteiras, minimizar os riscos.

Material bibliográfico e exercícios

U. Manber. Introduction to Algorithms. – **Cap. 10**.

Exercícios: ver exercícios no final do Capítulo 10.

T. Cormen et al. Algoritmos - Teoria e Prática (3a ed.). – **Cap. 29**.

Dúvidas

Dúvidas?