Projeto e Análise de Algoritmos II (MC558)
Grafos

Prof. Dr. Ruben Interian

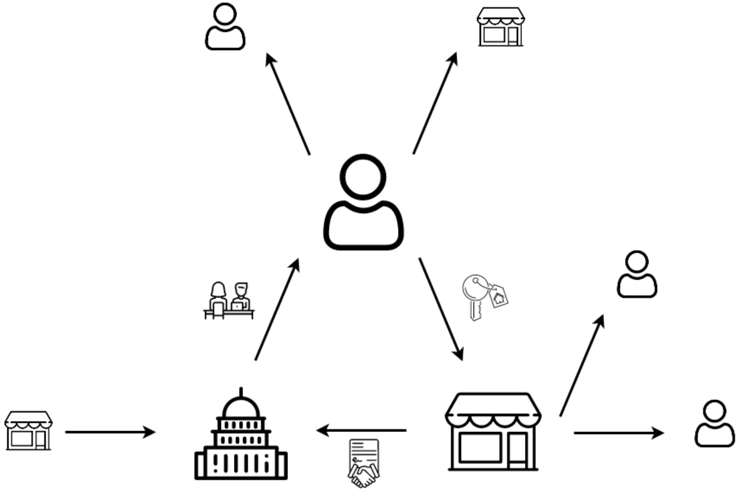
Resumo

Resumo

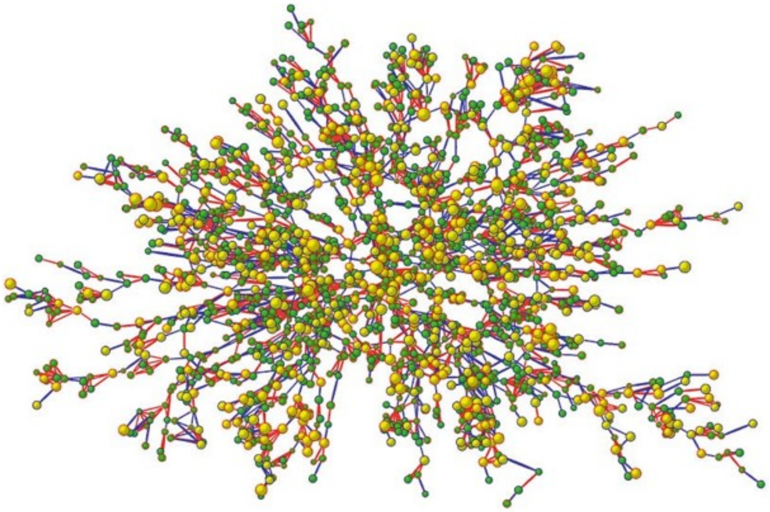
Transporte (linhas de metrô)

Redes sociais (Facebook, vínculos de amizade)

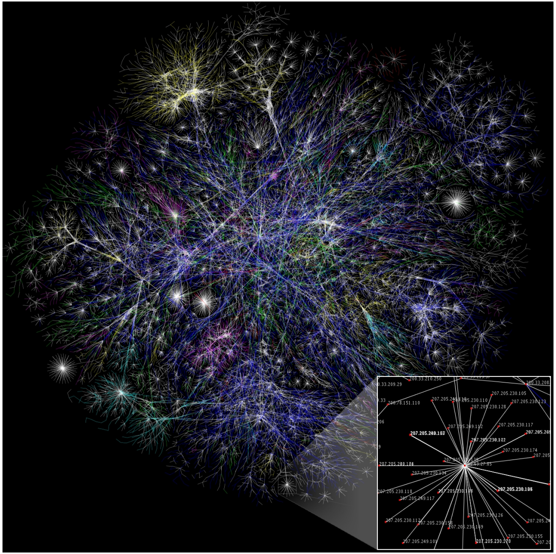
Conflito de interesse (vínculos diversos)



Propagação da obesidade durante 32 anos (vínculos familiares e sociais)



Internet (links entre sites)



Introdução

Grafos: **estruturas matemáticas abstratas**!

- **Abstrato**: possui alto grau de **generalização**;
- Podem modelar diversos problemas do mundo real;
- Um algoritmo para um determinado problema em grafos pode resolver **diversos** problemas reais.
  - Como chegar de forma rápida do lugar X ao lugar Y em carro / em Uber?
  - Quantos apertos de mão há, na media, entre duas pessoas aleatórias no mundo? (Teoria dos seis graus de separação)

Resumo

O que é um grafo?

Um **grafo** é um par $G = (V, E)$, onde:

- V é um conjunto finito de elementos chamados **vértices**, e
- E é um conjunto finito de pares não ordenados de vértices chamados **arestas**.

O que é um grafo?

Um **grafo** é um par $G = (V, E)$, onde:

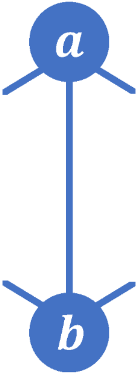
- V é um conjunto finito de elementos chamados **vértices**, e
- E é um conjunto finito de pares não ordenados de vértices chamados **arestas**.

- E se não for finito? – Então não é grafo (na nossa definição).

Arestas

Seja uma aresta $e = (a, b)$ (par não ordenado de vértices).

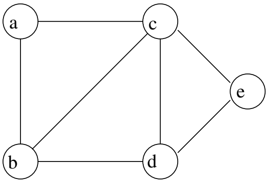
- Os vértices a e b são **adjacentes**.
- Os vértices a e b são os **extremos** da aresta e.
- A aresta e é **incidente** aos vertices a e b.
- Os vértices a e b são **incidentes** na aresta e.
- Pares não ordenados: $(a, b) = (b, a)$.



Exemplo

Grafo $G = (V, E)$.

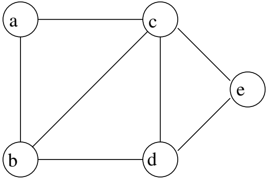
- $V = \{a, b, c, d, e\}$
- $E = \{(a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (c, d), (c, e), (d, e)\}$

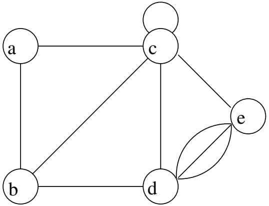


Exemplo

Grafo $G = (V, E)$.

- $V = \{a, b, c, d, e\}$
- $E = \{(a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (c, d), (c, e), (d, e)\}$



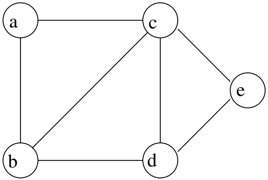


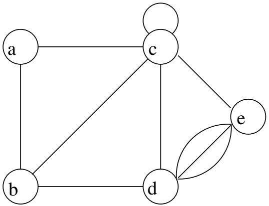
?

Multigrafo

Multigrafo (generalização de grafo):

- Pode conter laços;
- Pode conter arestas múltiplas (arestas com extremos idênticos).

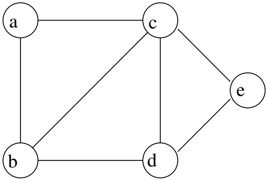


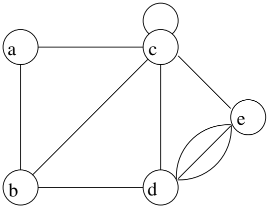


Multigrafo

Multigrafo (generalização de grafo):

- Pode conter laços;
- Pode conter arestas múltiplas (arestas com extremos idênticos).





Grafo simples: não tem laços ou arestas múltiplas.
Neste curso, usaremos geralmente grafos simples.

Tamanho de um grafo

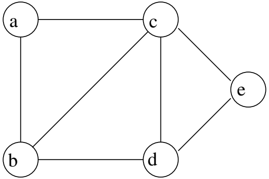
Grafo $G = (V, E)$.

- Cardinalidade do conjunto de vertices: $|V|$.
- Cardinalidade do conjunto de arestas: $|E|$.
- **Tamanho do grafo** G: $|V| + |E|$.
- O tamanho do grafo é importante quando ele é a entrada de algum algoritmo.

Grau de um vértice

O **grau** $d(v)$ de um vértice v é **o número de arestas incidentes** a v.

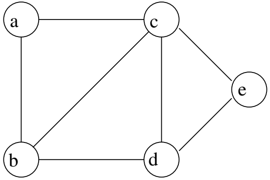
Exemplo:

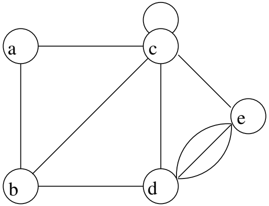


Grau de um vértice

O **grau** $d(v)$ de um vértice v é **o número de arestas incidentes** a v.

Exemplo:

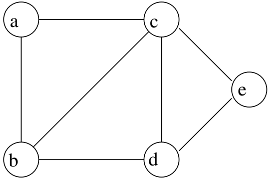


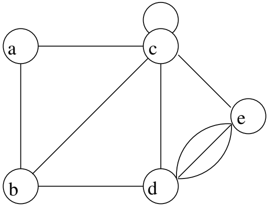


Grau de um vértice

O **grau** $d(v)$ de um vértice v é **o número de arestas incidentes** a v.

Exemplo:





Em multigrafos, *os laços são contados duas vezes*.

Soma de graus dos vértices

Teorema (do Aperto de Mãos)

Para todo grafo $G = (V, E)$*,*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Prova: ...

Soma de graus dos vértices

Teorema (do Aperto de Mãos)

Para todo grafo $G = (V, E)$,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Prova: ...

Resultado importante ...

Soma de graus dos vértices

Teorema (do Aperto de Mãos)

Para todo grafo $G = (V, E)$,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

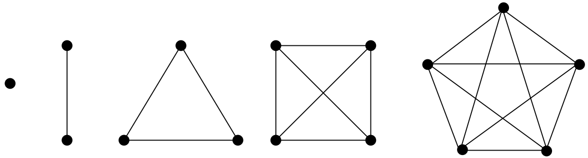
Corolário

Em todo grafo G, o número de vértices de grau ímpar é par.

Por quê?

Grafo completo, K_n

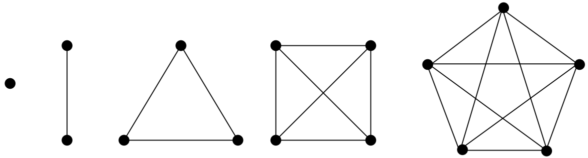
Grafo completo: grafo simples no qual todo par de vértices diferentes são adjacentes.



Quantas arestas tem um grafo completo com n vértices?

Grafo completo, K_n

Grafo completo: grafo simples no qual todo par de vértices diferentes são adjacentes.

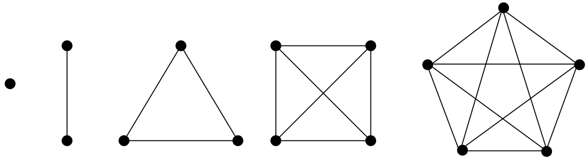


Quantas arestas tem um grafo completo com n vértices? $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

É o número de subconjuntos de 2 elementos em um conjunto com n elementos.

Grafo completo, K_n

Grafo completo: grafo simples no qual todo par de vértices diferentes são adjacentes.



Quantas arestas tem um grafo completo com n vértices? $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

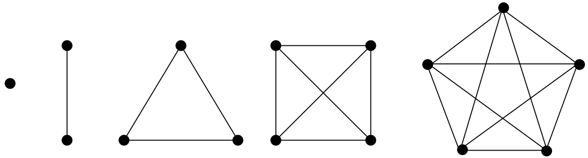
É o número de subconjuntos de 2 elementos em um conjunto com n elementos.

Grafo **regular**: um grafo é r-**regular**, se todos os seus vértices tem o mesmo grau r.

Veja que todo grafo completo é regular.

Grafo completo, K_n

Grafo completo: grafo simples no qual todo par de vértices diferentes são adjacentes.



Quantas arestas tem um grafo completo com n vértices? $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

É o número de subconjuntos de 2 elementos em um conjunto com n elementos.

Grafo **regular**: um grafo é r-**regular**, se todos os seus vértices tem o mesmo grau r.

Veja que todo grafo completo é regular.

Pode dar um exemplo de um grafo 2-regular?

Grafo complementar

O **complemento** de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo simples $\overline{G} = (V, E')$, onde dois vértices são adjacentes em $\overline{G}$ se **não são adjacentes** em G.

- Os vértices em $\overline{G}$ são os mesmos de G.
- As arestas em $\overline{G}$ são as "inversas" de G.

Grafo complementar

O **complemento** de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo simples $\overline{G} = (V, E')$, onde dois vértices são adjacentes em $\overline{G}$ se **não são adjacentes** em G.

- Os vértices em $\overline{G}$ são os mesmos de G.
- As arestas em $\overline{G}$ são as "inversas" de G.

$$d_{\overline{G}}(v) = \textbf{?}$$

Grafo complementar

O **complemento** de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo simples $\overline{G} = (V, E')$, onde dois vértices são adjacentes em $\overline{G}$ se **não são adjacentes** em G.

- Os vértices em $\overline{G}$ são os mesmos de G.
- As arestas em $\overline{G}$ são as "inversas" de G.

$$d_{\overline{G}}(v) = \text{?} \quad |V| - 1 - d_G(v)$$

Grafo complementar

O **complemento** de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo simples $\overline{G} = (V, E')$, onde dois vértices são adjacentes em $\overline{G}$ se **não são adjacentes** em G.

- Os vértices em $\overline{G}$ são os mesmos de G.
- As arestas em $\overline{G}$ são as "inversas" de G.

$$d_{\overline{G}}(v) = \textbf{?} \quad |V| - 1 - d_G(v)$$

Complemento de um grafo completo. O que é $\overline{K_n}$?

Grafo complementar

O **complemento** de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo simples $\overline{G} = (V, E')$, onde dois vértices são adjacentes em $\overline{G}$ se **não são adjacentes** em G.

- Os vértices em $\overline{G}$ são os mesmos de G.
- As arestas em $\overline{G}$ são as "inversas" de G.

$$d_{\overline{G}}(v) = \textbf{?}\ |V| - 1 - d_G(v)$$

Complemento de um grafo completo. O que é $\overline{K_n}$? – Grafo sem arestas (grafo vazio).

Resumo

Operações com grafos

Seja um grafo $G = (V, E)$. Notação para **operações com o grafo**:

- Remover uma aresta e: $G - e$ (as vezes denotado $G \setminus e$).
  - $G - e$ significa $(V, E - \{e\})$.

Operações com grafos

Seja um grafo $G = (V, E)$. Notação para **operações com o grafo**:

- Remover uma aresta e: $G - e$ (as vezes denotado $G \setminus e$).
  - $G - e$ significa $(V, E - \{e\})$.
- Remover um vértice v: $G - v$.
  - $G - v$ significa $(V - \{v\}, E - \{e : v \in e\})$.

Operações com grafos

Seja um grafo $G = (V, E)$. Notação para **operações com o grafo**:

- Remover uma aresta e: $G - e$ (as vezes denotado $G \setminus e$).
  - $G - e$ significa $(V, E - \{e\})$.
- Remover um vértice v: $G - v$.
  - $G - v$ significa $(V - \{v\}, E - \{e : v \in e\})$.
- Adicionar uma aresta e: $G + e = (V, E \cup \{e\})$.
- Adicionar um vértice v: $G + v = (V \cup \{v\}, E)$. Vértice v é **isolado**, $d(v) = 0$.

Subgrafo

- $G - e$, $G - v$ são **subgrafos** de G.

Subgrafo

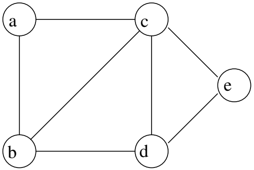
- $G - e$, $G - v$ são **subgrafos** de G.
- $H = (V', E')$ é subgrafo de $G = (V, E)$, se:

Subgrafo

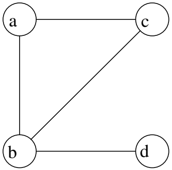
- $G - e$, $G - v$ são **subgrafos** de G.
- $H = (V', E')$ é subgrafo de $G = (V, E)$, se:
  - $V' \subseteq V$;
  - $E' \subseteq E$;
  - **H é um grafo**.

Subgrafo

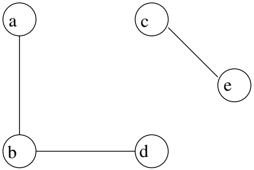
- $G - e$, $G - v$ são **subgrafos** de G.
- $H = (V', E')$ é subgrafo de $G = (V, E)$, se:
  - $V' \subseteq V$;
  - $E' \subseteq E$;
  - **H é um grafo**.
- O subgrafo $H = (V', E')$ é um **subgrafo gerador** se $V' = V$.



G



H



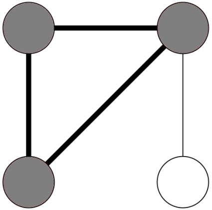
H

Subgrafo induzido, $G[S]$

Seja um grafo $G = (V, E)$.

- O subgrafo de G induzido por um conjunto de vértices S é o subgrafo formado por S e todas as arestas entre vértices em S:

$$G[S] = (S, \{(u, v) \in E : u, v \in S\})$$



Supergrafo

G é **supergrafo** de $H \Leftrightarrow H$ é subgrafo de G.

Resumo

Representação

Como representar um grafo?

Qual estrutura de dados pode ser usada?

- Matriz de adjacência,
- Listas de adjacência,
- Ha outras estruturas, mas MA e LA são as mais usadas.

Matriz de adjacência

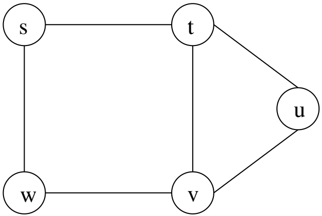
Matriz de adjacência A de um grafo $G = (V, E)$:

- Matriz quadrada de $|V| \times |V|$;
- $A[i, j] = 1$ se aresta $(i, j) \in E$, caso contrário, $A[i, j] = 0$;
- A matriz A é simétrica*****.

Matriz de adjacência

Matriz de adjacência A de um grafo $G = (V, E)$:

- Matriz quadrada de $|V| \times |V|$;
- $A[i,j] = 1$ se aresta $(i,j) \in E$, caso contrário, $A[i,j] = 0$;
- A matriz A é simétrica*.



$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & s & t & w & v & u \\
\hline
s & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
t & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
w & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
v & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
u & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

*Posteriormente veremos que para grafos direcionados A pode não ser simétrica.

Listas de adjacência

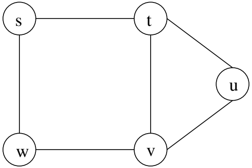
Listas de adjacência:

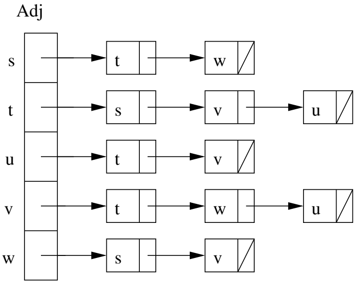
- Um grafo $G = (V, E)$ com $|V| = n$ pode ser representado usando n listas ligadas.
- Cada lista ligada $Adj[u]$ terá todos os vértices adjacentes ao vértice u.
- Uma aresta $e = (v, w)$ precisa estar representada duas vezes:
  - O vértice w estará em $Adj[v]$;
  - O vértice v estará em $Adj[w]$.

Listas de adjacência

Listas de adjacência:

- Um grafo $G = (V, E)$ com $|V| = n$ pode ser representado usando n listas ligadas.
- Cada lista ligada $Adj[u]$ terá todos os vértices adjacentes ao vértice u.
- Uma aresta $e = (v, w)$ precisa estar representada duas vezes:
    - O vértice w estará em $Adj[v]$;
    - O vértice v estará em $Adj[w]$.





Qual a melhor representação?

Depende do grafo e dos algoritmos usados.

Seja um grafo $G = (V, E)$.

- Matriz de adjacência:
  - Checar se $e \in E$ é $O(1)$ (o melhor tempo possível);
  - Espaço: $\Theta(V^2)$;
  - Adequada para grafos densos, com $|E| = \Theta(V^2)$.
- Listas de adjacência:
  - E fácil listar os vértices adjacentes de um vértice v.
  - Espaço: $\Theta(V + E)$ (o melhor possível).
  - Adequada para grafos esparsos, com $|E| = \Theta(V)$.

Qual a melhor representação?

Depende do grafo e dos algoritmos usados.

Seja um grafo $G = (V, E)$.

Encontre o erro neste slide!

- Matriz de adjacência:
  - Checar se $e \in E$ é $O(1)$ (o melhor tempo possível);
  - Espaço: $\Theta(V^2)$;
  - Adequada para grafos densos, com $|E| = \Theta(V^2)$.
- Listas de adjacência:
  - E fácil listar os vértices adjacentes de um vértice v.
  - Espaço: $\Theta(V + E)$ (o melhor possível).
  - Adequada para grafos esparsos, com $|E| = \Theta(V)$.

Qual a melhor representação?

Depende do grafo e dos algoritmos usados.

Seja um grafo $G = (V, E)$.

- Matriz de adjacência:
  - Checar se $e \in E$ é $O(1)$ (o melhor tempo possível);
  - Espaço: $\Theta(V^2)$;
  - Adequada para grafos densos, com $|E| = \Theta(V^2)$.
- Listas de adjacência:
  - E fácil listar os vértices adjacentes de um vértice v.
  - Espaço: $\Theta(V + E)$ (o melhor possível).
  - Adequada para grafos esparsos, com $|E| = \Theta(V)$.

Encontre o erro neste slide!

O que é V^2?

Conjunto ao quadrado? 🧐

Qual a melhor representação?

Depende do grafo e dos algoritmos usados.

Seja um grafo $G = (V, E)$.

- Matriz de adjacência:
  - Checar se $e \in E$ é $O(1)$ (o melhor tempo possível);
  - Espaço: $\Theta(V^2)$;
  - Adequada para grafos densos, com $|E| = \Theta(V^2)$.
- Listas de adjacência:
  - E fácil listar os vértices adjacentes de um vértice v.
  - Espaço: $\Theta(V + E)$ (o melhor possível).
  - Adequada para grafos esparsos, com $|E| = \Theta(V)$.

Encontre o erro neste slide!

O que é V^2?

Conjunto ao quadrado? 🧐

Notação assintótica simplificada:
V e E ao invés de $|V|$ e $|E|$.

Resumo

Síntese

- Os **grafos**, às vezes chamados de **redes**, são estruturas abstratas que têm uma enorme quantidade de aplicações.
- Vimos **definições iniciais**, notações a serem usadas, e alguns tipos específicos de grafos.
- Vimos as principais formas de representar o grafo computacionalmente: a **matriz de adjacência** e as **listas de adjacência**.

Problemas de impacto envolvendo grafos

Problemas reais envolvendo grafos cujas soluções geraram um grande impacto:

- Dado o grafo da **Internet**, criar um ranking dos sites mais relevantes para uma string de busca (GOOGLE PageRank).
- Dado o grafo de seguidores de um usuário em **Facebook**, sugerir N novas amizades, posts ou produtos a um usuário.
- Identificar a região do grafo de conexões entre neurônios no cérebro cuja alteração é responsável pela aparição de uma **doença** específica.

Exercícios

1. Seja G um grafo 3-regular. Mostre que G não pode ter 15 vértices.

Exercícios

1. Seja G um grafo 3-regular. Mostre que G não pode ter 15 vértices.
2. Mostre que em uma festa com pelo menos 6 pessoas, existem três pessoas que se conhecem mutuamente ou três pessoas que não se conhecem mutuamente.

Exercícios

1. Seja G um grafo 3-regular. Mostre que G não pode ter 15 vértices.
2. Mostre que em uma festa com pelo menos 6 pessoas, existem três pessoas que se conhecem mutuamente ou três pessoas que não se conhecem mutuamente.
   - Tome um vértice v e tente provar e usar que $d_G(v) \geq 3$ ou $d_{\overline{G}}(v) \geq 3$.

Bibliografia

T. Cormen et al. Algoritmos - Teoria e Prática (3a edição), 2012.

J. L. Szwarcfiter. Grafos e Algoritmos Computacionais (2a edição) 1986.

Dúvidas

Dúvidas?