Projeto e Análise de Algoritmos II (MC558)
Classes de Problemas

Prof. Dr. Ruben Interian

Resumo

Resumo

Revisão do conteúdo

- O estudo de classes de complexidade é feito para **problemas de decisão** (saída `SIM` ou `NÃO`). Se resolvemos eficientemente o problema de decisão associado a **P**, podemos resolver eficientemente **P**!

Revisão do conteúdo

- O estudo de classes de complexidade é feito para **problemas de decisão** (saída `SIM` ou `NÃO`). Se resolvemos eficientemente o problema de decisão associado a **P**, podemos resolver eficientemente **P**!
- Um exemplo muito importante de problemas difíceis é o problema da satisfatibilidade (**SAT**, *Satisfiability*), que é um problema de decisão.

Revisão do conteúdo

- O estudo de classes de complexidade é feito para **problemas de decisão** (saída `SIM` ou `NÃO`). Se resolvemos eficientemente o problema de decisão associado a **P**, podemos resolver eficientemente **P**!
- Um exemplo muito importante de problemas difíceis é o problema da satisfatibilidade (**SAT**, *Satisfiability*), que é um problema de decisão.
- Um algoritmo **não-determinístico** permite o uso do comando **Escolha(*S*)**. **SAT** pode ser resolvido por um algoritmo polinomial **não-determinístico**.

Revisão do conteúdo

- O estudo de classes de complexidade é feito para **problemas de decisão** (saída `SIM` ou `NÃO`). Se resolvemos eficientemente o problema de decisão associado a **P**, podemos resolver eficientemente **P**!
- Um exemplo muito importante de problemas difíceis é o problema da satisfatibilidade (**SAT**, *Satisfiability*), que é um problema de decisão.
- Um algoritmo **não-determinístico** permite o uso do comando **Escolha(**S**)**. **SAT** pode ser resolvido por um algoritmo polinomial **não-determinístico**.
- É uma questão em aberto se os problemas que os algoritmos **não-determinísticos** resolvem em tempo polinomial ($\mathcal{NP}$), podem ser resolvidos em tempo polinomial por algoritmos **determinísticos**: $\mathcal{P} \stackrel{?}{=} \mathcal{NP}$. A maioria acredita que $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.

Objetivo

Responder à pergunta:

- Como identificar um problema complexo? Como mostrar que ele é complexo?
  - "Eu não consigo resolver" não é suficiente!

Resumo

Classes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{NP}$

- **Definição**: $\mathcal{P}$ é o conjunto de problemas que podem ser resolvidos por um **algoritmo determinístico** em tempo polinomial.
- **Definição**: $\mathcal{NP}$ é o conjunto de problemas que podem ser resolvidos por um **algoritmo não-determinístico** em tempo polinomial.

Classes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{NP}$

- **Definição**: $\mathcal{P}$ é o conjunto de problemas que podem ser resolvidos por um **algoritmo determinístico** em tempo polinomial.
- **Definição**: $\mathcal{NP}$ é o conjunto de problemas que podem ser resolvidos por um **algoritmo não-determinístico** em tempo polinomial.
- Como todo algoritmo determinístico é um caso particular de um algoritmo não-determinístico, $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$.

  Todos os problemas que possuem algoritmos polinomiais estão em $\mathcal{P}$ e $\mathcal{NP}$. Vimos que **CLIQUE** e **SAT** estão em $\mathcal{NP}$.

Classes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{NP}$

- **Questão fundamental da Computação**:

$$\mathcal{P} \stackrel{?}{=} \mathcal{NP}$$

Classes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{NP}$

- **Questão fundamental da Computação**:

$$\mathcal{P} \stackrel{?}{=} \mathcal{NP}$$

- A maioria dos cientistas acredita que $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.

Classes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{NP}$

- **Questão fundamental da Computação**:

$$\mathcal{P} \stackrel{?}{=} \mathcal{NP}$$

- A maioria dos cientistas acredita que $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.
- Como mostrar que $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$?
  Mostrar que existe um problema $A \in \mathcal{NP}$ tal que **nenhum** *algoritmo determinístico polinomial pode resolver A.*

Classes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{NP}$

- **Questão fundamental da Computação**:

$$\mathcal{P} \stackrel{?}{=} \mathcal{NP}$$

- A maioria dos cientistas acredita que $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.
- Como mostrar que $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$?
  Mostrar que existe um problema $A \in \mathcal{NP}$ tal que **nenhum** *algoritmo determinístico polinomial pode resolver A.*
- Como mostrar que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$?
  Mostrar que todo problema $B \in \mathcal{NP}$ possui um algoritmo **determinístico polinomial** *que o resolve.*

Classes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{NP}$

- **Questão fundamental da Computação**:

$$\mathcal{P} \stackrel{?}{=} \mathcal{NP}$$

- A maioria dos cientistas acredita que $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.
- Como mostrar que $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$?
  Mostrar que existe um problema $A \in \mathcal{NP}$ tal que **nenhum** *algoritmo determinístico polinomial pode resolver A.*
- Como mostrar que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$?
  Mostrar que todo problema $B \in \mathcal{NP}$ possui um algoritmo **determinístico polinomial** *que o resolve.*
  – Na verdade, veremos que é suficiente que apenas um problema, de uma classe específica, tenha algoritmo determinístico polinomial, para mostrar que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

Classes $\mathcal{NP}$-difícil e $\mathcal{NP}$-completo

- Suponha que conseguimos encontrar um problema $A \in \mathcal{NP}$ tal que **todo problema** $B \in \mathcal{NP}$ se reduz em tempo polinomial a A.

Classes $\mathcal{NP}$-difícil e $\mathcal{NP}$-completo

- Suponha que conseguimos encontrar um problema $A \in \mathcal{NP}$ tal que **todo problema** $B \in \mathcal{NP}$ se reduz em tempo polinomial a A.
  - A e B são problemas de decisão. A redução mencionada é uma redução de Karp. **Lembrando** a redução de Karp: Alg_B é usado uma única vez; Alg_B responde `SIM` para I_B se e somente se I_A é uma instância `SIM` para A.
  - O termo redução é usado daqui em diante para referir-se à redução de Karp.

Classes $\mathcal{NP}$-difícil e $\mathcal{NP}$-completo

- Suponha que conseguimos encontrar um problema $A \in \mathcal{NP}$ tal que **todo problema** $B \in \mathcal{NP}$ se reduz em tempo polinomial a A.
  - A e B são problemas de decisão. A redução mencionada é uma redução de Karp. **Lembrando** a redução de Karp: Alg_B é usado uma única vez; Alg_B responde `SIM` para I_B se e somente se I_A é uma instância `SIM` para A.
  - O termo redução é usado daqui em diante para referir-se à redução de Karp.
- Então, temos um problema $A \in \mathcal{NP}$ tal que, se $A \in \mathcal{P}$, então todo problema em $\mathcal{NP}$ também está em $\mathcal{P}$!

Classes $\mathcal{NP}$-difícil e $\mathcal{NP}$-completo

$\mathcal{NP}$-difícil

A é um problema $\mathcal{NP}$-difícil se todo problema de $\mathcal{NP}$ se reduz polinomialmente a A.

Classes $\mathcal{NP}$-difícil e $\mathcal{NP}$-completo

$\mathcal{NP}$-difícil

A é um problema $\mathcal{NP}$-difícil se todo problema de $\mathcal{NP}$ se reduz polinomialmente a A.

- Informalmente, se A for $\mathcal{NP}$-difícil, então resolver A deve ser pelo menos tão difícil quanto resolver qualquer problema em $\mathcal{NP}$.

Classes $\mathcal{NP}$-difícil e $\mathcal{NP}$-completo

$\mathcal{NP}$-difícil

A é um problema $\mathcal{NP}$-difícil se todo problema de $\mathcal{NP}$ se reduz polinomialmente a A.

- Informalmente, se A for $\mathcal{NP}$-difícil, então resolver A deve ser pelo menos tão difícil quanto resolver qualquer problema em $\mathcal{NP}$.
- Se resolvemos de forma eficiente $A \in \mathcal{NP}$-difícil, resolveremos de forma eficiente qualquer problema $B \in \mathcal{NP}$. Ou seja, se for encontrado **apenas um algoritmo polinomial** para **apenas um problema** $\mathcal{NP}$-difícil, ficará provado que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

Classes $\mathcal{NP}$-difícil e $\mathcal{NP}$-completo

$\mathcal{NP}$-difícil

A é um problema $\mathcal{NP}$-difícil se todo problema de $\mathcal{NP}$ se reduz polinomialmente a A.

- Informalmente, se A for $\mathcal{NP}$-difícil, então resolver A deve ser pelo menos tão difícil quanto resolver qualquer problema em $\mathcal{NP}$.
- Se resolvemos de forma eficiente $A \in \mathcal{NP}$-difícil, resolveremos de forma eficiente qualquer problema $B \in \mathcal{NP}$. Ou seja, se for encontrado **apenas um algoritmo polinomial** para **apenas um problema** $\mathcal{NP}$-difícil, ficará provado que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.
- **Ótimo, mas onde podemos encontrar um problema $\mathcal{NP}$-difícil?**

Classes $\mathcal{NP}$-difícil e $\mathcal{NP}$-completo

$\mathcal{NP}$-completo

A é um problema $\mathcal{NP}$-completo (ou A está em $\mathcal{NP}$-completo) se:

1. $A \in \mathcal{NP}$, e
2. $A \in \mathcal{NP}$-difícil.

Classes $\mathcal{NP}$-difícil e $\mathcal{NP}$-completo

$\mathcal{NP}$-completo

A é um problema $\mathcal{NP}$-completo (ou A está em $\mathcal{NP}$-completo) se:

1. $A \in \mathcal{NP}$, e
2. $A \in \mathcal{NP}$-difícil.

Observações:

- Por que precisamos desta definição? Há problemas $\notin \mathcal{NP}$?

Classes $\mathcal{NP}$-difícil e $\mathcal{NP}$-completo

$\mathcal{NP}$-completo

A é um problema $\mathcal{NP}$-completo (ou A está em $\mathcal{NP}$-completo) se:

1. $A \in \mathcal{NP}$, e
2. $A \in \mathcal{NP}$-difícil.

Observações:

- Por que precisamos desta definição? Há problemas $\notin \mathcal{NP}$? – SIM. **Exemplos**:
  - Problemas que **não são verificáveis** em tempo polinomial. São problemas para os quais não pode ser gerado um certificado curto (certificado conciso, ou polinomial).
  - Problemas **indecidíveis** (que não possuem algoritmo que os resolve). Veremos alguns nas próximas aulas.

Classes $\mathcal{NP}$-difícil e $\mathcal{NP}$-completo

$\mathcal{NP}$-completo

A é um problema $\mathcal{NP}$-completo (ou A está em $\mathcal{NP}$-completo) se:

1. $A \in \mathcal{NP}$, e
2. $A \in \mathcal{NP}$-difícil.

Observações:

- Por que precisamos desta definição? Há problemas $\notin \mathcal{NP}$? – SIM. **Exemplos**:
  - Problemas que **não são verificáveis** em tempo polinomial. São problemas para os quais não pode ser gerado um certificado curto (certificado conciso, ou polinomial).
  - Problemas **indecidíveis** (que não possuem algoritmo que os resolve). Veremos alguns nas próximas aulas.
- **Lembrando**: os problemas P e Q são polinomialmente equivalentes se $P \propto_{\text{poli}} Q$ e $Q \propto_{\text{poli}} P$. Todos os problemas $\mathcal{NP}$-completos são polinomialmente equivalentes.

Classes $\mathcal{NP}$-difícil e $\mathcal{NP}$-completo

$\mathcal{NP}$-completo

A é um problema $\mathcal{NP}$-completo (ou A está em $\mathcal{NP}$-completo) se:

1. $A \in \mathcal{NP}$, e
2. $A \in \mathcal{NP}$-difícil.

Observações:

- Por que precisamos desta definição? Há problemas $\notin \mathcal{NP}$? – SIM. **Exemplos**:
  - Problemas que **não são verificáveis** em tempo polinomial. São problemas para os quais não pode ser gerado um certificado curto (certificado conciso, ou polinomial).
  - Problemas **indecidíveis** (que não possuem algoritmo que os resolve). Veremos alguns nas próximas aulas.
- **Lembrando**: os problemas P e Q são polinomialmente equivalentes se $P \propto_{\text{poli}} Q$ e $Q \propto_{\text{poli}} P$. Todos os problemas $\mathcal{NP}$-completos são polinomialmente equivalentes.
- Por definição, $\mathcal{NP}$-completo $\subseteq \mathcal{NP}$-difícil.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude

Resultado importante: Seja A um problema $\mathcal{NP}$-difícil e B um problema em $\mathcal{NP}$.
Se existe uma redução polinomial de A para B ($A \propto_{\text{poli}} B$), então B é $\mathcal{NP}$-completo.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude

Resultado importante: Seja A um problema $\mathcal{NP}$-difícil e B um problema em $\mathcal{NP}$. Se existe uma redução polinomial de A para B ($A \propto_{\text{poli}} B$), então B é $\mathcal{NP}$-completo.

Dificuldade: encontrar um problema que seja $\mathcal{NP}$-difícil, e portanto $\mathcal{NP}$-completo. Será que ele existe?...

Provas de $\mathcal{NP}$-completude

Resultado importante: Seja A um problema $\mathcal{NP}$-difícil e B um problema em $\mathcal{NP}$.
Se existe uma redução polinomial de A para B ($A \propto_{\text{poli}} B$), então B é $\mathcal{NP}$-completo.

Dificuldade: encontrar um problema que seja $\mathcal{NP}$-difícil, e portanto $\mathcal{NP}$-completo.
Será que ele existe?...

Stephen Cook provou em 1971 que **SAT** é $\mathcal{NP}$-completo.

Teorema de Cook e classe $\mathcal{NP}$

Seja A um problema de decisão em $\mathcal{NP}$ que admite um algoritmo *não-determinístico* polinomial que resolve A.

- Como a fase de verificação do algoritmo apenas realiza operações determinísticas e é polinomial, o **certificado** $c(x)$ gerado pela fase de construção tem tamanho polinomial no tamanho da instância x: ele é um **certificado conciso**, ou **curto**. Ou seja, $|c(x)| \leq p(|x|)$, onde p é um polinômio.

Teorema de Cook e classe $\mathcal{NP}$

Seja A um problema de decisão em $\mathcal{NP}$ que admite um algoritmo *não-determinístico* polinomial que resolve A.

- Como a fase de verificação do algoritmo apenas realiza operações determinísticas e é polinomial, o **certificado** $c(x)$ gerado pela fase de construção tem tamanho polinomial no tamanho da instância x: ele é um **certificado conciso**, ou **curto**. Ou seja, $|c(x)| \leq p(|x|)$, onde p é um polinômio.
- Uma **definição equivalente** da classe $\mathcal{NP}$:

  $\mathcal{NP}$ é o conjunto dos problemas de decisão para os quais existe um algoritmo **determinístico** que, dado uma instância e um certificado conciso, **verifica** em **tempo polinomial** no tamanho da instância **se o certificado é válido** (se ele de fato resolve o problema).

Teorema de Cook e classe $\mathcal{NP}$

As duas definições de $\mathcal{NP}$ são equivalentes: definem a mesma classe de problemas!

- $\mathcal{NP}$ é o conjunto de problemas de decisão que admitem um algoritmo não determinístico polinomial.
- $\mathcal{NP}$ é o conjunto de problemas de decisão que admitem um algoritmo verificador determinístico polinomial.

Teorema de Cook e classe $\mathcal{NP}$

As duas definições de $\mathcal{NP}$ são equivalentes: definem a mesma classe de problemas!

- $\mathcal{NP}$ é o conjunto de problemas de decisão que admitem um algoritmo não determinístico polinomial.
- $\mathcal{NP}$ é o conjunto de problemas de decisão que admitem um algoritmo verificador determinístico polinomial.

Observação: Se temos **apenas** um verificador polinomial, é possível definir um algoritmo não determinístico que irá **gerar um certificado válido** em tempo polinomial. Veja que o certificado é conciso!

Teorema de Cook: principais ideias da prova

Ideias da prova de Cook:

- Todo algoritmo pode ser descrito por um **modelo de computação** conhecido como uma **Máquina de Turing** (MT). Em particular, para qualquer problema $\mathcal{NP}$, o algoritmo verificador pode ser descrito por este modelo.

Teorema de Cook: principais ideias da prova

Ideias da prova de Cook:

- Todo algoritmo pode ser descrito por um **modelo de computação** conhecido como uma **Máquina de Turing** (MT). Em particular, para qualquer problema $\mathcal{NP}$, o algoritmo verificador pode ser descrito por este modelo.
- É possível mostrar que, para cada entrada x da Máquina de Turing ($=$ algoritmo), há uma fórmula booleana $\mathcal{F}$, de tamanho polinomial no tamanho de x, tal que $\mathcal{F}$ pode ser satisfeita **se e somente se** a Máquina de Turing retorna `Aceitar` para x.

Teorema de Cook: principais ideias da prova

Ideias da prova de Cook:

- Todo algoritmo pode ser descrito por um **modelo de computação** conhecido como uma **Máquina de Turing** (MT). Em particular, para qualquer problema $\mathcal{NP}$, o algoritmo verificador pode ser descrito por este modelo.
- É possível mostrar que, para cada entrada x da Máquina de Turing ($=$ algoritmo), há uma fórmula booleana $\mathcal{F}$, de tamanho polinomial no tamanho de x, tal que $\mathcal{F}$ pode ser satisfeita **se e somente se** a Máquina de Turing retorna `Aceitar` para x.

Para um determinado algoritmo determinístico, para cada entrada x,
há uma fórmula booleana "**equivalente**" a eles!

Teorema de Cook: principais ideias da prova

Ideias da prova de Cook:

- Todo algoritmo pode ser descrito por um **modelo de computação** conhecido como uma **Máquina de Turing** (MT). Em particular, para qualquer problema $\mathcal{NP}$, o algoritmo verificador pode ser descrito por este modelo.
- É possível mostrar que, para cada entrada x da Máquina de Turing (= algoritmo), há uma fórmula booleana $\mathcal{F}$, de tamanho polinomial no tamanho de x, tal que $\mathcal{F}$ pode ser satisfeita **se e somente se** a Máquina de Turing retorna `Aceitar` para x.

  Para um determinado algoritmo determinístico, para cada entrada x, há uma fórmula booleana "**equivalente**" a eles!

- Existe uma fórmula booleana $\mathcal{F}$, para cada problema $A \in \mathcal{NP}$ e entrada x, tal que: x é instância `SIM` para A **se e somente se** $\mathcal{F}$ é instância `SIM` para **SAT**.

  SAT é $\mathcal{NP}$-difícil.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude

Lembrando:

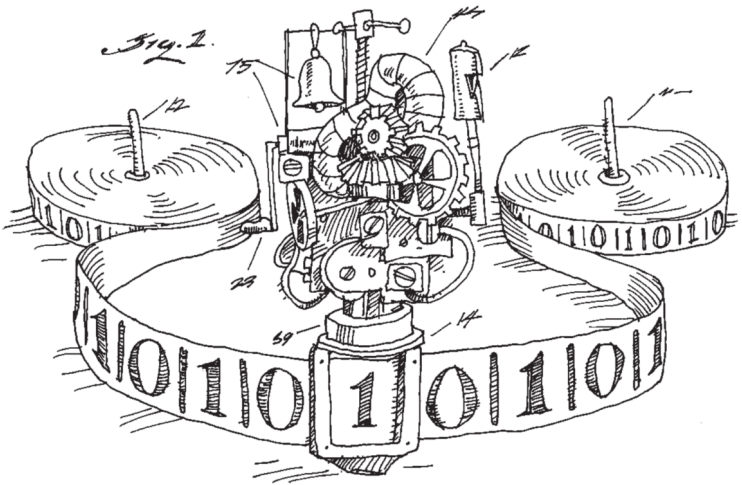
Resultado importante: Seja A um problema $\mathcal{NP}$-difícil e B um problema em $\mathcal{NP}$. Se existe uma redução polinomial de A para B ($A \propto_{\text{poli}} B$), então B é $\mathcal{NP}$-completo.

Se tivermos um problema $\mathcal{NP}$-difícil (**SAT**), seria possível mostrar que um novo problema B é $\mathcal{NP}$-completo reduzindo o **SAT** para B.

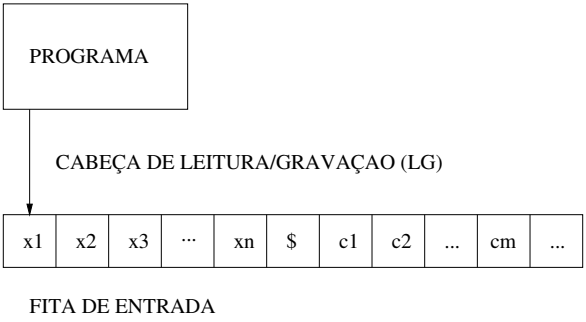
E assim por diante...

Resumo

Máquina de Turing



Máquina de Turing



Máquina de Turing

Foi definida por Alan Turing em 1937 como modelo universal de computação.

Máquina de Turing

No início da execução, a cabeça de LG encontra-se no primeiro símbolo da *string* de entrada (a posição mais à esquerda dos caracteres não-vazios da fita).
Cada instrução ou estado do programa (exceto a última) é da forma:

$$\boxed{\ell : \text{ se } \sigma \text{ então } (\sigma', o, \ell')},$$

- ℓ e ℓ' são números de instruções;
- σ e σ' são símbolos do alfabeto Σ da fita;
- $o \in \{-1, 0, 1\}$.

Máquina de Turing

No início da execução, a cabeça de LG encontra-se no primeiro símbolo da *string* de entrada (a posição mais à esquerda dos caracteres não-vazios da fita).
Cada instrução ou estado do programa (exceto a última) é da forma:

$$\boxed{\ell : \text{ se } \sigma \text{ então } (\sigma', o, \ell')},$$

- ℓ e ℓ' são números de instruções;
- σ e σ' são símbolos do alfabeto Σ da fita;
- $o \in \{-1, 0, 1\}$.
- O significado da instrução anterior é:
  "Se o símbolo lido na fita de entrada é σ, escreva σ' no seu lugar, mova a cabeça de LG o posições para direita e depois execute a instrução número ℓ'."

Máquina de Turing

A última instrução do programa é:

$$\boxed{t : \texttt{Aceitar}}.$$

A execução finaliza quando a Máquina de Turing alcança a última instrução.
Se a Máquina de Turing está em uma instrução não definida para o símbolo atual σ na fita, a execução trava.

Máquina de Turing

A última instrução do programa é:

$$\boxed{t : \texttt{Aceitar}}.$$

A execução finaliza quando a Máquina de Turing alcança a última instrução.
Se a Máquina de Turing está em uma instrução não definida para o símbolo atual σ na fita, a execução trava.

Curiosamente, no seu artigo original em 1937, Turing imaginou não um mecanismo, mas uma pessoa que executa essas regras determinísticas mecanicamente, a quem ele chama de "computador".

Máquina de Turing

Máquinas moleculares

Máquina de Turing

Máquina de Turing para problemas de decisão:

- Uma cadeia de entrada é dita **aceita** por uma Máquina de Turing em tempo $p(|x|)$ se a última instrução é alcançada depois de no máximo $p(|x|)$ instruções executadas (em particular, $p(n)$ pode ser um polinômio).
- Se a última instrução não é alcançada nesse tempo, ou a execução trava, vamos considerar a cadeia como **rejeitada**.

Máquina de Turing

Máquina de Turing como algoritmo verificador de um problema $\mathcal{NP}$:

- **Lembrando**: O problema de decisão $A \in \mathcal{NP}$ quando A admite um algoritmo verificador de complexidade polinomial.

Máquina de Turing

Máquina de Turing como algoritmo verificador de um problema $\mathcal{NP}$:

- **Lembrando**: O problema de decisão $A \in \mathcal{NP}$ quando A admite um algoritmo verificador de complexidade polinomial.
- $A \in \mathcal{NP}$ se existe uma Máquina de Turing M e um polinômio $p(n)$, tais que:

  x é uma instância `SIM` para A **se e somente se** existe uma cadeia $c(x)$ (um certificado), com $|c(x)| \leq p(|x|)$ (conciso) tal que M **aceita** $x\$c(x)$ usando no máximo $p(|x|)$ instruções.

Resumo

Teorema de Cook

Teorema de Cook

SAT é $\mathcal{NP}$-completo.

Teorema de Cook

Teorema de Cook

SAT é $\mathcal{NP}$-completo.

Esboço da prova:

- **SAT** está em $\mathcal{NP}$ (aula anterior). Precisamos mostrar que **SAT** é $\mathcal{NP}$-difícil.
- **Notação**: $A \in \mathcal{NP}$ é um problema de decisão, x é uma instância de entrada para A, $c(x)$ é um certificado para x, π é um algoritmo verificador para A (MT) contendo t instruções, $p(n)$ é um polinômio que indica a complexidade de π.
- Vamos mostrar que todo problema $A \in \mathcal{NP}$ se reduz polinomialmente a **SAT**.

Teorema de Cook: prova

Como $A \in \mathcal{NP}$, A possui um algoritmo (Máquina de Turing) que verifica, dada a instância x, e algum certificado $c(x)$, se o certificado é válido para x.

Para cada instância `SIM` x de A, precisamos definir uma fórmula $\mathcal{F}$ `SIM` para **SAT**.

Podemos definir as **variáveis booleanas** a seguir:

- $z_{ij\sigma}$ para todo $0 \leq i, j \leq p(|x|)$ e todo $\sigma \in \Sigma$, onde $z_{ij\sigma} = 1$ *se e somente* se no instante i, a j-ésima posição da cadeia na fita de entrada contém o símbolo σ.
- $y_{ij\ell}$ para todo $0 \leq i \leq p(|x|)$, para todo $0 \leq j \leq p(|x|) + 1$ e todo $1 \leq \ell \leq t$, onde $y_{ij\ell} = 1$ se e somente se no instante i, a cabeça de LG está na j-ésima posição da cadeia na fita de entrada e a ℓ-ésima instrução do programa está sendo executada.

Teorema de Cook: prova

A partir da Máquina de Turing correspondente a π com uma entrada da forma $x\$c(x)$, onde x é a instância, vamos construir uma fórmula booleana $\mathcal{F}$ com as variáveis anteriores da forma:

$$\mathcal{F}(z, y) = U(z, y) \cdot S(z, y) \cdot W(z, y) \cdot E(z, y)$$

Teorema de Cook: prova

- Se $U(z, y)$ for verdadeiro, estará garantido que a cada instante de tempo, cada posição da cadeia de entrada contém um único símbolo, que a cabeça de LG estará sobre uma única posição e que o programa executa uma única instrução.

$$
\begin{aligned}
U(z,y) \quad = \quad & \left(\prod_{\substack{0 \le i,j \le p(|x|) \\ \sigma \neq \sigma'}} (\overline{z}_{ij\sigma} + \overline{z}_{ij\sigma'}) \right) \cdot \left(\prod_{\substack{0 \le i \le p(|x|) \\ j \neq j' \text{ ou } \ell \neq \ell'}} (\overline{y}_{ij\ell} + \overline{y}_{ij'\ell'}) \right) \cdot \\
& \left(\prod_{\substack{0 \le i \le p(|x|) \\ 1 \le \ell \le t}} \left(\overline{y}_{i0\ell} \cdot \overline{y}_{i,p(|x|)+1,\ell} \right) \right) \cdot \\
& \left(\prod_{0 \le i \le p(|x|)} \left(\left(\prod_{1 \le j \le p(|x|)} \sum_{\sigma \in \Sigma} z_{ij\sigma} \right) \cdot \sum_{\substack{1 \le j \le p(|x|) \\ 1 \le \ell \le t}} y_{ij\ell} \right) \right)
\end{aligned}
$$

Teorema de Cook: prova

- Se $S(z, y)$ for verdadeiro, estará garantido que a Máquina de Turing está inicializada corretamente. Ou seja: os $|x| + 1$ símbolos mais à esquerda na fita correspondem à codificação de $x\$$, a cabeça de LG está na posição mais à esquerda da fita de entrada, e a primeira instrução do programa a ser executada será a instrução número 1.

$$S(z, y) = (\prod_{j=1}^{|x|} z_{0jx(j)}).z_{0,|x|+1,\$}.y_{011}.$$

Teorema de Cook: prova

- Se $W(z, y)$ for verdadeiro, estará garantido que o algoritmo π realiza corretamente as instruções contidas no programa. Ou seja, ao executar a instrução:

$$\ell : \text{se } \sigma \text{ então } (\sigma', o, \ell'),$$

o símbolo que é gravado na posição corrente é σ' ou permanece inalterado, a cabeça de LG se movimenta para o posições à direita da posição corrente ou fica na mesma posição e a próxima instrução a ser executada é a instrução ℓ' ou a instrução $\ell + 1$. Além disso, deverá ser garantido que, se j é a posição corrente da cabeça de LG, no instante seguinte, todos os símbolos nas demais posições permanecem inalterados.

Teorema de Cook: prova

- $W(z, y)$ é uma conjunção de fórmulas $W_{ij\sigma\ell}$.
  Para cada $0 \leq i \leq p(|x|)$, $1 \leq j \leq p(|x|)$, $\sigma \in \Sigma$, $1 \leq \ell < t$, considere a $\ell^{\underline{a}}$ instrução dada por:

$$\boxed{\ell : \text{ se } \sigma \text{ então } (\sigma', o, \ell')}$$

- A fórmula $W_{ij\sigma\ell}$ para uma instrução intermediária é:

$$W_{ij\sigma\ell}(z, y) = (\overline{z}_{ij\sigma} + \overline{y}_{ij\ell} + z_{i+1,j,\sigma'}) \cdot (\overline{z}_{ij\sigma} + \overline{y}_{ij\ell} + y_{i+1,j+o,\ell'}) \cdot \prod_{\tau \neq \sigma} ((\overline{z}_{ij\tau} + \overline{y}_{ij\ell} + z_{i+1,j,\tau}) \cdot (\overline{z}_{ij\tau} + \overline{y}_{ij\ell} + y_{i+1,j,\ell+1}))$$

Teorema de Cook: prova

- A fórmula $W_{ij\sigma t}$ para a última instrução é:

$$W_{ij\sigma t}(z, y) = (\overline{z}_{ij\sigma} + \overline{y}_{ijt} + y_{i+1,j,t})$$

  Nota: se o algoritmo atinge a instrução t, ele permanece lá.

- Resta garantir que se a cabeça de LG está numa posição diferente de j, esta permanecerá inalterada:

$$\prod_{\substack{0 \le i \le p(|x|) \\ \sigma \in \Sigma, j \neq j' \\ 1 \le \ell \le t}} (\overline{z}_{ij\sigma} + \overline{y}_{ij'\ell} + z_{i+1,j,\sigma})$$

Teorema de Cook: prova

- Se $E(z, y)$ é verdadeiro, estará garantido que t é a última instrução executada pelo algoritmo π. Ou seja:

$$E(z, y) = \sum_{j=1}^{p(|x|)} y_{p(|x|),j,t}$$

Complexidade da construção de $\mathcal{F}$: $O(p^3(|x|) \log p(|x|))$.

Teorema de Cook: prova

$\mathcal{F}(z, y)$ tem resposta SIM para **SAT se e somente se** x tem resposta SIM para A.

Teorema de Cook: prova

$\mathcal{F}(z, y)$ tem resposta SIM para **SAT se e somente se** x tem resposta SIM para A.

- $\mathcal{F}(z, y)$ tem resposta SIM para **SAT**
  $\Rightarrow$ existe uma atribuição de variáveis $z_{ij\sigma}$ e $y_{ij\ell}$ que fazem $\mathcal{F}(z, y)$ ser verdadeira
  $\Rightarrow$ existe uma entrada $x\$c(x)$ que faz a Máquina de Turing finalizar com Aceitar
  $\Rightarrow$ existe um certificado $c(x)$ válido
  $\Rightarrow$ x tem resposta SIM para A.

Teorema de Cook: prova

$\mathcal{F}(z, y)$ tem resposta SIM para **SAT se e somente se** x tem resposta SIM para A.

- $\mathcal{F}(z, y)$ tem resposta SIM para **SAT**
  $\Rightarrow$ existe uma atribuição de variáveis $z_{ij\sigma}$ e $y_{ij\ell}$ que fazem $\mathcal{F}(z, y)$ ser verdadeira
  $\Rightarrow$ existe uma entrada $x\$c(x)$ que faz a Máquina de Turing finalizar com `Aceitar`
  $\Rightarrow$ existe um certificado $c(x)$ válido
  $\Rightarrow$ x tem resposta SIM para A.
- x tem resposta SIM para A
  $\Rightarrow$ existe um certificado $c(x)$ válido
  $\Rightarrow$ existe uma execução da Máquina de Turing que leva à instrução `Aceitar`
  $\Rightarrow$ existe uma atribuição de variáveis $z_{ij\sigma}$ e $y_{ij\ell}$ que fazem $\mathcal{F}(z, y)$ ser verdadeira
  $\Rightarrow$ $\mathcal{F}(z, y)$ tem resposta SIM para **SAT**

Teorema de Cook: consequências

- **SAT** é $\mathcal{NP}$-completo (e $\mathcal{NP}$-difícil).
- Todo problema em $\mathcal{NP}$ pode ser reduzido em tempo polinomial a uma instância do problema **SAT**.

Teorema de Cook: consequências

- **SAT** é $\mathcal{NP}$-completo (e $\mathcal{NP}$-difícil).
- Todo problema em $\mathcal{NP}$ pode ser reduzido em tempo polinomial a uma instância do problema **SAT**.
- Como **SAT** é um problema $\mathcal{NP}$-completo, se existe uma redução polinomial de **SAT** para $A \in \mathcal{NP}$, então A é $\mathcal{NP}$-completo.

Teorema de Cook: consequências

- **SAT** é $\mathcal{NP}$-completo (e $\mathcal{NP}$-difícil).
- Todo problema em $\mathcal{NP}$ pode ser reduzido em tempo polinomial a uma instância do problema **SAT**.
- Como **SAT** é um problema $\mathcal{NP}$-completo, se existe uma redução polinomial de **SAT** para $A \in \mathcal{NP}$, então A é $\mathcal{NP}$-completo.
- A Questão Fundamental da Computação, $\mathcal{P} \stackrel{?}{=} \mathcal{NP}$, agora é equivalente à questão de saber se existe um algoritmo determinístico polinomial para **SAT**, ou para **qualquer um** dos problemas $\mathcal{NP}$-completos.

Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity C.H. Papadimitriou e K. Steiglitz, 1998.
The Design and Analysis of Computer Algorithms. A.V. Aho, J.E. Hopcroft e J.D. Ullman, 1974.

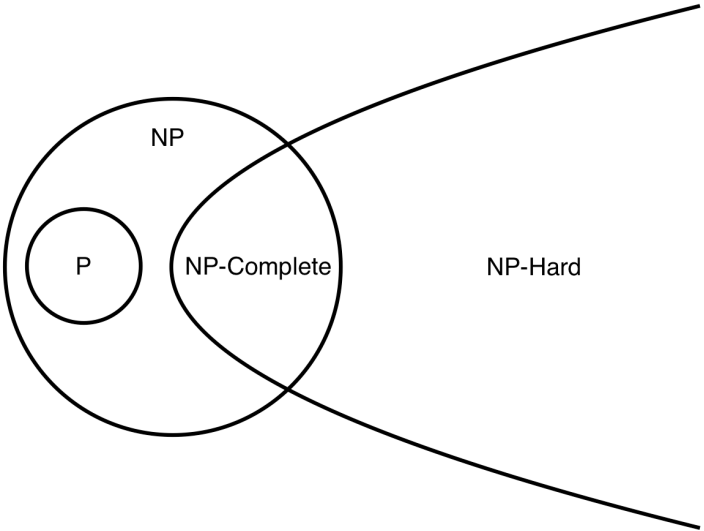
Provas de $\mathcal{NP}$-completude

- Depois que Cook provou que **SAT** é $\mathcal{NP}$-completo, Richard Karp (1972) mostrou que outros 24 problemas famosos também são $\mathcal{NP}$-completos.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude

- Depois que Cook provou que **SAT** é $\mathcal{NP}$-completo, Richard Karp (1972) mostrou que outros 24 problemas famosos também são $\mathcal{NP}$-completos.
- **Lembre-se!** Para provar que um problema A é $\mathcal{NP}$-completo é necessário:
  1. Provar que A é $\mathcal{NP}$;
  2. Provar que A é $\mathcal{NP}$-difícil. Isso geralmente é feito encontrando uma redução polinomial de algum problema $\mathcal{NP}$-difícil (quase sempre $\mathcal{NP}$-completo) para A.

Classes de Problemas: caso $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$



Resumo

Síntese

- Um problema A é $\mathcal{NP}$-difícil se todo problema de $\mathcal{NP}$ se reduz polinomialmente a A.
- Um problema A é $\mathcal{NP}$-completo se $A \in \mathcal{NP}$ e $A \in \mathcal{NP}$-difícil.
- **SAT** é $\mathcal{NP}$-completo.
- Para provar que outro problema A é $\mathcal{NP}$-completo é necessário:
  $\rightarrow$ Provar que A é $\mathcal{NP}$, e
  $\rightarrow$ Encontrar uma redução polinomial de um problema $\mathcal{NP}$-completo para A.

Material bibliográfico e exercícios

U. Manber. Introduction to Algorithms. – **Cap. 11**.

Exercícios: ver exercícios no final do Capítulo 11.

Bibliografia complementar deste tópico:

Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity
C.H. Papadimitriou e K. Steiglitz, Dover, 1982.

The Design and Analysis of Computer Algorithms (cap. 1)
A.V. Aho, J.E. Hopcroft e J.D. Ullman, Addison-Wesley, 1974.

Dúvidas

Dúvidas?