Projeto e Análise de Algoritmos II (MC558)
Classes de Problemas

Prof. Dr. Ruben Interian

Resumo

Resumo

Revisão do conteúdo

- Um problema A é $\mathcal{NP}$-difícil se todo problema de $\mathcal{NP}$ se reduz polinomialmente a A.
- Um problema A é $\mathcal{NP}$-completo se $A \in \mathcal{NP}$ e $A \in \mathcal{NP}$-difícil.
- **SAT** é $\mathcal{NP}$-completo.
- Para provar que outro problema A é $\mathcal{NP}$-completo é necessário:
  $\rightarrow$ Provar que A é $\mathcal{NP}$, e
  $\rightarrow$ Encontrar uma redução polinomial de um problema $\mathcal{NP}$-completo para A.

Objetivo

Responder à pergunta:

- Como identificar um problema complexo? Como mostrar que ele é complexo?
  - "Eu não consigo resolver" não é suficiente!

Resumo

Provas de $\mathcal{NP}$-completude

$\mathcal{NP}$-difícil

A é um problema $\mathcal{NP}$-difícil se todo problema de $\mathcal{NP}$ se reduz polinomialmente a A.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude

$\mathcal{NP}$-difícil

A é um problema $\mathcal{NP}$-difícil se todo problema de $\mathcal{NP}$ se reduz polinomialmente a A.

$\mathcal{NP}$-completo

A é um problema $\mathcal{NP}$-completo (ou A está em $\mathcal{NP}$-completo) se:

1. $A \in \mathcal{NP}$, e
2. $A \in \mathcal{NP}$-difícil.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude

$\mathcal{NP}$-difícil

A é um problema $\mathcal{NP}$-difícil se todo problema de $\mathcal{NP}$ se reduz polinomialmente a A.

$\mathcal{NP}$-completo

A é um problema $\mathcal{NP}$-completo (ou A está em $\mathcal{NP}$-completo) se:

1. $A \in \mathcal{NP}$, e
2. $A \in \mathcal{NP}$-difícil.

- Stephen Cook provou que **SAT** é $\mathcal{NP}$-completo.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude

$\mathcal{NP}$-difícil

A é um problema $\mathcal{NP}$-difícil se todo problema de $\mathcal{NP}$ se reduz polinomialmente a A.

$\mathcal{NP}$-completo

A é um problema $\mathcal{NP}$-completo (ou A está em $\mathcal{NP}$-completo) se:

1. $A \in \mathcal{NP}$, e
2. $A \in \mathcal{NP}$-difícil.

- Stephen Cook provou que **SAT** é $\mathcal{NP}$-completo.
- Dessa forma, a porta foi aberta para provar que outros problemas são $\mathcal{NP}$-completos, mostrando que eles são problemas complexos.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CLI**

Problema do clique (CLI)
Versão de decisão

Dado um grafo não-direcionado $G = (V, E)$, e um valor inteiro k, decidir se G contém uma clique com k vértices.

Teorema

CLI é $\mathcal{NP}$-completo.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CLI**

Problema do clique (CLI)
Versão de decisão

Dado um grafo não-direcionado $G = (V, E)$, e um valor inteiro k, decidir se G contém uma clique com k vértices.

Teorema

CLI é $\mathcal{NP}$-completo.

Precisamos provar que:

- **CLI** $\in \mathcal{NP}$.
- **CLI** $\in \mathcal{NP}$-difícil. Vamos provar isso mostrando que **SAT** $\propto_{\text{poli}}$ **CLI**.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CLI**

Em primeiro lugar, veja que **CLI** $\in \mathcal{NP}$, pois nas aulas anteriores vimos que existe um algoritmo não-determinístico polinomial que resolve **CLI**. ☑

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CLI**

Em primeiro lugar, veja que **CLI** $\in \mathcal{NP}$, pois nas aulas anteriores vimos que existe um algoritmo não-determinístico polinomial que resolve **CLI**. ☑

- Outra forma de mostrar que **CLI** $\in \mathcal{NP}$ é simplesmente dizer:
  *"**CLI** $\in \mathcal{NP}$, pois existe um algoritmo determinístico polinomial que, dado um conjunto de vértices C, verifica, em tempo quadrático no tamanho de C, se eles são uma clique checando se existem todas as arestas entre eles."* ☑

- Aqui estamos usando a definição equivalente de $\mathcal{NP}$ vista na aula anterior:
  $A \in \mathcal{NP}$ se existe um algoritmo verificador determinístico e polinomial para A.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CLI**

Em primeiro lugar, veja que **CLI** $\in \mathcal{NP}$, pois nas aulas anteriores vimos que existe um algoritmo não-determinístico polinomial que resolve **CLI**. ☑

- Outra forma de mostrar que **CLI** $\in \mathcal{NP}$ é simplesmente dizer:
  *"**CLI** $\in \mathcal{NP}$, pois existe um algoritmo determinístico polinomial que, dado um conjunto de vértices C, verifica, em tempo quadrático no tamanho de C, se eles são uma clique checando se existem todas as arestas entre eles."* ☑

- Aqui estamos usando a definição equivalente de $\mathcal{NP}$ vista na aula anterior:
  $A \in \mathcal{NP}$ se existe um algoritmo verificador determinístico e polinomial para A.

Agora precisamos provar que **CLI** $\in \mathcal{NP}$-difícil. Vamos mostrar que **SAT** $\propto_{\text{poli}}$ **CLI**.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CLI**

Definição: Um grafo $G = (V, E)$ é t-partido se o conjunto de vértices pode ser particionado em t subconjuntos $V_1, V_2, \ldots, V_t$ tal que não há arestas em E ligando dois vértices em um mesmo subconjunto V_i, para todo $i \in \{1, \ldots, t\}$.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CLI**

Definição: Um grafo $G = (V, E)$ é t-partido se o conjunto de vértices pode ser particionado em t subconjuntos $V_1, V_2, \ldots, V_t$ tal que não há arestas em E ligando dois vértices em um mesmo subconjunto V_i, para todo $i \in \{1, \ldots, t\}$.

Transformação da instância do **SAT** em uma instância **CLI**.
Seja $\mathcal{F} = C_1 \cdot C_2 \cdot \ldots \cdot C_m$ uma fórmula booleana com as variáveis $x_1, \ldots, x_n$.
Construa o grafo m-partido $G = ((V_1, V_2, \ldots, V_m), E)$ de forma que:

- Em cada subconjunto V_i haverá um vértice v_j associado a cada uma das variáveis x_j que aparecem na cláusula C_i de $\mathcal{F}$;

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CLI**

Definição: Um grafo $G = (V, E)$ é t-partido se o conjunto de vértices pode ser particionado em t subconjuntos $V_1, V_2, \ldots, V_t$ tal que não há arestas em E ligando dois vértices em um mesmo subconjunto V_i, para todo $i \in \{1, \ldots, t\}$.

Transformação da instância do **SAT** em uma instância **CLI**.
Seja $\mathcal{F} = C_1 \cdot C_2 \cdot \ldots \cdot C_m$ uma fórmula booleana com as variáveis $x_1, \ldots, x_n$.
Construa o grafo m-partido $G = ((V_1, V_2, \ldots, V_m), E)$ de forma que:

- Em cada subconjunto V_i haverá um vértice v_j associado a cada uma das variáveis x_j que aparecem na cláusula C_i de $\mathcal{F}$;
- A aresta (v, w) está em E **se e somente se** duas condições são cumpridas:
  1. v e w estão em subconjuntos distintos, e
  2. v e w não representam simultaneamente uma variável e a sua negação.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CLI**

Analisando a **complexidade** da redução:

- A instância do **SAT** possui m cláusulas, cada uma com no máximo n variáveis.
- O número de vértices de G é $O(m \cdot n)$.
- O número de arestas é $O((m \cdot n)^2) = O(m^2 n^2)$.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: CLI

Analisando a **complexidade** da redução:

- A instância do **SAT** possui m cláusulas, cada uma com no máximo n variáveis.
- O número de vértices de G é $O(m \cdot n)$.
- O número de arestas é $O((m \cdot n)^2) = O(m^2 n^2)$.

A instância de **CLI** é: um grafo não-direcionado $G = (V, E)$, e um inteiro k.
Vamos fazer $k = m$.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: CLI

Analisando a **complexidade** da redução:

- A instância do **SAT** possui m cláusulas, cada uma com no máximo n variáveis.
- O número de vértices de G é $O(m \cdot n)$.
- O número de arestas é $O((m \cdot n)^2) = O(m^2 n^2)$.

A instância de **CLI** é: um grafo não-direcionado $G = (V, E)$, e um inteiro k.
Vamos fazer $k = m$.

Temos uma instância de **CLI**:

- De tamanho polinomial no tamanho da entrada de **SAT**.
- Criada em tempo polinomial no tamanho da entrada de **SAT**.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CLI**

Analisando a **complexidade** da redução:

- A instância do **SAT** possui m cláusulas, cada uma com no máximo n variáveis.
- O número de vértices de G é $O(m \cdot n)$.
- O número de arestas é $O((m \cdot n)^2) = O(m^2 n^2)$.

A instância de **CLI** é: um grafo não-direcionado $G = (V, E)$, e um inteiro k.
Vamos fazer $k = m$.

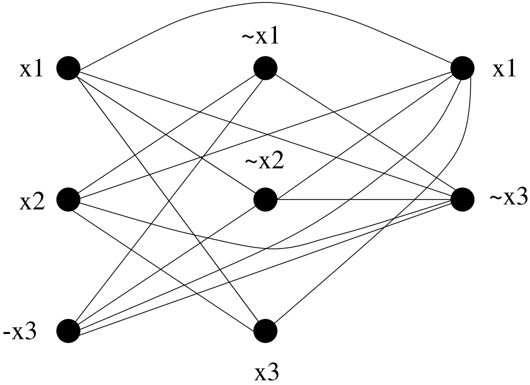
Temos uma instância de **CLI**:

- De tamanho polinomial no tamanho da entrada de **SAT**.
- Criada em tempo polinomial no tamanho da entrada de **SAT**.

Veja que a fórmula $\mathcal{F}$ é satisfeita por alguma atribuição de variáveis se e somente se o grafo m-partido G tem uma clique de tamanho m.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CLI**

Exemplo da redução: Seja $\mathcal{F} = (x_1 + x_2 + \overline{x}_3).(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + x_3).(x_1 + \overline{x}_3)$.
O grafo correspondente à instância de **CLI** é dado por:



Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CLI**

Precisamos **sempre** justificar porque a nossa redução é válida:

A fórmula $\mathcal{F}$ do **SAT** é satisfatível
se e somente se
o grafo m-partido gerado possui uma clique de tamanho m.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CLI**

Precisamos **sempre** justificar porque a nossa redução é válida:

A fórmula $\mathcal{F}$ do **SAT** é satisfatível
se e somente se
o grafo m-partido gerado possui uma clique de tamanho m.

- A fórmula $\mathcal{F}$ do **SAT** é satisfatível
  $\Rightarrow$ para cada cláusula C_i de $\mathcal{F}$ existe uma variável que faz C_i ser verdadeira;

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CLI**

Precisamos **sempre** justificar porque a nossa redução é válida:

A fórmula $\mathcal{F}$ do **SAT** é satisfatível
se e somente se
o grafo m-partido gerado possui uma clique de tamanho m.

- A fórmula $\mathcal{F}$ do **SAT** é satisfatível
  $\Rightarrow$ para cada cláusula C_i de $\mathcal{F}$ existe uma variável que faz C_i ser verdadeira;
  $\Rightarrow$ esse conjunto de m variáveis correspondem a um vértice diferente em cada V_i;

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CLI**

Precisamos **sempre** justificar porque a nossa redução é válida:

A fórmula $\mathcal{F}$ do **SAT** é satisfatível
se e somente se
o grafo m-partido gerado possui uma clique de tamanho m.

- A fórmula $\mathcal{F}$ do **SAT** é satisfatível
  $\Rightarrow$ para cada cláusula C_i de $\mathcal{F}$ existe uma variável que faz C_i ser verdadeira;
  $\Rightarrow$ esse conjunto de m variáveis correspondem a um vértice diferente em cada V_i;
  $\Rightarrow$ nesse conjunto, não há duas variáveis que sejam uma negação da outra;

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CLI**

Precisamos **sempre** justificar porque a nossa redução é válida:

A fórmula $\mathcal{F}$ do **SAT** é satisfatível
se e somente se
o grafo m-partido gerado possui uma clique de tamanho m.

- A fórmula $\mathcal{F}$ do **SAT** é satisfatível
  $\Rightarrow$ para cada cláusula C_i de $\mathcal{F}$ existe uma variável que faz C_i ser verdadeira;
  $\Rightarrow$ esse conjunto de m variáveis correspondem a um vértice diferente em cada V_i;
  $\Rightarrow$ nesse conjunto, não há duas variáveis que sejam uma negação da outra;
  $\Rightarrow$ todos os m vértices correspondentes às m variáveis estão ligados por arestas;

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CLI**

Precisamos **sempre** justificar porque a nossa redução é válida:

A fórmula $\mathcal{F}$ do **SAT** é satisfatível
se e somente se
o grafo m-partido gerado possui uma clique de tamanho m.

- A fórmula $\mathcal{F}$ do **SAT** é satisfatível
  $\Rightarrow$ para cada cláusula C_i de $\mathcal{F}$ existe uma variável que faz C_i ser verdadeira;
  $\Rightarrow$ esse conjunto de m variáveis correspondem a um vértice diferente em cada V_i;
  $\Rightarrow$ nesse conjunto, não há duas variáveis que sejam uma negação da outra;
  $\Rightarrow$ todos os m vértices correspondentes às m variáveis estão ligados por arestas;
  $\Rightarrow$ este conjunto de m vértices é uma clique de tamanho m.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CLI**

Precisamos **sempre** justificar porque a nossa redução **é válida**:

A fórmula $\mathcal{F}$ do **SAT** é satisfatível
se e somente se
o grafo m-partido gerado possui uma clique de tamanho m.

- O grafo m-partido gerado possui uma clique de tamanho m
  $\Rightarrow$ os m vértices da clique estão ligados por arestas;

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CLI**

Precisamos **sempre** justificar porque a nossa redução **é válida**:

A fórmula $\mathcal{F}$ do **SAT** é satisfatível
se e somente se
o grafo m-partido gerado possui uma clique de tamanho m.

- O grafo m-partido gerado possui uma clique de tamanho m
  $\Rightarrow$ os m vértices da clique estão ligados por arestas;
  $\Rightarrow$ cada vértice da clique está em um conjunto V_i diferente pois G é m-partido;

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CLI**

Precisamos **sempre** justificar porque a nossa redução **é válida**:

A fórmula $\mathcal{F}$ do **SAT** é satisfatível
se e somente se
o grafo m-partido gerado possui uma clique de tamanho m.

- O grafo m-partido gerado possui uma clique de tamanho m
  $\Rightarrow$ os m vértices da clique estão ligados por arestas;
  $\Rightarrow$ cada vértice da clique está em um conjunto V_i diferente pois G é m-partido;
  $\Rightarrow$ nenhum par de vértices da clique foi gerado a partir de variáveis de $\mathcal{F}$ que sejam uma negação da outra, pois nesse caso não haveria aresta;

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CLI**

Precisamos **sempre** justificar porque a nossa redução **é válida**:

A fórmula $\mathcal{F}$ do **SAT** é satisfatível
se e somente se
o grafo m-partido gerado possui uma clique de tamanho m.

- O grafo m-partido gerado possui uma clique de tamanho m
  $\Rightarrow$ os m vértices da clique estão ligados por arestas;
  $\Rightarrow$ cada vértice da clique está em um conjunto V_i diferente pois G é m-partido;
  $\Rightarrow$ nenhum par de vértices da clique foi gerado a partir de variáveis de $\mathcal{F}$ que sejam uma negação da outra, pois nesse caso não haveria aresta;
  $\Rightarrow$ em cada C_i, se $v_j \in V_i$ é escolhido, podemos atribuir 1 à variável x_j, e 0 a $\overline{x_j}$;

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CLI**

Precisamos **sempre** justificar porque a nossa redução **é válida**:

A fórmula $\mathcal{F}$ do **SAT** é satisfatível
se e somente se
o grafo m-partido gerado possui uma clique de tamanho m.

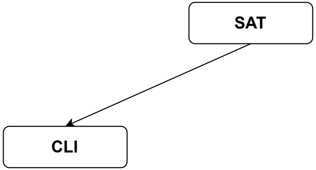
- O grafo m-partido gerado possui uma clique de tamanho m
  $\Rightarrow$ os m vértices da clique estão ligados por arestas;
  $\Rightarrow$ cada vértice da clique está em um conjunto V_i diferente pois G é m-partido;
  $\Rightarrow$ nenhum par de vértices da clique foi gerado a partir de variáveis de $\mathcal{F}$ que sejam uma negação da outra, pois nesse caso não haveria aresta;
  $\Rightarrow$ em cada C_i, se $v_j \in V_i$ é escolhido, podemos atribuir 1 à variável x_j, e 0 a $\overline{x_j}$;
  $\Rightarrow$ a fórmula $\mathcal{F}$ do **SAT** é satisfatível.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude

Resumo: "algoritmo" de como provar, **na prática**, a $\mathcal{NP}$-completude de um problema A:

- $A \in \mathcal{NP}$: mostrar que $\exists$ algoritmo verificador determinístico polinomial para A.
- $A \in \mathcal{NP}$-difícil: apresentar uma redução de um problema $\mathcal{NP}$-completo para A:
  - **Escolher** um problema adequado B que seja $\mathcal{NP}$-completo.
  - Apresentar um **algoritmo da redução** de B para A.
  - Justificar porque a redução apresentada **é válida**. Ou seja, mostrar que:
    - Se temos uma instância `SIM` para B, geramos uma instância `SIM` para A.
    - Se a instância gerada é `SIM` para A, ela é gerada a partir de uma instância `SIM` para B.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: nosso estado da arte



Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **PLI**

Problema de Programação Linear Inteira (PLI)
Versão de decisão

Entrada: matriz $A_{m \times n}$, vetor $b \in \mathbb{R}^m$, vetor $c \in \mathbb{R}^n$, valor real K.

Objetivo: encontrar valores para as variáveis inteiras não negativas $x_1, x_2, \dots, x_n = x$ tais que $c^T x \leq K$, respeitando às restrições $Ax \leq b$.

$$c^T x \leq K,$$
$$Ax \leq b, x \geq 0$$

Teorema

PLI é $\mathcal{NP}$-completo.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **PLI**

Precisamos provar que:

- **PLI** $\in \mathcal{NP}$. Existe um algoritmo verificador determinístico para **PLI**: dado um **certificado conciso** (o valor de cada variável), é suficiente checar em tempo linear se cada restrição é cumprida. ☑

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **PLI**

Precisamos provar que:

- **PLI** $\in \mathcal{NP}$. Existe um algoritmo verificador determinístico para **PLI**: dado um **certificado conciso** (o valor de cada variável), é suficiente checar em tempo linear se cada restrição é cumprida. ☑
- **PLI** $\in \mathcal{NP}$-difícil.
  - A partir de qual problema faremos a redução? Temos duas opções: **SAT** e **CLI**.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **PLI**

Precisamos provar que:

- **PLI** $\in \mathcal{NP}$. Existe um algoritmo verificador determinístico para **PLI**: dado um **certificado conciso** (o valor de cada variável), é suficiente checar em tempo linear se cada restrição é cumprida. ☑
- **PLI** $\in \mathcal{NP}$-difícil.
  - A partir de qual problema faremos a redução?
    Temos duas opções: **SAT** e **CLI**.

Vamos provar que **PLI** $\in \mathcal{NP}$-difícil mostrando que **SAT** $\propto_{\text{poli}}$ **PLI**.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **PLI**

Transformação da instância do **SAT** em uma instância **PLI**.
Seja $\mathcal{F} = C_1 \cdot C_2 \cdot \ldots \cdot C_m$ uma fórmula booleana com as variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

A instância de **PLI** terá as variáveis y_i, a mesma quantidade de variáveis da instância do **SAT**. Vamos construir um conjunto de restrições do problema de **PLI**:

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **PLI**

Transformação da instância do **SAT** em uma instância **PLI**.
Seja $\mathcal{F} = C_1 \cdot C_2 \cdot \ldots \cdot C_m$ uma fórmula booleana com as variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

A instância de **PLI** terá as variáveis y_i, a mesma quantidade de variáveis da instância do **SAT**. Vamos construir um conjunto de restrições do problema de **PLI**:

- Para cada cláusula $C_i = x_a + x_b + \ldots$, criaremos a restrição $\sum_{i=1}^{|C_i|} p_i \geq 1$:
  - $p_i = y_a$ se a variável x_a aparece não negada em C_i, e
  - $p_i = 1 - y_a$ se a variável x_a aparece negada em C_i.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **PLI**

Transformação da instância do **SAT** em uma instância **PLI**.
Seja $\mathcal{F} = C_1 \cdot C_2 \cdot \ldots \cdot C_m$ uma fórmula booleana com as variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

A instância de **PLI** terá as variáveis y_i, a mesma quantidade de variáveis da instância do **SAT**. Vamos construir um conjunto de restrições do problema de **PLI**:

- Para cada cláusula $C_i = x_a + x_b + \ldots$, criaremos a restrição $\sum_{i=1}^{|C_i|} p_i \geq 1$:
    - $p_i = y_a$ se a variável x_a aparece não negada em C_i, e
    - $p_i = 1 - y_a$ se a variável x_a aparece negada em C_i.
    - **Exemplo**: $x_1 \vee \overline{x_3} \vee x_7 \Rightarrow y_1 + (1 - y_3) + y_7 \geq 1$.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: PLI

Transformação da instância do **SAT** em uma instância **PLI**.
Seja $\mathcal{F} = C_1 \cdot C_2 \cdot \ldots \cdot C_m$ uma fórmula booleana com as variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

A instância de **PLI** terá as variáveis y_i, a mesma quantidade de variáveis da instância do **SAT**. Vamos construir um conjunto de restrições do problema de **PLI**:

- Para cada cláusula $C_i = x_a + x_b + \ldots$, criaremos a restrição $\sum_{i=1}^{|C_i|} p_i \geq 1$:
  - $p_i = y_a$ se a variável x_a aparece não negada em C_i, e
  - $p_i = 1 - y_a$ se a variável x_a aparece negada em C_i.
  - **Exemplo**: $x_1 \vee \overline{x_3} \vee x_7 \Rightarrow y_1 + (1 - y_3) + y_7 \geq 1$.
- Além disso, para cada variável x_i do **SAT**, criaremos uma restrição $y_i \leq 1$.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **PLI**

Transformação da instância do **SAT** em uma instância **PLI**.
Seja $\mathcal{F} = C_1 \cdot C_2 \cdot \ldots \cdot C_m$ uma fórmula booleana com as variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

A instância de **PLI** terá as variáveis y_i, a mesma quantidade de variáveis da instância do **SAT**. Vamos construir um conjunto de restrições do problema de **PLI**:

- Para cada cláusula $C_i = x_a + x_b + \ldots$, criaremos a restrição $\sum_{i=1}^{|C_i|} p_i \geq 1$:
    - $p_i = y_a$ se a variável x_a aparece não negada em C_i, e
    - $p_i = 1 - y_a$ se a variável x_a aparece negada em C_i.
    - **Exemplo**: $x_1 \vee \overline{x_3} \vee x_7 \Rightarrow y_1 + (1 - y_3) + y_7 \geq 1$.
- Além disso, para cada variável x_i do **SAT**, criaremos uma restrição $y_i \leq 1$.
- Criaremos as restrições de não-negatividade $y_i \geq 0$.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: PLI

Transformação da instância do **SAT** em uma instância **PLI**.
Seja $\mathcal{F} = C_1 \cdot C_2 \cdot \ldots \cdot C_m$ uma fórmula booleana com as variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

A instância de **PLI** terá as variáveis y_i, a mesma quantidade de variáveis da instância do **SAT**. Vamos construir um conjunto de restrições do problema de **PLI**:

- Para cada cláusula $C_i = x_a + x_b + \ldots$, criaremos a restrição $\sum_{i=1}^{|C_i|} p_i \geq 1$:
  - $p_i = y_a$ se a variável x_a aparece não negada em C_i, e
  - $p_i = 1 - y_a$ se a variável x_a aparece negada em C_i.
  - **Exemplo**: $x_1 \vee \overline{x_3} \vee x_7 \Rightarrow y_1 + (1 - y_3) + y_7 \geq 1$.
- Além disso, para cada variável x_i do **SAT**, criaremos uma restrição $y_i \leq 1$.
- Criaremos as restrições de não-negatividade $y_i \geq 0$.

A redução é claramente polinomial no tamanho da entrada do **SAT**.

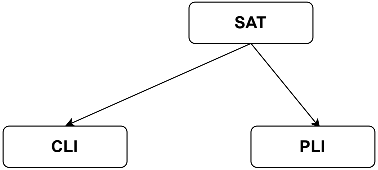
Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **PLI**

A fórmula $\mathcal{F}$ do **SAT** é satisfatível
se e somente se
a formulação de **PLI** gerada possui uma solução.

Exercício: Justificar porque a redução apresentada **é válida**. Ou seja, mostrar que:

- Se temos uma instância `SIM` para **SAT**, geramos uma instância `SIM` para **PLI**.
- Se a instância gerada é `SIM` para **PLI**, ela é gerada de instância `SIM` para **SAT**.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: nosso estado da arte



Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **IND**

Problema do conjunto independente (IND)
Versão de decisão

Dado um grafo não-direcionado $G = (V, E)$, e um valor inteiro k, decidir se G contém um conjunto independente com k vértices.

Lembrando: Um conjunto independente é conjunto de vértices $S \subseteq V$ tal que não existem dois vértices adjacentes contidos em S.

Teorema

IND é $\mathcal{NP}$-completo.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **IND**

- **IND** $\in \mathcal{NP}$, pois existe um algoritmo determinístico que, dado um conjunto de vértices C de um grafo, verifica, em tempo polinomial, se eles são um conjunto independente checando se não há nenhuma aresta entre eles. ☑

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **IND**

- **IND** $\in \mathcal{NP}$, pois existe um algoritmo determinístico que, dado um conjunto de vértices C de um grafo, verifica, em tempo polinomial, se eles são um conjunto independente checando se não há nenhuma aresta entre eles. ☑
- **IND** $\in \mathcal{NP}$-difícil.
  - A partir de qual problema faremos a redução?
    Temos três opções: **SAT**, **CLI** e **PLI**.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **IND**

- **IND** $\in \mathcal{NP}$, pois existe um algoritmo determinístico que, dado um conjunto de vértices C de um grafo, verifica, em tempo polinomial, se eles são um conjunto independente checando se não há nenhuma aresta entre eles. ☑
- **IND** $\in \mathcal{NP}$-difícil.
  - A partir de qual problema faremos a redução?
    Temos três opções: **SAT**, **CLI** e **PLI**.

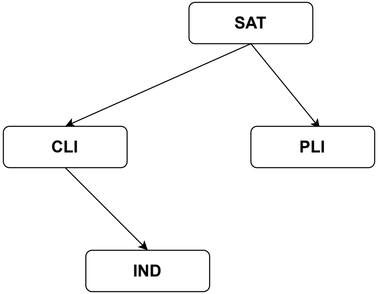
Vamos provar que **PLI** $\in \mathcal{NP}$-difícil mostrando que **CLI** $\propto_{\text{poli}}$ **IND**.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: IND

Transformação da instância do **CLI** em uma instância do **IND**.
Seja $G = (V, E)$, k uma instância do **CLI**. Construa uma instância do **IND** formada pelo grafo complementar $\overline{G} = (V, \overline{E})$, e o mesmo inteiro k.

- **Lembrando**: as arestas em $\overline{G}$ são as "inversas": $e \notin \overline{E}$ se e somente se $e \in E$.
- A redução é **polinomial**.
- A redução é **válida**: G, k é SIM para **CLI** $\Leftrightarrow$ $\overline{G}$, k é SIM para **IND**.
  - $\Rightarrow$ Se há uma clique S de tamanho k em G, S será um conjunto independente de tamanho k em $\overline{G}$, pois $e \in E \Rightarrow e \notin \overline{E}$.
  - $\Leftarrow$ Se há um conjunto independente S de tamanho k em $\overline{G}$, S é uma clique de tamanho k em G, pois $e \notin \overline{E} \Rightarrow e \in E$.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: nosso estado da arte



Provas de $\mathcal{NP}$-completude: CV

Problema da cobertura de vértices (CV)
Versão de decisão

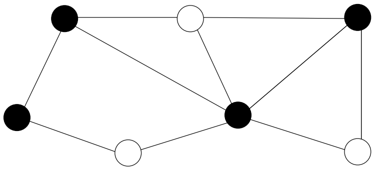
Dado um grafo não-direcionado $G = (V, E)$, e um valor inteiro k, decidir se G contém uma cobertura de vértices com k vértices.

Definição: Uma cobertura de vértices em um grafo $G = (V, E)$ é um conjunto de vértices $S \subseteq V$ tal que toda aresta de E tem pelo menos um dos seus extremos em S.

Teorema

CV é $\mathcal{NP}$-completo.

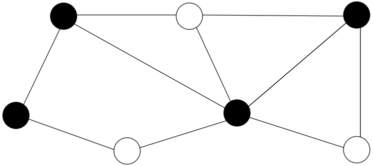
Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CV**



Observações e **interpretação**:

- Encontrar uma cobertura de vértices bem grande é fácil (V é uma cobertura). Difícil é encontrar uma cobertura com poucos vértices.
- Encontrar uma clique bem pequena é fácil: qualquer vértice é uma clique de tamanho 1, e os extremos de qualquer aresta formam uma clique de tamanho 2.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CV**



Observações e **interpretação**:

- Encontrar uma cobertura de vértices bem grande é fácil (V é uma cobertura). Difícil é encontrar uma cobertura com poucos vértices.
- Encontrar uma clique bem pequena é fácil: qualquer vértice é uma clique de tamanho 1, e os extremos de qualquer aresta formam uma clique de tamanho 2.
- **CV**: geralmente temos interesse na menor cobertura (**CV** mínima).
- **CLI**: geralmente temos interesse na maior clique (**CLI** máxima).

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CV**

- **CV** $\in \mathcal{NP}$, pois existe um algoritmo determinístico que, dado uma conjunto de vértices S de um grafo, verifica, em tempo polinomial, se eles são uma cobertura de vértices checando se cada aresta tem pelo menos um extremo em S. ☑

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CV**

- **CV** $\in \mathcal{NP}$, pois existe um algoritmo determinístico que, dado uma conjunto de vértices S de um grafo, verifica, em tempo polinomial, se eles são uma cobertura de vértices checando se cada aresta tem pelo menos um extremo em S. ☑
- **CV** $\in \mathcal{NP}$-difícil.
  - A partir de qual problema faremos a redução? Temos diversas opções!

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CV**

- **CV** $\in \mathcal{NP}$, pois existe um algoritmo determinístico que, dado uma conjunto de vértices S de um grafo, verifica, em tempo polinomial, se eles são uma cobertura de vértices checando se cada aresta tem pelo menos um extremo em S. ☑
- **CV** $\in \mathcal{NP}$-difícil.
  - A partir de qual problema faremos a redução? Temos diversas opções!

Vamos provar que **CV** $\in \mathcal{NP}$-difícil mostrando que **CLI** $\propto_{\text{poli}}$ **CV**.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CV**

Atenção! Para algumas pessoas, esta parte da prova pode parecer confusa!

Transformação da instância do **CLI** em uma instância **CV**.
Seja $G = (V, E)$, k uma instância do **CLI**. Construa uma instância do **CV** formada pelo grafo complementar $\overline{G} = (V, \overline{E})$, e um inteiro (**diferente!**) $n - k$, onde $n = |V|$.

- A redução é **polinomial**.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CV**

Atenção! Para algumas pessoas, esta parte da prova pode parecer confusa!

Transformação da instância do **CLI** em uma instância **CV**.
Seja $G = (V, E)$, k uma instância do **CLI**. Construa uma instância do **CV** formada pelo grafo complementar $\overline{G} = (V, \overline{E})$, e um inteiro (**diferente!**) $n - k$, onde $n = |V|$.

- A redução é **polinomial**.
- A redução é **válida**? Ou seja:

G, k é SIM para **CLI** $\Leftrightarrow$ $\overline{G}$, $n - k$ é SIM para **CV**?

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CV**

A redução **CLI** $\propto_{\text{poli}}$ **CV** é válida. É possível mostrar que G, k é uma instância `SIM` de **CLI** se e somente se $\overline{G}$, $n - k$ é uma instância `SIM` de **CV**.

Proposição

O grafo G tem uma clique de tamanho k se e somente se o grafo complementar $\overline{G}$ tem uma cobertura de tamanho $n - k$.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CV**

A redução **CLI** $\propto_{\text{poli}}$ **CV** é válida. É possível mostrar que G, k é uma instância `SIM` de **CLI** se e somente se $\overline{G}$, $n - k$ é uma instância `SIM` de **CV**.

Proposição

O grafo G tem uma clique de tamanho k se e somente se o grafo complementar $\overline{G}$ tem uma cobertura de tamanho $n - k$.

Vamos mostrar que:

S é uma clique de tamanho k em $G \Longleftrightarrow V - S$ é uma CV de tamanho $n - k$ em $\overline{G}$.

Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CV**

- G tem uma clique de tamanho k

  $\Rightarrow$ Existe um conjunto S de k vértices que é uma clique em G

  $\Rightarrow$ Todas as arestas entre vértices de S estão em G

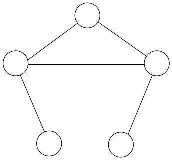
  $\Rightarrow$ Nenhuma das arestas com ambos os extremos em S, estão em $\overline{G}$

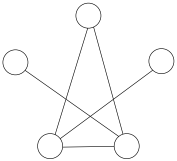
  $\Rightarrow$ As arestas em $\overline{G}$ possuem pelo menos um extremo em $V - S$

  $\Rightarrow$ $V - S$ é uma cobertura de vértices de tamanho $n - k$ em $\overline{G}$.

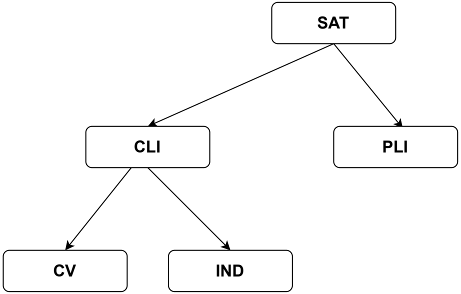
Provas de $\mathcal{NP}$-completude: **CV**

- Existe uma cobertura de vértices S' de tamanho $n - k$ em $\overline{G}$
  $\Rightarrow$ Todas as arestas em $\overline{G}$ possuem pelo menos um extremo em S'
  $\Rightarrow$ Não há nenhuma aresta em $\overline{G}$ com ambos os extremos em $V - S'$
  $\Rightarrow$ Todas as arestas entre vértices de $V - S'$ estão em G
  $\Rightarrow$ Existe um conjunto $V - S'$ de $n - (n - k)$ vértices que é uma clique em G
  $\Rightarrow$ G tem uma clique de tamanho k.





Provas de $\mathcal{NP}$-completude: nosso estado da arte



Resumo

A classe co-$\mathcal{NP}$

Veja alguns **exemplos de problemas** "diferentes":

Problema UnSAT

Dado uma fórmula lógica $\mathcal{F}$ *com* n *variáveis na forma normal conjuntiva, decidir se* **não** *existe uma atribuição das variáveis* $x_1, \ldots, x_n$ *para a qual* $\mathcal{F} = 1$.

A classe co-$\mathcal{NP}$

Veja alguns **exemplos de problemas** "diferentes":

Problema UnSAT

Dado uma fórmula lógica $\mathcal{F}$ com n variáveis na forma normal conjuntiva, decidir se **não** *existe uma atribuição das variáveis $x_1, \ldots, x_n$ para a qual $\mathcal{F} = 1$.*

Problema No-CLI

Dado um grafo não-direcionado $G = (V, E)$, e um valor inteiro k, decidir se G **não** *contém uma clique com k vértices.*

Será que **UnSAT** e **No-CLI** estão em $\mathcal{NP}$?...

A classe co-$\mathcal{NP}$

Veja alguns **exemplos de problemas** "diferentes":

Problema UnSAT

Dado uma fórmula lógica $\mathcal{F}$ com n variáveis na forma normal conjuntiva, decidir se **não** *existe uma atribuição das variáveis $x_1, \ldots, x_n$ para a qual $\mathcal{F} = 1$.*

Problema No-CLI

Dado um grafo não-direcionado $G = (V, E)$, e um valor inteiro k, decidir se G **não** *contém uma clique com k vértices.*

Será que **UnSAT** e **No-CLI** estão em $\mathcal{NP}$?...
Será que existe um **certificado conciso** (polinomial) para esses problemas?...

A classe co-$\mathcal{NP}$

Os problemas **UnSAT** e **No-CLI** apresentados possuem a característica a seguir:

- Uma instância `SIM` do **UnSAT** (**No-CLI**) é instância `NÃO` do **SAT** (**CLI**);
- Uma instância `NÃO` do **UnSAT** (**No-CLI**) é instância instância `SIM` do **SAT** (**CLI**).

Complemento de um problema

O complemento de um problema de decisão A é o problema $\overline{A}$ cujas instâncias `SIM` são as instâncias `NÃO` de A e vice-versa.

A classe co-$\mathcal{NP}$

co-$\mathcal{NP}$

Um problema A é da classe co-$\mathcal{NP}$ se seu complemento $\overline{A}$ é um problema $\mathcal{NP}$.

Definição equivalente: co-$\mathcal{NP}$ é a classe de problemas de decisão que possuem um verificador polinomial para instâncias `NÃO`.

A classe co-$\mathcal{NP}$

Outro exemplo:

AGM: *Dado um grafo* $G = (V, E)$, *com pesos* w_e *para cada* $e \in E$, *existe uma árvore geradora em* G *com peso* $\leq W$?

$\overline{\textbf{AGM}}$: *Dado um grafo* $G = (V, E)$, *com pesos* w_e *para cada* $e \in E$, *toda árvore geradora em* G *tem peso* $> W$?

A classe co-$\mathcal{NP}$

Outro exemplo:

AGM: *Dado um grafo* $G = (V, E)$, *com pesos* w_e *para cada* $e \in E$, *existe uma árvore geradora em* G *com peso* $\leq W$?

$\overline{\textbf{AGM}}$: *Dado um grafo* $G = (V, E)$, *com pesos* w_e *para cada* $e \in E$, *toda árvore geradora em* G *tem peso* $> W$?

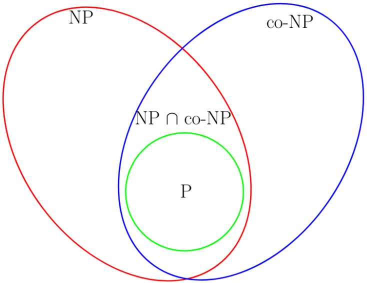
Teorema

Se $A \in \mathcal{P}$, então $\overline{A} \in \mathcal{P}$.

A classe co-$\mathcal{NP}$

Outra **questão fundamental**: co-$\mathcal{NP} = \mathcal{NP}$?

- A maioria dos cientistas acredita que co-$\mathcal{NP} \neq \mathcal{NP}$.
- Se $X \in \mathcal{NP}$-completo e $\overline{X} \in \mathcal{NP}$ então co-$\mathcal{NP} = \mathcal{NP}$.
  De novo, os problemas $\mathcal{NP}$-completos parecem ser a chave da questão.
- Não há consenso se $P = (\mathcal{NP} \cap$ co-$\mathcal{NP})$.



Resumo

Síntese

- É possível mostrar a $\mathcal{NP}$-completude de diversos problemas que achávamos complexos.
- Estes resultados provam que é duvidosa a existência de algoritmos eficientes para esses problemas.

Material bibliográfico e exercícios

U. Manber. Introduction to Algorithms. – **Cap. 11**.

Exercícios: ver exercícios no final do Capítulo 11.

Bibliografia complementar:

Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity
C.H. Papadimitriou e K. Steiglitz, Dover, 1982.

The Design and Analysis of Computer Algorithms
A.V. Aho, J.E. Hopcroft e J.D. Ullman, Addison-Wesley, 1974.

Dúvidas

Dúvidas?