

# Projeto e Análise de Algoritmos II (MC558)

## Grafos: Árvores

Prof. Dr. Ruben Interian

# Resumo

- 1 Revisão do conteúdo e objetivo
- 2 Cortes
- 3 Árvores
- 4 Síntese

# Resumo

- 1 Revisão do conteúdo e objetivo
- 2 Cortes
- 3 Árvores
- 4 Síntese

# Revisão do conteúdo

- Grafo  $G = (V, E)$  é **conexo**:  $\forall u, v \in V \exists$  **um caminho** de  $u$  a  $v$  em  $G$ .
- **Componentes conexas** de um grafo  $G$ : subgrafos **conexos maximais**.
- Subgrafo  $H = (V', E')$  é um **subgrafo gerador** de  $G = (V, E)$  se  $V' = V$ .

# Objetivos

Tópicos de hoje:

- **Cortes** e arestas-de-corte.
- **Árvores**.

# Resumo

- 1 Revisão do conteúdo e objetivo
- 2 Cortes
- 3 Árvores
- 4 Síntese

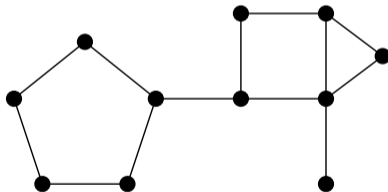
# Número de componentes

Seja  $c(G)$  o **número de componentes** de um grafo  $G$ .

# Número de componentes

Seja  $c(G)$  o **número de componentes** de um grafo  $G$ .

Seja  $G = (V, E)$  um grafo, e seja  $e \in E$ . Então  $c(G) \leq c(G - e) \leq c(G) + 1$ .





# Número de componentes

Seja  $c(G)$  o **número de componentes** de um grafo  $G$ .

Seja  $G = (V, E)$  um grafo, e seja  $e \in E$ . Então  $c(G) \leq c(G - e) \leq c(G) + 1$ .

**Prova:** Temos duas opções. Ou  $c(G - e) = c(G)$ , ou  $c(G - e) > c(G)$ .

Se  $c(G - e) = c(G)$ , o resultado é válido.

Se  $c(G - e) > c(G)$ , ao recolocar a aresta  $e$  no grafo  $G - e$ , o número de componentes diminui de volta ao valor  $c(G)$ . Assim, existem as componentes  $C_1$  e  $C_2$  de  $G - e$ , cada uma contendo um extremo de  $e$  e  $c(G - e) = c(G) + 1$ .



# Aresta-de-corte

## Definição

Seja  $G = (V, E)$  um grafo, e seja  $e \in E$ . Se  $c(G - e) = c(G) + 1$ , a aresta  $e$  é uma **aresta-de-corte** (ou **ponte**) de  $G$ .

- Se  $G$  é conexo, dizemos que a remoção de  $e$  **desconecta**  $G$ .

# Aresta-de-corte

**Podemos caracterizar uma [aresta-de-corte](#)?**

= Encontrar uma condição necessária e suficiente para uma aresta ser aresta-de-corte?

# Aresta-de-corte

**Podemos caracterizar uma **aresta-de-corte**?**

= Encontrar uma condição necessária e suficiente para uma aresta ser aresta-de-corte?

## Caracterização das arestas-de-corte

Seja  $G = (V, E)$  um grafo, e seja  $e \in E$ . A aresta  $e$  é uma **aresta-de-corte** de  $G$  se e somente se  $e$  não pertence a nenhum ciclo de  $G$ .

# Aresta-de-corte

## Caracterização das arestas-de-corte

Seja  $G = (V, E)$  um grafo, e seja  $e \in E$ . A aresta  $e$  é uma aresta-de-corte de  $G$  se e somente se  $e$  não pertence a nenhum ciclo de  $G$ .

### Prova:

- Podemos supor que  $G$  é conexo. (Por quê?)

# Aresta-de-corte

## Caracterização das arestas-de-corte

Seja  $G = (V, E)$  um grafo, e seja  $e \in E$ . A aresta  $e$  é uma aresta-de-corte de  $G$  se e somente se  $e$  não pertence a nenhum ciclo de  $G$ .

### Prova:

- Podemos supor que  $G$  é conexo. (Por quê?)
- $\Rightarrow$  Seja  $e = (u, v)$  uma aresta-de-corte,  $u$  e  $v$  pertencem a componentes distintos de  $G - e$ . Se  $e$  pertencesse a um ciclo  $C$  de  $G$ , então  $C - e$  seria um caminho de  $u$  a  $v$  em  $G - e$  (**contradição!**).

# Aresta-de-corte

## Caracterização das arestas-de-corte

Seja  $G = (V, E)$  um grafo, e seja  $e \in E$ . A aresta  $e$  é uma aresta-de-corte de  $G$  se e somente se  $e$  não pertence a nenhum ciclo de  $G$ .

### Prova:

- Podemos supor que  $G$  é conexo. (Por quê?)
- $\Rightarrow$  Seja  $e = (u, v)$  uma aresta-de-corte,  $u$  e  $v$  pertencem a componentes distintos de  $G - e$ . Se  $e$  pertencesse a um ciclo  $C$  de  $G$ , então  $C - e$  seria um caminho de  $u$  a  $v$  em  $G - e$  (**contradição!**).
- $\Leftarrow$  Vamos provar a **contraposição**:  $e$  não é aresta-de-corte  $\Rightarrow e \in$  um ciclo. Suponha que  $e = (u, v)$  não é uma aresta-de-corte. Então  $G - e$  é conexo e existe um caminho  $P$  de  $u$  a  $v$  em  $G - e$ . Então  $P + e$  é um ciclo em  $G$ . ■

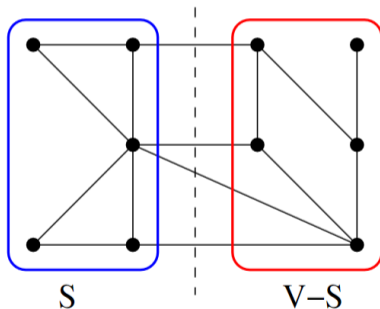
# Corte

Seja  $G = (V, E)$  um grafo e  $S \subset V$ ,  $S \neq \emptyset$ . Denotamos por  $\delta(S)$  o conjunto das arestas de  $G$  com um extremo em  $S$  e outro em  $V - S$ .



# Corte

Seja  $G = (V, E)$  um grafo e  $S \subset V$ ,  $S \neq \emptyset$ . Denotamos por  $\delta(S)$  o conjunto das arestas de  $G$  com um extremo em  $S$  e outro em  $V - S$ .



Quando  $S$  consiste de um único vértice  $v$ , escrevemos  $\delta(v)$  em vez de  $\delta(\{v\})$ .  
Dizemos que  $\delta(S)$  é um corte de  $G$  induzido por  $S$ .

# Resumo

- 1 Revisão do conteúdo e objetivo
- 2 Cortes
- 3 Árvores**
- 4 Síntese

# Árvores



# Árvores

## Grafo acíclico

Um grafo  $G$  é **acíclico** se ele não contém ciclos.

# Árvores

## Grafo acíclico

Um grafo  $G$  é **acíclico** se ele não contém ciclos.

## Árvore

Uma **árvore** é um **grafo conexo** e **acíclico**.

# Árvores

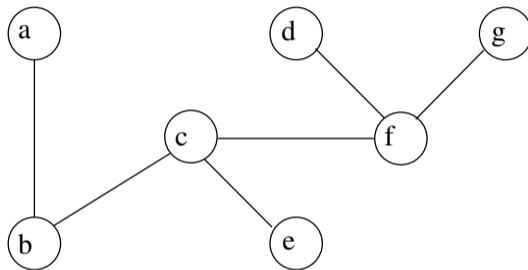


Figura: Exemplo de uma árvore.

# Árvores

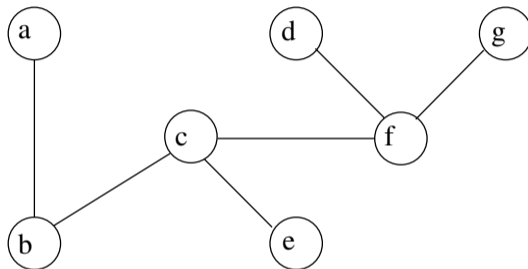


Figura: Exemplo de uma árvore.

- Uma **folha** de uma árvore  $G$  é um **vértice de grau 1**.

# Árvores

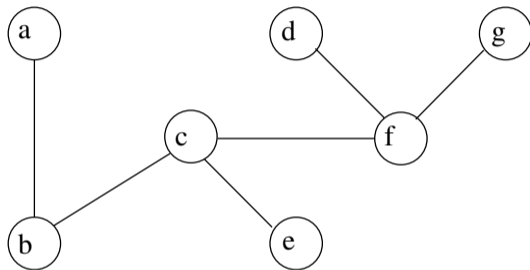


Figura: Exemplo de uma árvore.

- Uma **folha** de uma árvore  $G$  é um **vértice de grau 1**.
- Se  $v$  é uma folha da árvore  $G \Rightarrow G - v$  é uma árvore.



# Árvores

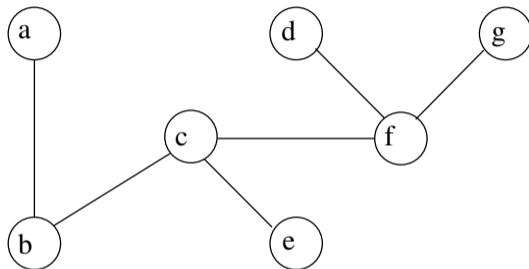


Figura: Exemplo de uma árvore.

- Uma **folha** de uma árvore  $G$  é um **vértice de grau 1**.
- Se  $v$  é uma folha da árvore  $G \Rightarrow G - v$  é uma árvore. – **Importante!** Por quê?

# Árvores

- Todo **grafo conexo**  $G = (V, E)$  possui **pelo menos**  $|V| - 1 = n - 1$  arestas.
  - Veja que cada aresta pode conectar apenas 2 componentes. Quantas arestas no mínimo precisamos colocar em um grafo vazio para ter apenas 1 componente?
- Portanto, uma árvore possui pelo menos  $n - 1$  arestas.
- Vamos mostrar que uma **árvore sempre possui exatamente**  $n - 1$  arestas.

# Exercícios

**Mostre que:**

- Toda árvore  $G = (V, E)$  com  $|V| \geq 2$  possui pelo menos duas folhas.

# Exercícios

## Mostre que:

- Toda árvore  $G = (V, E)$  com  $|V| \geq 2$  possui pelo menos duas folhas.
- Toda árvore  $G = (V, E)$  que não é um caminho possui pelo menos três folhas.

# Caracterização das árvores

## Teorema

Seja  $G = (V, E)$  um grafo com  $|V| = n$ . As seguintes afirmações são equivalentes:

- 1  $G$  é uma **árvore** ( $G$  é **conexo** e **acíclico**),
- 2  $G$  é **conexo** e  $|E| = n - 1$ ,
- 3  $G$  é **acíclico** e  $|E| = n - 1$ ,
- 4  $G$  é **conexo** e toda aresta é uma **aresta-de-corte**.

# Caracterização das árvores

## Teorema

Seja  $G = (V, E)$  um grafo com  $|V| = n$ . As seguintes afirmações são equivalentes:

- 1  $G$  é uma **árvore** ( $G$  é **conexo** e **acíclico**),
- 2  $G$  é **conexo** e  $|E| = n - 1$ ,
- 3  $G$  é **acíclico** e  $|E| = n - 1$ ,
- 4  $G$  é **conexo** e toda aresta é uma **aresta-de-corte**.

Provaremos que (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (4)  $\Rightarrow$  (1).

# Caracterização das árvores

(1)  $\Rightarrow$  (2)

$G$  é uma **árvore**  $\Rightarrow |E| = n - 1$

# Caracterização das árvores

(1)  $\Rightarrow$  (2)

$G$  é uma **árvore**  $\Rightarrow |E| = n - 1$

Por definição de árvore,  $G$  é **conexo** e **acíclico**. Prova por indução em  $|V|$ :



# Caracterização das árvores

$$(1) \Rightarrow (2)$$

$$G \text{ é uma árvore} \Rightarrow |E| = n - 1$$

Por definição de árvore,  $G$  é **conexo** e **acíclico**. Prova por indução em  $|V|$ :

Base:  $|V| = 1$ . Neste caso,  $|E| = 1 - 1 = 0$ .

# Caracterização das árvores

(1)  $\Rightarrow$  (2)

$G$  é uma **árvore**  $\Rightarrow |E| = n - 1$

Por definição de árvore,  $G$  é **conexo** e **acíclico**. Prova por indução em  $|V|$ :

**Base:**  $|V| = 1$ . Neste caso,  $|E| = 1 - 1 = 0$ .

**Hipótese de indução:** para toda árvore  $G' = (V', E')$ , com  $|V'| < n$ ,  $|E'| = |V'| - 1$ .

# Caracterização das árvores

$$(1) \Rightarrow (2)$$

$$G \text{ é uma árvore} \Rightarrow |E| = n - 1$$

Por definição de árvore,  $G$  é **conexo** e **acíclico**. Prova por indução em  $|V|$ :

**Base:**  $|V| = 1$ . Neste caso,  $|E| = 1 - 1 = 0$ .

**Hipótese de indução:** para toda árvore  $G' = (V', E')$ , com  $|V'| < n$ ,  $|E'| = |V'| - 1$ .

Seja  $G = (V, E)$  uma árvore com  $|V| = n$ .

$G$  possui uma folha  $v$ , e  $G - v = G'$  é uma árvore. Pela hipótese, temos que:

$$|E'| = |V'| - 1.$$

Mas,  $|E'| = |E| - 1$  e  $|V'| = |V| - 1$ . Portanto, substituindo na equação anterior:

$$|E| - 1 = |V| - 1 - 1 \Rightarrow |E| = |V| - 1.$$

# Caracterização das árvores

(2)  $\Rightarrow$  (3)  
 $G$  é conexo e  $|E| = n - 1 \Rightarrow G$  é acíclico

# Caracterização das árvores

(2)  $\Rightarrow$  (3)

$G$  é conexo e  $|E| = n - 1 \Rightarrow G$  é acíclico

## Por contradição:

Suponha que  $G$  tem um ciclo  $C$ . Seja uma aresta  $e \in C$ , veja que ela **não é uma aresta-de-corte**. O grafo  $G' = G - e$  continua conexo, mas agora possui  $n - 2$  arestas. Isso é uma **contradição**, pois já mostramos que todo grafo conexo possui pelo menos  $n - 1$  arestas.

# Caracterização das árvores

(3)  $\Rightarrow$  (4)

$G$  é **acíclico** e  $|E| = n - 1 \Rightarrow G$  é **conexo** e toda aresta é uma **aresta-de-corte**.

# Caracterização das árvores

(3)  $\Rightarrow$  (4)

$G$  é **acíclico** e  $|E| = n - 1 \Rightarrow G$  é **conexo** e toda aresta é uma **aresta-de-corte**.

Como  $G = (V, E)$  é **acíclico**, todas as suas arestas são **arestas-de-corte**.

Falta demonstrar que  $G$  é **conexo**.

# Caracterização das árvores

(3)  $\Rightarrow$  (4)

$G$  é **acíclico** e  $|E| = n - 1 \Rightarrow G$  é **conexo** e toda aresta é uma **aresta-de-corte**.

Como  $G = (V, E)$  é **acíclico**, todas as suas arestas são **arestas-de-corte**.

Falta demonstrar que  $G$  é **conexo**. Sejam  $G_1 = (V_1, E_1), \dots, G_k = (V_k, E_k)$  as componentes de  $G$ . Mostraremos que  $k = 1$ .

Cada componente é uma **árvore**. Já mostramos que toda árvore tem  $n - 1$  arestas, veja (1)  $\Rightarrow$  (2). Ou seja,  $|E_i| = |V_i| - 1$  para  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Somando para todo  $i$ , temos que:

$$|E| = \sum_{i=1}^k |E_i| = \sum_{i=1}^k [|V_i| - 1] = |V| - k.$$

Porém, sabemos que  $|E| = |V| - 1$ . Portanto,  $k = 1$ , ou seja, o grafo  $G$  possui apenas uma componente.



# Caracterização das árvores

(4)  $\Rightarrow$  (1)

$G$  é **conexo** e toda aresta é uma **aresta-de-corte**  $\Rightarrow G$  é uma **árvore**

# Caracterização das árvores

(4)  $\Rightarrow$  (1)

$G$  é **conexo** e toda aresta é uma **aresta-de-corte**  $\Rightarrow G$  é uma **árvore**

Sabemos que  $G$  é **conexo**, portanto precisamos mostrar apenas que  $G$  é **acíclico**.

Se houvesse um **ciclo**  $C$  em  $G$ , haveria pelo menos uma aresta  $e \in C$  que não seria uma **aresta-de-corte**. Isso contradiz que **todas as arestas** de  $G$  são arestas-de-corte, portanto,  $C$  não pode existir, e  $G$  é **acíclico**.

Isto termina a prova do teorema. ■

# Floresta

Agora que definimos e caracterizamos as árvores, podemos dizer que:

## Floresta

Um grafo acíclico, mas não necessariamente conexo, é uma **floresta**.

# Floresta

Agora que definimos e caracterizamos as árvores, podemos dizer que:

## Floresta

Um grafo acíclico, mas não necessariamente conexo, é uma **floresta**.

Veja que cada **componente da floresta** é uma **árvore**.



# Árvore enraizada

## Árvore enraizada

Uma árvore enraizada é uma árvore com um vértice especial chamado **raiz**.

- Uma árvore não enraizada é as vezes chamada de **árvore livre**.

# Árvore enraizada

## Árvore enraizada

Uma árvore enraizada é uma árvore com um vértice especial chamado **raiz**.

- Uma árvore não enraizada é as vezes chamada de **árvore livre**.



# Árvore geradora

## Lembrando:

O subgrafo  $H = (V', E')$  é um **subgrafo gerador** de  $G = (V, E)$  se  $V' = V$ .

# Árvore geradora

## Lembrando:

O subgrafo  $H = (V', E')$  é um **subgrafo gerador** de  $G = (V, E)$  se  $V' = V$ .

## Árvore geradora

Uma árvore  $T = (V', E')$  é chamada de **árvore geradora** de um grafo  $G = (V, E)$ , se essa árvore é um **subgrafo gerador** de  $G$ .



# Árvore geradora

## Lembrando:

O subgrafo  $H = (V', E')$  é um **subgrafo gerador** de  $G = (V, E)$  se  $V' = V$ .

## Árvore geradora

Uma árvore  $T = (V', E')$  é chamada de **árvore geradora** de um grafo  $G = (V, E)$ , se essa árvore é um **subgrafo gerador** de  $G$ .

Veja que todo grafo conexo  $G = (V, E)$  **contém** uma árvore geradora.

# Árvore geradora

## Lembrando:

O subgrafo  $H = (V', E')$  é um **subgrafo gerador** de  $G = (V, E)$  se  $V' = V$ .

## Árvore geradora

Uma árvore  $T = (V', E')$  é chamada de **árvore geradora** de um grafo  $G = (V, E)$ , se essa árvore é um **subgrafo gerador** de  $G$ .

Veja que todo grafo conexo  $G = (V, E)$  **contém** uma árvore geradora.

- É suficiente remover arestas que pertencem a algum ciclo.

# Árvore geradora

## Teorema

Seja  $T = (V, E')$  uma árvore geradora do grafo  $G = (V, E)$ . Então para toda aresta  $e \in E \setminus E'$  existe um único ciclo em  $T + e$ .

**Prova:**

# Árvore geradora

## Teorema

Seja  $T = (V, E')$  uma árvore geradora do grafo  $G = (V, E)$ . Então para toda aresta  $e \in E \setminus E'$  existe um único ciclo em  $T + e$ .

## Prova:

Sejam  $u, v$  os extremos de  $e$ . Como a árvore  $T$  é um grafo conexo, existe um caminho  $P$  de  $u$  a  $v$  em  $T$ . Portanto,  $P + e$  é o um ciclo em  $T + e$ .

# Árvore geradora

## Teorema

Seja  $T = (V, E')$  uma árvore geradora do grafo  $G = (V, E)$ . Então para toda aresta  $e \in E \setminus E'$  existe um único ciclo em  $T + e$ .

### Prova:

Sejam  $u, v$  os extremos de  $e$ . Como a árvore  $T$  é um grafo conexo, existe um caminho  $P$  de  $u$  a  $v$  em  $T$ . Portanto,  $P + e$  é o um ciclo em  $T + e$ .

Agora precisamos provar que esse ciclo é **único**. Suponha que existem dois ciclos **diferentes** em  $T + e$ .

**\*Exercício** Remova uma aresta que esteja em um dos ciclos e não esteja em outro, e chegue a uma contradição.

# Árvores e grafos bipartidos

## Exercício:

- Prove que **toda árvore é um grafo bipartido**.

# Árvores e grafos bipartidos

## Exercício:

- Prove que **toda árvore é um grafo bipartido**.
  - Usar indução.

# Árvores e grafos bipartidos

## Exercício:

- Prove que **toda árvore é um grafo bipartido**.
  - Usar indução.
  - Qual vértice podemos colorir em cada passo? ...



# Resumo

- 1 Revisão do conteúdo e objetivo
- 2 Cortes
- 3 Árvores
- 4 Síntese

# Síntese

- Se ao remover uma aresta, aumenta o número de componentes do grafo, a aresta é **aresta-de-corte**.
  - Arestas-de-corte não pertencem a nenhum ciclo.
- Uma **árvore** é um **grafo conexo** e **acíclico**.
- Vimos várias e **importantes** caracterizações das árvores.

# Aplicações

## Aplicações de árvores:

- Estrutura de pastas de um sistema operacional;
- Relações de descendência;
- Campeonatos esportivos;
- Espaço de soluções de um jogo.

# Exercícios: cortes

## Certo ou errado?

- Seja  $G = (V, E)$  um grafo e  $S \subset V$ ,  $S \neq \emptyset$ , então  $\delta(S) = \delta(V - S)$ .

# Exercícios: cortes

## Certo ou errado?

- Seja  $G = (V, E)$  um grafo e  $S \subset V$ ,  $S \neq \emptyset$ , então  $\delta(S) = \delta(V - S)$ .
- Uma aresta  $e$  é uma **aresta-de-corte** de  $G$  se e somente se existe um corte tal que  $\delta(S) = \{e\}$ ?

# Exercícios: cortes

## Certo ou errado?

- Seja  $G = (V, E)$  um grafo e  $S \subset V$ ,  $S \neq \emptyset$ , então  $\delta(S) = \delta(V - S)$ .
- Uma aresta  $e$  é uma **aresta-de-corte** de  $G$  se e somente se existe um corte tal que  $\delta(S) = \{e\}$ ?
- $G$  é conexo se e somente se todo corte em  $G$  é não vazio.

# Exercícios: cortes

## Certo ou errado?

- Seja  $G = (V, E)$  um grafo e  $S \subset V$ ,  $S \neq \emptyset$ , então  $\delta(S) = \delta(V - S)$ .
- Uma aresta  $e$  é uma **aresta-de-corte** de  $G$  se e somente se existe um corte tal que  $\delta(S) = \{e\}$ ?
- $G$  é conexo se e somente se todo corte em  $G$  é não vazio.
- Se  $G = (V, E)$  é bipartido, então existe  $S \subset V$  tal que  $\delta(S) = E$ .

# Dúvidas

Dúvidas?