Projeto e Análise de Algoritmos II (MC558)
Classes de Problemas

Prof. Dr. Ruben Interian

Resumo

Resumo

Revisão do conteúdo

- Sabemos que existem problemas **mais fáceis** de resolver.
  - Problemas **mais fáceis** possuem complexidade polinomial, e na maioria das vezes o grau do polinômio é pequeno (1, 2, 3).
  - **Exemplos**: ordenar um vetor, obter a mediana de um vetor, árvore geradora mínima de um grafo, caminho mais curto em grafos, multiplicação de matrizes.
- Outros problemas parecem ser mais desafiadores: eles **não possuem** algoritmos eficientes conhecidos.

Objetivo – Intro

Suponha que você está diante de um problema que você não conhece. Você tentou diversas formas de resolver ele de forma eficiente, mas não teve sucesso. Como passou um tempo e o problema não está resolvido, seu chefe (no trabalho, na empresa, na academia) está lhe exigindo algum tipo de resultado:

"Você avançou? Resolveu o problema?"

O que você irá responder?

Objetivo – Intro

Suponha que você está diante de um problema que você não conhece. Você tentou diversas formas de resolver ele de forma eficiente, mas não teve sucesso. Como passou um tempo e o problema não está resolvido, seu chefe (no trabalho, na empresa, na academia) está lhe exigindo algum tipo de resultado:

"Você avançou? Resolveu o problema?"

O que você irá responder?

- "Eu não consegui fazer" parece uma resposta muito frágil: outra pessoa conseguirá resolver o problema?..

Objetivo – Intro

Suponha que você está diante de um problema que você não conhece. Você tentou diversas formas de resolver ele de forma eficiente, mas não teve sucesso. Como passou um tempo e o problema não está resolvido, seu chefe (no trabalho, na empresa, na academia) está lhe exigindo algum tipo de resultado:

"Você avançou? Resolveu o problema?"

O que você irá responder?

- "Eu não consegui fazer" parece uma resposta muito frágil: outra pessoa conseguirá resolver o problema?..
- Por outro lado, se conseguimos mostrar que "Ninguém no mundo consegue resolver este problema", teremos realmente uma boa resposta.

Objetivo

Responder à pergunta:

- Como identificar um problema complexo? Como mostrar que ele é complexo?
  - "Eu não consigo resolver" não é suficiente!

Objetivo – Intro

Idéia: catalogar os problemas em **pelo menos** duas classes:

- A classe de problemas para os quais conhecemos um algoritmo eficiente.
- A classe de problemas para os quais **não** conhecemos algoritmo eficiente.

Objetivo – Intro

Idéia: catalogar os problemas em **pelo menos** duas classes:

- A classe de problemas para os quais conhecemos um algoritmo eficiente.
- A classe de problemas para os quais **não** conhecemos algoritmo eficiente.

Tendo essas classes, podemos catalogar um novo problema como **complexo** se não conhecemos nenhum algoritmo eficiente para o problema, e ele está **de alguma forma** relacionado aos outros problemas da sua classe.

Objetivo – Intro

Idéia: catalogar os problemas em **pelo menos** duas classes:

- A classe de problemas para os quais conhecemos um algoritmo eficiente.
- A classe de problemas para os quais **não** conhecemos algoritmo eficiente.

Tendo essas classes, podemos catalogar um novo problema como **complexo** se não conhecemos nenhum algoritmo eficiente para o problema, e ele está **de alguma forma** relacionado aos outros problemas da sua classe.

Mas, como podemos analisar problemas para os quais **não** há algoritmo eficiente?
Há algo que podemos dizer sobre esses problemas? Algo que eles têm em comum?

Objetivo – Intro

Se não há algoritmo eficiente para um conjunto de problemas, tem **alguma característica comum** que possamos identificar nesses problemas?

Objetivo – Intro

Se não há algoritmo eficiente para um conjunto de problemas, tem **alguma característica comum** que possamos identificar nesses problemas?

SIM: para esses problemas, há algoritmos eficientes de **verificação**.

Objetivo – Intro

Se não há algoritmo eficiente para um conjunto de problemas, tem **alguma característica comum** que possamos identificar nesses problemas?

SIM: para esses problemas, há algoritmos eficientes de **verificação**.

Vamos evidenciar que, para **diversos problemas** que chamamos de complexos:

> *É difícil encontrar um algoritmo polinomial que resolve o problema, mas existe um algoritmo polinomial que verifica se uma proposta de* ***solução*** *resolve de fato o problema.*

Resumo

Problemas de decisão

O estudo de classes de complexidade é feito para **problemas de decisão**, ou seja, aqueles em que a resposta é booleana: `SIM` ou `NÃO`.

- É mais fácil trabalhar dessa forma: não precisamos lidar com as diferentes estruturas de dados ou formatos que os algoritmos retornam.

Problemas de decisão

O estudo de classes de complexidade é feito para **problemas de decisão**, ou seja, aqueles em que a resposta é booleana: `SIM` ou `NÃO`.

- É mais fácil trabalhar dessa forma: não precisamos lidar com as diferentes estruturas de dados ou formatos que os algoritmos retornam.
- A partir de qualquer problema **P**, podemos criar um **problema de decisão associado a ele**.

Problemas de decisão

O estudo de classes de complexidade é feito para **problemas de decisão**, ou seja, aqueles em que a resposta é booleana: `SIM` ou `NÃO`.

- É mais fácil trabalhar dessa forma: não precisamos lidar com as diferentes estruturas de dados ou formatos que os algoritmos retornam.
- A partir de qualquer problema **P**, podemos criar um **problema de decisão associado a ele**.
- É possível mostrar que, se podemos resolver eficientemente um problema de decisão **DEC** associado a **P**, podemos resolver eficientemente o problema **P**.

Problemas de decisão

O estudo de classes de complexidade é feito para **problemas de decisão**, ou seja, aqueles em que a resposta é booleana: `SIM` ou `NÃO`.

- É mais fácil trabalhar dessa forma: não precisamos lidar com as diferentes estruturas de dados ou formatos que os algoritmos retornam.
- A partir de qualquer problema **P**, podemos criar um **problema de decisão associado a ele**.
- É possível mostrar que, se podemos resolver eficientemente um problema de decisão **DEC** associado a **P**, podemos resolver eficientemente o problema **P**.
- Ou seja, o problema original que queremos resolver, e a sua versão de decisão são **polinomialmente equivalentes**: se há algoritmo eficiente para **P**, há algoritmo eficiente para **DEC**, e vice-versa.

Problemas de decisão

Exemplo de um problema de decisão:

Dado um grafo $G = (V, E)$, *decidir se* G *é bipartido.*

Problemas de decisão

Exemplo de um problema de decisão:

Dado um grafo $G = (V, E)$, decidir se G é bipartido.

A **instância** (entrada) é um grafo $G = (V, E)$.

A **saída** é booleana: **True/False**.

Problemas de decisão

Exemplo de um problema de decisão:

> *Dado um grafo $G = (V, E)$, decidir se G é bipartido.*

A **instância** (entrada) é um grafo $G = (V, E)$.

A **saída** é booleana: **True/False**.

Outro exemplo de um problema de decisão:

> *Dado um grafo conexo $G = (V, E)$, pesos inteiros w_e para cada aresta $e \in E$ e um valor inteiro W, decidir se G possui uma árvore geradora de peso* **menor ou igual** *que W.*

A **versão de otimização** pode ser resolvida eficientemente (**Kruskal**, **Prim**).

Problemas de decisão

Problema do clique (CLI)

Dado um grafo não-direcionado $G = (V, E)$, *encontrar a maior clique em* G.

Lembrando: Uma clique é um conjunto de vértices mutuamente adjacentes.

Problemas de decisão

Problema do clique (CLI)

Dado um grafo não-direcionado $G = (V, E)$*, encontrar a maior clique em* G.

Lembrando: Uma clique é um conjunto de vértices mutuamente adjacentes.

Problema do clique (CLI) – Versão de decisão

Dado um grafo não-direcionado $G = (V, E)$*, e um valor* k*, decidir se* G *contém uma clique de tamanho pelo menos* k.

Problemas de decisão

Problema do clique (CLI)

Dado um grafo não-direcionado $G = (V, E)$, encontrar a maior clique em G.

Lembrando: Uma clique é um conjunto de vértices mutuamente adjacentes.

Problema do clique (CLI) – Versão de decisão

Dado um grafo não-direcionado $G = (V, E)$, e um valor k, decidir se G contém uma clique de tamanho pelo menos k.

Observação: neste caso, se G contém uma clique de tamanho pelo menos k, ele contém uma clique de tamanho k.

Problemas de decisão

O problema **P** que queremos resolver, e a sua versão de decisão são, *em certa medida*, equivalentes:

- Por exemplo, a redução de **CLI** para **CLI_DEC** é **trivial**.

Problemas de decisão

O problema **P** que queremos resolver, e a sua versão de decisão são, *em certa medida*, equivalentes:

- Por exemplo, a redução de **CLI** para **CLI_DEC** é **trivial**.
- Suponha que você possui um algoritmo eficiente (polinomial) para a versão de decisão **CLI_DEC** do problema **CLI**.

Problemas de decisão

O problema **P** que queremos resolver, e a sua versão de decisão são, *em certa medida*, equivalentes:

- Por exemplo, a redução de **CLI** para **CLI_DEC** é **trivial**.
- Suponha que você possui um algoritmo eficiente (polinomial) para a versão de decisão **CLI_DEC** do problema **CLI**.

Se há algoritmo polinomial para a versão de decisão do problema **P**,
há algoritmo polinomial para o problema **P**.

Problemas de decisão

O problema **P** que queremos resolver, e a sua versão de decisão são, *em certa medida*, equivalentes:

- Por exemplo, a redução de **CLI** para **CLI_DEC** é **trivial**.
- Suponha que você possui um algoritmo eficiente (polinomial) para a versão de decisão **CLI_DEC** do problema **CLI**.

Se há algoritmo polinomial para a versão de decisão do problema **P**,
há algoritmo polinomial para o problema **P**.

- O algoritmo a seguir resolve **CLI** em tempo polinomial.

Problemas de decisão

Alg_CLI (G)

$S\_min \leftarrow 1$
$S\_max \leftarrow |V|$
$opt \leftarrow 1$
enquanto $S\_min \leq S\_max$ **faça**
    $S\_med = (S\_min + S\_max)/2$
    se Alg_CLI_DEC(G, S_med) **então**
        $opt \leftarrow S\_med$
        $S\_min = S\_med + 1$
    senão $S\_max = S\_med - 1$
devolva opt

Problemas de decisão

Alg_CLI (G)

1: $S\_min \leftarrow 1$
2: $S\_max \leftarrow |V|$
3: $opt \leftarrow 1$
4: **enquanto** $S\_min \leq S\_max$ **faça**
5: $\quad S\_med = (S\_min + S\_max)/2$
6: $\quad$ **se Alg_CLI_DEC**(G, S_med) **então**
7: $\quad\quad opt \leftarrow S\_med$
8: $\quad\quad S\_min = S\_med + 1$
9: $\quad$ **senão** $S\_max = S\_med - 1$
10: **devolva** opt

Este tipo de redução é chamado de "redução de Turing".

Problemas de decisão

$\Rightarrow$

Sempre é possível encontrar uma **redução polinomial (de Turing)** do problema de otimização para o problema de decisão: $\mathbf{OPT}_P \propto_{\text{poli}} \mathbf{DEC}_P$, para todo problema **P**.

Problemas de decisão

$\Rightarrow$

Sempre é possível encontrar uma **redução polinomial (de Turing)** do problema de otimização para o problema de decisão: $\mathbf{OPT}_P \propto_{\text{poli}} \mathbf{DEC}_P$, para todo problema **P**.

Veja que, neste caso, precisamos usar outro tipo de redução: **Redução polinomial (de Turing)**. Mas continua valendo que a versão de otimização **OPT** e a versão de decisão **DEC**, do mesmo problema, são **polinomialmente equivalentes**: se há algoritmo polinomial para um problema, há para o outro.

Tipos de reduções

$$
\begin{tikzcd}
A & & B \\
I_A \arrow[rr, "\tau_I"] & & I_B \\
S_A & & S_B \arrow[ll, "\tau_S"']
\end{tikzcd}
$$

- Redução: Alg_B é usado uma única vez. Caso particular da redução de Turing.
- Redução de Karp: Alg_B é usado uma única vez. **A** e **B** precisam ser problemas de decisão. Alg_B deve responder `SIM` para I_B se e somente se I_A for uma instância `SIM` para **A**. Caso particular da redução de Turing.
- Redução de Turing: Alg_B pode ser usado múltiplas vezes. Se a redução é polinomial e o número de chamadas de Alg_B é polinomial (no tamanho da entrada de **A**), então se Alg_B é polinomial, há algoritmo polinomial para **A**.

Resumo

Problema SAT

Um exemplo **paradigmático e representativo** de problemas difíceis é o problema de satisfazer uma fórmula lógica $\mathcal{F}$ na sua forma normal conjuntiva (**SAT**, *Satisfiability*).

Problema SAT

Um exemplo **paradigmático e representativo** de problemas difíceis é o problema de satisfazer uma fórmula lógica $\mathcal{F}$ na sua forma normal conjuntiva (**SAT**, *Satisfiability*).

Lembrando:

- As variáveis $x_1, \ldots, x_n$ são binárias, e as suas negações são denotadas $\overline{x}_i$;
- Os operadores lógicos são "$+$" (OU lógico) e "$\cdot$" (E lógico);
- As cláusulas são $C_1, C_2, \ldots, C_m$, cada uma da forma $C_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots$;
- Fórmula na forma normal conjuntiva (FNC): $\mathcal{F} = C_1 \cdot C_2 \cdot \ \ldots \cdot C_m$.

Problema SAT

Um exemplo **paradigmático e representativo** de problemas difíceis é o problema de satisfazer uma fórmula lógica $\mathcal{F}$ na sua forma normal conjuntiva (**SAT**, *Satisfiability*).

Lembrando:

- As variáveis $x_1, \ldots, x_n$ são binárias, e as suas negações são denotadas $\overline{x}_i$;
- Os operadores lógicos são "$+$" (OU lógico) e "$\cdot$" (E lógico);
- As cláusulas são $C_1, C_2, \ldots, C_m$, cada uma da forma $C_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots$;
- Fórmula na forma normal conjuntiva (FNC): $\mathcal{F} = C_1 \cdot C_2 \cdot \ \ldots \cdot C_m$.

Exemplo de fórmula na FNC: $\mathcal{F} = (x_1 + x_2 + \overline{x}_3) \cdot (\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + x_3) \cdot (x_1 + \overline{x}_3)$.

Problema SAT

Um exemplo **paradigmático e representativo** de problemas difíceis é o problema de satisfazer uma fórmula lógica $\mathcal{F}$ na sua forma normal conjuntiva (**SAT**, *Satisfiability*).

Lembrando:

- As variáveis $x_1, \ldots, x_n$ são binárias, e as suas negações são denotadas $\overline{x}_i$;
- Os operadores lógicos são "$+$" (OU lógico) e "$\cdot$" (E lógico);
- As cláusulas são $C_1, C_2, \ldots, C_m$, cada uma da forma $C_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots$;
- Fórmula na forma normal conjuntiva (FNC): $\mathcal{F} = C_1 \cdot C_2 \cdot \ \ldots \cdot C_m$.

Exemplo de fórmula na FNC: $\mathcal{F} = (x_1 + x_2 + \overline{x}_3) \cdot (\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + x_3) \cdot (x_1 + \overline{x}_3)$.

Em lógica, qualquer fórmula proposicional pode ser transformada em uma fórmula equivalente que está na forma normal conjuntiva. Resolver **SAT** significa saber verificar se **qualquer fórmula** da lógica proposicional pode ser verdadeira.

Problema SAT

Problema da satisfatibilidade (SAT)

Entrada: Fórmula lógica $\mathcal{F}$ com n variáveis na forma normal conjuntiva.

Objetivo: Decidir se existe uma atribuição das variáveis $x_1, \ldots, x_n$ para a qual $\mathcal{F} = 1$.

Problema SAT

Problema da satisfatibilidade (SAT)

Entrada: Fórmula lógica $\mathcal{F}$ com n variáveis na forma normal conjuntiva.

Objetivo: Decidir se existe uma atribuição das variáveis $x_1, \ldots, x_n$ para a qual $\mathcal{F} = 1$.

Observações:

- Ou seja, precisamos atribuir valores às variáveis de forma que, para esses valores, a fórmula seja verdadeira. **SAT** é um **problema de decisão**.

Problema SAT

Problema da satisfatibilidade (SAT)

Entrada: Fórmula lógica $\mathcal{F}$ com n variáveis na forma normal conjuntiva.

Objetivo: Decidir se existe uma atribuição das variáveis $x_1, \ldots, x_n$ para a qual $\mathcal{F} = 1$.

Observações:

- Ou seja, precisamos atribuir valores às variáveis de forma que, para esses valores, a fórmula seja verdadeira. **SAT** é um **problema de decisão**.
- Exemplo: $\mathcal{F} = (x_1 + x_2 + \overline{x}_3) \cdot (\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + x_3) \cdot (x_1 + \overline{x}_3)$.
  Se $x_1 = 1$ e $x_2 = x_3 = 0$, temos $\mathcal{F} = 1$. A saída do **SAT** para esta instância é `SIM`.

Problema SAT

Problema da satisfatibilidade (SAT)

Entrada: Fórmula lógica $\mathcal{F}$ com n variáveis na forma normal conjuntiva.

Objetivo: Decidir se existe uma atribuição das variáveis $x_1, \ldots, x_n$ para a qual $\mathcal{F} = 1$.

Observações:

- Ou seja, precisamos atribuir valores às variáveis de forma que, para esses valores, a fórmula seja verdadeira. **SAT** é um **problema de decisão**.
- Exemplo: $\mathcal{F} = (x_1 + x_2 + \overline{x}_3) \cdot (\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + x_3) \cdot (x_1 + \overline{x}_3)$.
  Se $x_1 = 1$ e $x_2 = x_3 = 0$, temos $\mathcal{F} = 1$. A saída do **SAT** para esta instância é `SIM`.
- A **proposta de solução** ($x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 0$) é o que vamos chamar de **certificado** da instância. É uma especie de "prova" do fato que a instância é `SIM`.

Problema SAT

- **Tarefa**: Encontre um algoritmo para **SAT**.

Problema SAT

- **Tarefa**: Encontre um algoritmo para **SAT**.

O seu algoritmo é **polinomial**?

Problema SAT

- **Tarefa**: Encontre um algoritmo para **SAT**.

O seu algoritmo é **polinomial**?

- **Tarefa**: Dada uma atribuição de valores das variáveis de uma instância do **SAT**, encontre um algoritmo que verifica se $\mathcal{F}$ é verdadeira ou falsa para esta atribuição.

Problema SAT

- **Tarefa**: Encontre um algoritmo para **SAT**.

O seu algoritmo é **polinomial**?

- **Tarefa**: Dada uma atribuição de valores das variáveis de uma instância do **SAT**, encontre um algoritmo que verifica se $\mathcal{F}$ é verdadeira ou falsa para esta atribuição.

O seu algoritmo é **polinomial**?

Problema SAT

- **Tarefa**: Encontre um algoritmo para **SAT**.

  O seu algoritmo é **polinomial**?

- **Tarefa**: Dada uma atribuição de valores das variáveis de uma instância do **SAT**, encontre um algoritmo que verifica se $\mathcal{F}$ é verdadeira ou falsa para esta atribuição.

  O seu algoritmo é **polinomial**?

Não se conhece algoritmo eficiente para **SAT**. Porém, existe um **algoritmo polinomial** que verifica se uma atribuição de valores para as variáveis resolve de fato o problema.

Problema SAT

- **Conclusão**: não é fácil achar um algoritmo polinomial que resolve **SAT**.
- **Mas**, dada uma proposta de solução (**certificado**) para uma instância do **SAT**, há algoritmo polinomial que <u>verifica</u> se a solução indica que a instância é `SIM`.

Problema SAT

- **Conclusão**: não é fácil achar um algoritmo polinomial que resolve **SAT**.
- **Mas**, dada uma proposta de solução (**certificado**) para uma instância do **SAT**, há algoritmo polinomial que verifica se a solução indica que a instância é `SIM`.
- Além do **SAT**, **muitos** outros problemas compartilham essa mesma propriedade.
- Vamos introduzir um *novo modelo de computação* que nos ajudará a identificá-los.

Resumo

Algoritmos não-determinísticos

- Em um algoritmo **determinístico**, o resultado de cada operação é definido de maneira única. Cada linha do algoritmo computa ou retorna apenas um valor.

Algoritmos não-determinísticos

- Em um algoritmo **determinístico**, o resultado de cada operação é definido de maneira única. Cada linha do algoritmo computa ou retorna apenas um valor.
- Um algoritmo **não-determinístico**, além dos comandos determinísticos usuais, pode usar o comando **Escolha(**S**)**, onde S é um conjunto de elementos.

Algoritmos não-determinísticos

- Em um algoritmo **determinístico**, o resultado de cada operação é definido de maneira única. Cada linha do algoritmo computa ou retorna apenas um valor.
- Um algoritmo **não-determinístico**, além dos comandos determinísticos usuais, pode usar o comando **Escolha(S)**, onde S é um conjunto de elementos.
- A complexidade de execução do comando **Escolha** é $O(1)$.

Algoritmos não-determinísticos

- Em um algoritmo **determinístico**, o resultado de cada operação é definido de maneira única. Cada linha do algoritmo computa ou retorna apenas um valor.
- Um algoritmo **não-determinístico**, além dos comandos determinísticos usuais, pode usar o comando **Escolha(S)**, onde S é um conjunto de elementos.
- A complexidade de execução do comando **Escolha** é $O(1)$.
- Não existe regra que especifique o funcionamento do comando **Escolha**(S). Existem $|S|$ resultados possíveis para esta operação.

Algoritmos não-determinísticos

Os algoritmos **não-determinísticos** são divididos em **duas fases**:

- Na primeira fase, é possível usar o comando não-determinístico **Escolha**, e uma proposta de solução é construída.
  - A **proposta de solução** gerada ao final da fase de construção do algoritmo não determinístico é chamada de **certificado**.

Algoritmos não-determinísticos

Os algoritmos **não-determinísticos** são divididos em **duas fases**:

- Na primeira fase, é possível usar o comando não-determinístico **Escolha**, e uma proposta de solução é construída.
  - A **proposta de solução** gerada ao final da fase de construção do algoritmo não determinístico é chamada de **certificado**.
- A segunda fase apenas usa comandos determinísticos, e simplesmente **verifica** se o certificado resolve de fato o problema, retornando o resultado `SIM` ou `NÃO`.
  - Resumo: se o certificado resolve o problema, retornar `SIM`, senão retornar `NÃO`.
  - Se na fase de **verificação**, um determinado certificado de uma instância do problema retorna `SIM`, o chamamos de **certificado válido** dessa instância.

Algoritmos não-determinísticos

Os algoritmos **não-determinísticos** são divididos em **duas fases**:

- Na primeira fase, é possível usar o comando não-determinístico **Escolha**, e uma proposta de solução é construída.
  - A **proposta de solução** gerada ao final da fase de construção do algoritmo não determinístico é chamada de **certificado**.
- A segunda fase apenas usa comandos determinísticos, e simplesmente **verifica** se o certificado resolve de fato o problema, retornando o resultado `SIM` ou `NÃO`.
  - Resumo: se o certificado resolve o problema, retornar `SIM`, senão retornar `NÃO`.
  - Se na fase de **verificação**, um determinado certificado de uma instância do problema retorna `SIM`, o chamamos de **certificado válido** dessa instância.
- A divisão em fases é apenas uma formalidade para facilitar a nossa análise. O que define que um algoritmo seja determinístico ou não determinístico é a sua capacidade de usar o comando **Escolha**.

Algoritmos não-determinísticos

- Uma **máquina não-determinística** é aquela que é capaz de executar um algoritmo não-determinístico. *É uma abstração!*

Algoritmos não-determinísticos

- Uma **máquina não-determinística** é aquela que é capaz de executar um algoritmo não-determinístico. *É uma abstração!*
- Porém, os recentes progressos na computação quântica mostram que abstrações podem virar realidade, expandindo a capacidade dos algoritmos puramente determinísticos. Muitos avanços tecnológicos começaram como abstrações teóricas.

Algoritmos não-determinísticos: Exemplo

Exemplo: Determinar se um valor x pertence a um vetor A de n posições.
Um algoritmo não-determinístico seria:

BuscaND (A, x)

▷ (* Fase de construção *)
$j \leftarrow$ Escolha($\{1, \ldots, n\}$)
▷ (* Fase de verificação *)
se $A[j] = x$ **então devolva** `SIM`
senão devolva `NÃO`

Qual a **complexidade** deste algoritmo?

Algoritmos não-determinísticos

Definição: O tempo de execução de um algoritmo não-determinístico para uma determinada instância é T, se existe uma sequência de comandos **Escolha** tal que o número de operações necessário para que ele retorne `SIM` é T, e não há outra sequência de comandos **Escolha** com um tempo menor que T.

- Para cada instância de tamanho n, pegamos a melhor sequência de **Escolha**'s. Para todas as instâncias de tamanho n, a complexidade é avaliada pelo tempo de execução de pior caso, como sempre fazemos.

Algoritmos não-determinísticos

Definição: O tempo de execução de um algoritmo não-determinístico para uma determinada instância é T, se existe uma sequência de comandos **Escolha** tal que o número de operações necessário para que ele retorne SIM é T, e não há outra sequência de comandos **Escolha** com um tempo menor que T.

- Para cada instância de tamanho n, pegamos a melhor sequência de **Escolha**'s. Para todas as instâncias de tamanho n, a complexidade é avaliada pelo tempo de execução de pior caso, como sempre fazemos.
- Um algoritmo não-determinístico tem complexidade $O(f(n))$ se existem constantes positivas c e n_0 tais que, para toda instância SIM de tamanho $n \geq n_0$, o tempo de execução é limitado por $cf(n)$.

Algoritmos não-determinísticos

Definição: O tempo de execução de um algoritmo não-determinístico para uma determinada instância é T, se existe uma sequência de comandos **Escolha** tal que o número de operações necessário para que ele retorne SIM é T, e não há outra sequência de comandos **Escolha** com um tempo menor que T.

- Para cada instância de tamanho n, pegamos a melhor sequência de **Escolha**'s. Para todas as instâncias de tamanho n, a complexidade é avaliada pelo tempo de execução de pior caso, como sempre fazemos.
- Um algoritmo não-determinístico tem complexidade $O(f(n))$ se existem constantes positivas c e n_0 tais que, para toda instância SIM de tamanho $n \geq n_0$, o tempo de execução é limitado por $cf(n)$.
- **Se existe** uma sequência de **Escolha**'s que leve o algoritmo a retornar SIM, a sua complexidade está definida. E se **não existe** essa sequência?

Algoritmos não-determinísticos

Definição: O tempo de execução de um algoritmo não-determinístico para uma determinada instância é T, se existe uma sequência de comandos **Escolha** tal que o número de operações necessário para que ele retorne `SIM` é T, e não há outra sequência de comandos **Escolha** com um tempo menor que T.

- Para cada instância de tamanho n, pegamos a melhor sequência de **Escolha**'s. Para todas as instâncias de tamanho n, a complexidade é avaliada pelo tempo de execução de pior caso, como sempre fazemos.
- Um algoritmo não-determinístico tem complexidade $O(f(n))$ se existem constantes positivas c e n_0 tais que, para toda instância `SIM` de tamanho $n \geq n_0$, o tempo de execução é limitado por $cf(n)$.
- **Se existe** uma sequência de **Escolha**'s que leve o algoritmo a retornar `SIM`, a sua complexidade está definida. E se **não existe** essa sequência?
- **BuscaND** tem complexidade $O(1)$. Qualquer algoritmo determinístico para este problema é $\Omega(n)$.

Algoritmos não-determinísticos

Problema do clique (CLI)

Dado um grafo não-direcionado $G = (V, E)$*, encontrar a maior clique em* G.

Lembrando: Uma clique é um conjunto de vértices mutuamente adjacentes.

Problema do clique (CLI) – Versão de decisão

Dado um grafo não-direcionado $G = (V, E)$*, e um valor* k*, decidir se* G *contém uma clique de tamanho pelo menos* k.

Algoritmos não-determinísticos: Outro exemplo

Algoritmo não-determinístico para o problema do clique (**CLI**):

CliqueND(G, k)

$\triangleright$ (* Fase de construção *)
$S \leftarrow V$
$C \leftarrow \{\}$ $\triangleright$ vértices que estarão na clique
para cada $i \leftarrow 1, \ldots, k$ **faça**
  $u \leftarrow \text{Escolha}(S)$
  $S \leftarrow S - \{u\}$
  $C \leftarrow C \cup \{u\}$
$\triangleright$ (* Fase de verificação *)
para cada par de vértices distintos u, v em C **faça**
  se $(u, v) \notin E$ **então devolva** `NÃO`
devolva `SIM`

Algoritmos não-determinísticos: Outro exemplo

- Complexidade não-determinística do algoritmo: $O(k + k^2) \subseteq O(n^2)$.

Algoritmos não-determinísticos: Outro exemplo

- Complexidade não-determinística do algoritmo: $O(k + k^2) \subseteq O(n^2)$.
- Não se conhece algoritmo determinístico polinomial para **CLI**.

Máquinas não-determinísticas

- As máquinas não-determinísticas podem ser **imaginadas** como máquinas determinísticas com **infinitos processadores**.
  - Os processadores se comunicam entre *instantaneamente*, ou seja, uma mensagem vai de um processador ao outro em tempo *zero*.

Máquinas não-determinísticas

- As máquinas não-determinísticas podem ser **imaginadas** como máquinas determinísticas com **infinitos processadores**.
  - Os processadores se comunicam entre *instantaneamente*, ou seja, uma mensagem vai de um processador ao outro em tempo *zero*.
- O fluxo de execução de um algoritmo não-determinístico pode ser representado através de uma *árvore*. Cada caminho na árvore iniciando na raiz corresponde a uma sequência de escolhas e a um possível fluxo de execução do programa.

Máquinas não-determinísticas

- As máquinas não-determinísticas podem ser **imaginadas** como máquinas determinísticas com **infinitos processadores**.
  - Os processadores se comunicam entre *instantaneamente*, ou seja, uma mensagem vai de um processador ao outro em tempo *zero*.
- O fluxo de execução de um algoritmo não-determinístico pode ser representado através de uma *árvore*. Cada caminho na árvore iniciando na raiz corresponde a uma sequência de escolhas e a um possível fluxo de execução do programa.
- Em um dado vértice, ao executar o comando **Escolha**(S), são criados $|S|$ filhos, cada um correspondendo a um possível resultado desta operação, alocando-se novos processadores para continuar a execução.

Máquinas não-determinísticas

- Podemos imaginar que a árvore de execução é percorrida em largura. Ao ser atingido o primeiro nível onde uma execução do algoritmo retorna `SIM`, o processador que chegou a este estado comunica-se instantaneamente com todos os demais, interrompendo o algoritmo.

Máquinas não-determinísticas

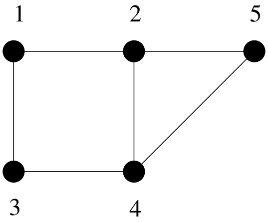
- Podemos imaginar que a árvore de execução é percorrida em largura. Ao ser atingido o primeiro nível onde uma execução do algoritmo retorna `SIM`, o processador que chegou a este estado comunica-se instantaneamente com todos os demais, interrompendo o algoritmo.
- Outro algoritmo não-determinístico de complexidade $O(n^2)$ para **CLI** é apresentado a seguir. Note que existem sequências de escolhas que podem não deixar que o laço **enquanto** termine. Porém, a complexidade não-determinística só se interessa pela **melhor** sequência de escolhas que leva a retornar `SIM`.

Algoritmos não-determinísticos

CliqueND2(G, k)

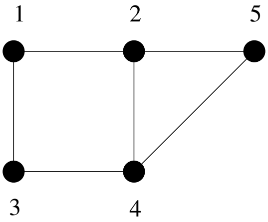
▷ (* Fase de construção *)
$j \leftarrow 0$
$C \leftarrow \{\}$ ▷ vértices que estarão na clique
enquanto $j < k$ **faça**
    $u \leftarrow \text{Escolha}(V)$
    se $u \notin C$ **então**
        $C \leftarrow C \cup \{u\}$
        $j \leftarrow j + 1$
▷ (* Fase de verificação *)
para cada par de vértices distintos u, v em C **faça**
    se $(u, v) \notin E$ **então devolva** `NÃO`
devolva `SIM`

Algoritmos não-determinísticos



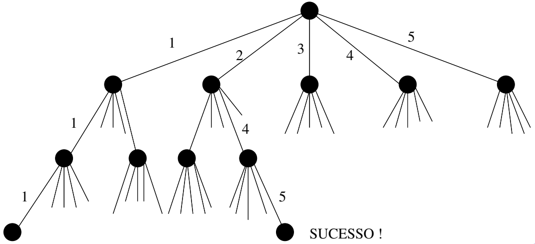
Determinar se há uma **CLI** de tamanho 3.

Algoritmos não-determinísticos



Determinar se há uma **CLI** de tamanho 3.

A seguir, a arvore de simulação determinística de CliqueND2:



Algoritmos não-determinísticos

Exercício: Desenvolva um algoritmo não-determinístico polinomial para **SAT**.

Qual a complexidade do seu algoritmo?

Classes **P** e **NP**

- **Definição**: $\mathcal{P}$ é o conjunto de problemas que podem ser resolvidos por um **algoritmo determinístico** em tempo polinomial.
- **Definição**: $\mathcal{NP}$ é o conjunto de problemas que podem ser resolvidos por um **algoritmo <u>não</u>-determinístico** em tempo polinomial.

Classes **P** e **NP**

- **Definição**: $\mathcal{P}$ é o conjunto de problemas que podem ser resolvidos por um **algoritmo determinístico** em tempo polinomial.
- **Definição**: $\mathcal{NP}$ é o conjunto de problemas que podem ser resolvidos por um **algoritmo <u>não</u>-determinístico** em tempo polinomial.
- Como todo algoritmo determinístico é um caso particular de um algoritmo não-determinístico, segue que

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}.$$

Todos os problemas que possuem algoritmos polinomiais estão em $\mathcal{P}$ e $\mathcal{NP}$. Vimos que **CLIQUE** e **SAT** estão em $\mathcal{NP}$.

Classes **P** e **NP**

- **Questão fundamental da Computação**:

$$\mathcal{P} \stackrel{?}{=} \mathcal{NP}$$

Classes **P** e **NP**

- **Questão fundamental da Computação**:

$$\mathcal{P} \stackrel{?}{=} \mathcal{NP}$$

- A maioria dos cientistas acredita que $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.

Classes **P** e **NP**

- **Questão fundamental da Computação**:

$$\mathcal{P} \stackrel{?}{=} \mathcal{NP}$$

- A maioria dos cientistas acredita que $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.
- Como mostrar que $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$?
  Mostrar que existe um problema $A \in \mathcal{NP}$ tal que **nenhum** *algoritmo determinístico polinomial pode resolver A.*

Classes **P** e **NP**

- **Questão fundamental da Computação**:

$$\mathcal{P} \stackrel{?}{=} \mathcal{NP}$$

- A maioria dos cientistas acredita que $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.
- Como mostrar que $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$?
  Mostrar que existe um problema $A \in \mathcal{NP}$ tal que **nenhum** *algoritmo determinístico polinomial pode resolver A.*
- Como mostrar que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$?
  Mostrar que todo problema $B \in \mathcal{NP}$ possui um algoritmo **determinístico polinomial** *que o resolve.*

Resumo

Síntese

- O estudo de classes de complexidade é feito para **problemas de decisão**: aqueles em que a saída é `SIM` ou `NÃO`.
- Um exemplo **paradigmático e representativo** de problemas difíceis é o problema da satisfatibilidade (**SAT**, *Satisfiability*). Na próxima aula, usaremos **SAT** para provar que diferentes problemas são complexos.
- Um algoritmo **não-determinístico** permite o uso do comando **Escolha(**S**)**. O tempo de execução do algoritmo não-determinístico está ligado à melhor sequência possível de **Escolha**'s.

Material bibliográfico e exercícios

U. Manber. Introduction to Algorithms. – **Cap. 11**.

Exercícios: ver exercícios no final do Capítulo 11.

Dúvidas

Dúvidas?