Projeto e Análise de Algoritmos II (MC558)
Grafos direcionados e ponderados

Prof. Dr. Ruben Interian

Resumo

Resumo

Objetivo

- **Grafos direcionados**: arcos (arestas) possuem orientação ou direção.
- **Grafos ponderados**: arestas possuem valores reais (pesos) associados.

Resumo

Grafos direcionados

Um **grafo direcionado** é um par $G = (V, A)$, onde:

- V é um conjunto finito de elementos chamados **vértices**, e
- A é um conjunto finito de pares ordenados de vértices chamados **arcos (arestas)**.

Grafos direcionados

Um **grafo direcionado** é um par $G = (V, A)$, onde:

- V é um conjunto finito de elementos chamados **vértices**, e
- A é um conjunto finito de pares ordenados de vértices chamados **arcos (arestas)**.

Nomenclatura:

- Outros nomes para grafos direcionados: **grafos orientados, dirigidos, digrafos**.
- As arestas direcionadas são chamadas de **arcos**, para diferenciá-las das arestas não direcionadas.

Grafos direcionados

Um **grafo direcionado** é um par $G = (V, A)$, onde:

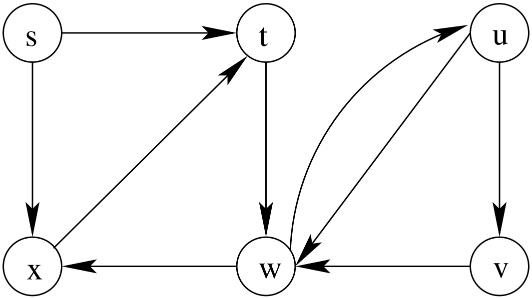
- V é um conjunto finito de elementos chamados **vértices**, e
- A é um conjunto finito de pares ordenados de vértices chamados **arcos (arestas)**.

Nomenclatura:

- Outros nomes para grafos direcionados: **grafos orientados, dirigidos, digrafos**.
- As arestas direcionadas são chamadas de **arcos**, para diferenciá-las das arestas não direcionadas.

Aplicações: modelagem de situações onde os **vínculos são assimétricos**: vias de mão única, relação "seguidor de" em redes sociais.

Grafos direcionados: exemplo



- Veja que dois arcos deste grafo, (w, u) e (u, w), são diferentes!
  - Não são arcos paralelos!

Arcos

Seja um arco (a, b) (par **ordenado** de vértices).

- O vértice b é **adjacente** ao vértice a.
  ~~Os vértices a e b são **adjacentes**.~~
- Os vértices a e b são os **extremos** do arco.
- a é o **início** (cauda), e b é o **final** (cabeça) do arco.
- O arco **sai** do vértice a.
- O arco **entra** no vértice b (é **incidente** no vértice b).
- Pares ordenados: $(a, b) \neq (b, a)$.

Graus dos vértices

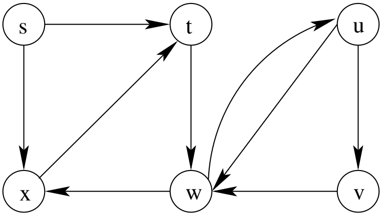
Considere um vértice $v \in V$ de um grafo direcionado $G = (V, A)$.

- Grau de saída $d^+(v)$: número de arcos que saem de v;
- Grau de entrada $d^-(v)$: número de arcos que entram em v.

Graus dos vértices

Considere um vértice $v \in V$ de um grafo direcionado $G = (V, A)$.

- Grau de saída $d^+(v)$: número de arcos que saem de v;
- Grau de entrada $d^-(v)$: número de arcos que entram em v.



Soma dos graus dos vértices

Para todo grafo direcionado $G = (V, A)$ temos que

$$\sum_{v \in V} d_D^+(v) = \sum_{v \in V} d_D^-(v) = |A|.$$

Soma dos graus dos vértices

Para todo grafo direcionado $G = (V, A)$ temos que

$$\sum_{v \in V} d_D^+(v) = \sum_{v \in V} d_D^-(v) = |A|.$$

Prova. Considere um arco $a = (u, v)$ de G. Pelas definições de grau em grafos direcionados, o arco a é contado exatamente uma vez na soma dos graus de entrada, de saída, e na cardinalidade de A. ∎

Representação

Como representar um grafo direcionado?

Estruturas de dados:

- Matriz de adjacência,
- Listas de adjacência.

Matriz de adjacência

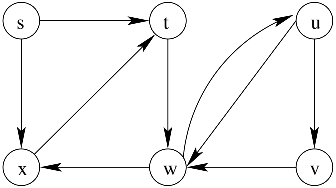
Matriz de adjacência de um grafo direcionado $G = (V, A)$:

- Matriz quadrada de $|V| \times |V|$;
- $A[i, j] = 1$ se arco $(i, j) \in A$, caso contrário, $A[i, j] = 0$;
- A matriz A **não é necessariamente simétrica**.

Matriz de adjacência

Matriz de adjacência de um grafo direcionado $G = (V, A)$:

- Matriz quadrada de $|V| \times |V|$;
- $A[i,j] = 1$ se arco $(i,j) \in A$, caso contrário, $A[i,j] = 0$;
- A matriz A **não é necessariamente simétrica**.



	s	t	u	x	w	v
s	0	1	0	1	0	0
t	0	0	0	0	1	0
u	0	0	0	0	1	1
x	0	1	0	0	0	0
w	0	0	1	1	0	0
v	0	0	0	0	1	0

Listas de adjacência

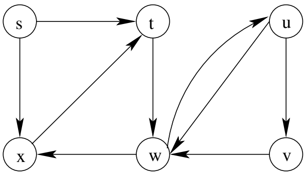
Listas de adjacência:

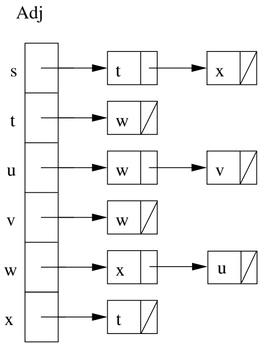
- Um grafo direcionado $G = (V, A)$, $|V| = n$, é representado usando n listas ligadas.
- Cada lista ligada $Adj[u]$ terá todos os vértices adjacentes ao vértice u.
- Um arco $e = (v, w)$ precisa estar representado apenas uma vez: O vértice w estará em $Adj[v]$.

Listas de adjacência

Listas de adjacência:

- Um grafo direcionado $G = (V, A)$, $|V| = n$, é representado usando n listas ligadas.
- Cada lista ligada $Adj[u]$ terá todos os vértices adjacentes ao vértice u.
- Um arco $e = (v, w)$ precisa estar representado apenas uma vez: O vértice w estará em $Adj[v]$.





Grafos direcionados

Conceitos que não iremos definir para grafos direcionados por serem idênticos ou muito semelhantes aos conceitos correspondentes em grafos não direcionados:

Grafos direcionados

Conceitos que não iremos definir para grafos direcionados por serem idênticos ou muito semelhantes aos conceitos correspondentes em grafos não direcionados:

- Remoção de vértices / arcos;

Grafos direcionados

Conceitos que não iremos definir para grafos direcionados por serem idênticos ou muito semelhantes aos conceitos correspondentes em grafos não direcionados:

- Remoção de vértices / arcos;
- Subgrafo, supergrafo (direcionados);
- Subgrafo induzido.

Grafo subjacente

Grafo subjacente

Seja G um grafo direcionado. O grafo subjacente de G é o grafo obtido substituindo cada arco (par ordenado de dois vértices) por uma aresta (par não-ordenado entre os mesmos dois vértices).

Grafo subjacente

Grafo subjacente

Seja G um grafo direcionado. O grafo subjacente de G é o grafo obtido substituindo cada arco (par ordenado de dois vértices) por uma aresta (par não-ordenado entre os mesmos dois vértices).

- É o grafo obtido ao remover a direção das arestas de G.
- O grafo subjacente de G é chamado também de "versão não direcionada" de G.

Orientação

Orientação

Uma orientação de um grafo G é um grafo direcionado obtido substituindo cada aresta $e = (u, v)$ de G por um arco a: (u, v) ou (v, u).

Orientação

Orientação

Uma orientação de um grafo G é um grafo direcionado obtido substituindo cada aresta $e = (u, v)$ de G por um arco a: (u, v) ou (v, u).

- Quantas orientações tem um grafo $G = (V, E)$?

Orientação

Orientação

Uma orientação de um grafo G é um grafo direcionado obtido substituindo cada aresta $e = (u, v)$ de G por um arco a: (u, v) ou (v, u).

- Quantas orientações tem um grafo $G = (V, E)$? – $2^{|E|}$.

Passeio

Passeio

Um passeio em um grafo direcionado $G = (V, A)$ é uma sequência:

$$W = (v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, a_\ell, v_\ell),$$

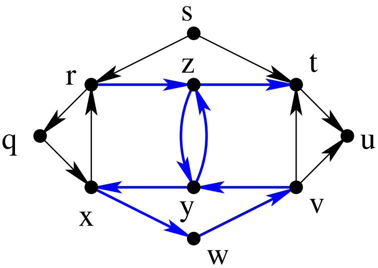
onde $v_0, v_1, \ldots, v_\ell$ são vértices de G, e $a_i = (v_{i-1}, v_i)$ são arcos de G para todo $i = 1, 2, \ldots, \ell$.

Podemos omitir os arcos e escrever apenas os vértices:

$$W = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, v_\ell)$$

.

Passeio



Passeio $W = (r, z, y, x, w, v, y, z, t)$

Grafos direcionados

- O resto dos termos que usamos são os mesmos que já vimos para grafos não direcionados: início e final de um passeio, comprimento, passeio fechado.
- As definições de trilhas, caminhos e ciclos são análogas.
- Algumas vezes podemos usar o termo orientado para enfatizar que estamos falando de um grafo direcionado.

  Por exemplo: caminho orientado.

Corte direcionado

Corte direcionado

Seja $G = (V, A)$ um grafo direcionado e seja $S \subset V$, $S \neq \emptyset$.

Denotamos por $\delta^+_G(S)$ o conjunto dos arcos com início em S e final em $V - S$, i.e., o conjunto dos arcos que saem de S.

Denotamos por $\delta^-_G(S)$ o conjunto dos arcos com início em $V - S$ e final em S, i.e., o conjunto do arcos que entram em S.

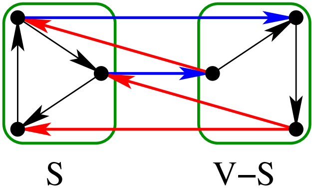
Corte direcionado

Corte direcionado

Seja $G = (V, A)$ um grafo direcionado e seja $S \subset V$, $S \neq \emptyset$.

Denotamos por $\delta^+_G(S)$ o conjunto dos arcos com início em S e final em $V - S$, i.e., o conjunto dos arcos que saem de S.

Denotamos por $\delta^-_G(S)$ o conjunto dos arcos com início em $V - S$ e final em S, i.e., o conjunto do arcos que entram em S.



Caminhos versus cortes direcionados

Teorema

Seja $G = (V, A)$ um grafo direcionado e sejam $s, t \in V$. Existe um caminho de s a t em G se e somente se não existe $S \subseteq V - \{t\}$ tal que $s \in S$ e $\delta^+(S) = \emptyset$.

Caminhos versus cortes direcionados

Teorema

Seja $G = (V, A)$ um grafo direcionado e sejam $s, t \in V$. Existe um caminho de s a t em G se e somente se não existe $S \subseteq V - \{t\}$ tal que $s \in S$ e $\delta^+(S) = \emptyset$.

Prova.

- $\Rightarrow$ Se existe caminho de s a t em G, então $\nexists S \subset V - \{t\} : s \in S \wedge \delta^+(S) = \emptyset$. (Suponha que S existe; considere o **último vértice do caminho que está em** S.)

Caminhos versus cortes direcionados

Teorema

Seja $G = (V, A)$ um grafo direcionado e sejam $s, t \in V$. Existe um caminho de s a t em G se e somente se não existe $S \subseteq V - \{t\}$ tal que $s \in S$ e $\delta^+(S) = \emptyset$.

Prova.

- $\Rightarrow$ Se existe caminho de s a t em G, então $\nexists S \subset V - \{t\} : s \in S \wedge \delta^+(S) = \emptyset$. (Suponha que S existe; considere o **último vértice do caminho que está em** S.)
- $\Leftarrow$ Se não existe caminho de s a t, seja $S = \{v \in V : \exists \text{ um caminho de } s \text{ a } v\}$. Claramente $t \notin S$, $s \in S$ e $\delta^+(S) = \emptyset$ e o resultado segue. ∎

Conexidade fraca

Proposta de definição:

Grafo direcionado conexo

Um grafo direcionado G é conexo se o grafo subjacente de G é conexo.

Conexidade fraca

Proposta de definição:

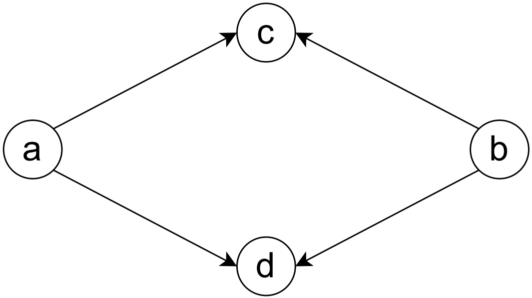
Grafo direcionado conexo

Um grafo direcionado G é conexo se o grafo subjacente de G é conexo.

Veremos que essa definição não é muito útil.

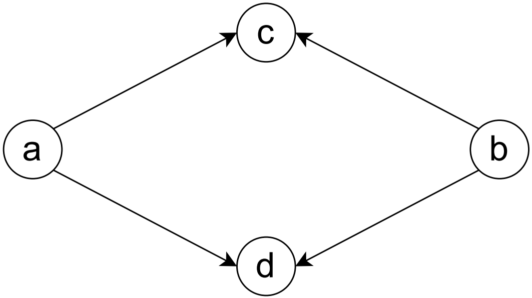
😕

Conexidade fraca

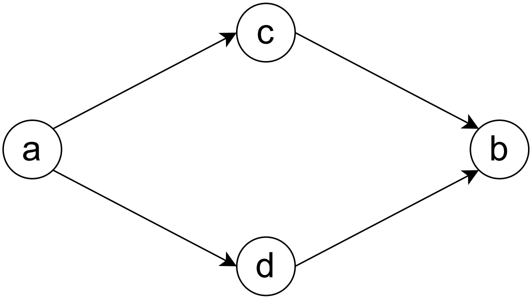


Não há caminho de *a* a *b*.

Conexidade fraca

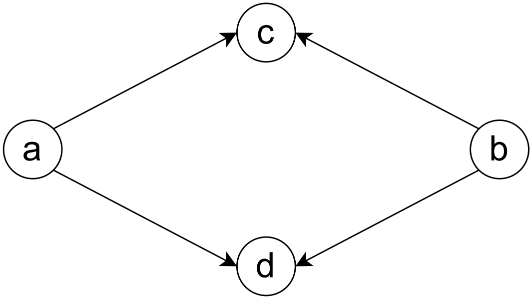


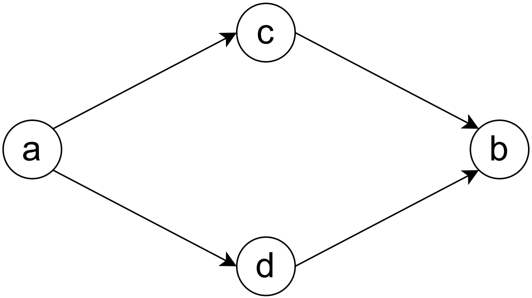
Não há caminho de *a* a *b*.



Não há caminho de *b* a *a*.

Conexidade fraca





Não há caminho de *a* a *b*.

Não há caminho de *b* a *a*.

Se o grafo subjacente é conexo, podemos dizer que o grafo direcionado é **fracamente conexo**.

Conexidade forte

Grafo direcionado fortemente conexo

Um grafo direcionado $G = (V, A)$ é fortemente conexo se para quaisquer $u, v \in V$, existe um caminho (orientado) de u a v em G.

Conexidade forte

Grafo direcionado fortemente conexo

Um grafo direcionado $G = (V, A)$ é fortemente conexo se para quaisquer $u, v \in V$, existe um caminho (orientado) de u a v em G.

Exercício: Como podemos **mudar a orientação dos arcos** no exemplo anterior para que o grafo direcionado resultante seja fortemente conexo?

Resumo

Grafos ponderados

Muitas vezes, saber se existe ou não uma aresta **não é suficiente** para resolver um problema real.

Às vezes precisamos da **força** ou **peso** daquela relação:

Grafos ponderados

Muitas vezes, saber se existe ou não uma aresta **não é suficiente** para resolver um problema real.

Às vezes precisamos da **força** ou **peso** daquela relação:

- Em redes de transporte: **distância** ou **custo** de transporte entre dois locais;

Grafos ponderados

Muitas vezes, saber se existe ou não uma aresta **não é suficiente** para resolver um problema real.

Às vezes precisamos da **força** ou **peso** daquela relação:

- Em redes de transporte: **distância** ou **custo** de transporte entre dois locais;
- Em redes de ligações telefônicas: **duração** ou **frequência** das ligações;

Grafos ponderados

Muitas vezes, saber se existe ou não uma aresta **não é suficiente** para resolver um problema real.

Às vezes precisamos da **força** ou **peso** daquela relação:

- Em redes de transporte: **distância** ou **custo** de transporte entre dois locais;
- Em redes de ligações telefônicas: **duração** ou **frequência** das ligações;
- Em redes sociais: o **número** ou a **intensidade** das interações entre dois usuários.

Grafo ponderado

Um grafo é ponderado se a cada aresta e do grafo está associado um valor real $w(e)$, denominado peso (ou custo) da aresta.

Grafo ponderado

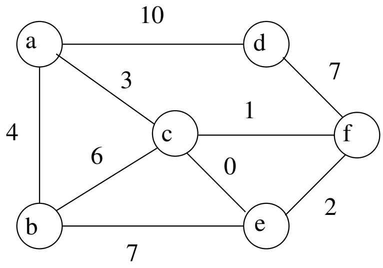
Um grafo é ponderado se a cada aresta e do grafo está associado um valor real $w(e)$, denominado peso (ou custo) da aresta.

- O grafo pode ser direcionado, neste caso os pesos estão associados aos arcos.

Grafo ponderado

Um grafo é ponderado se a cada aresta e do grafo está associado um valor real $w(e)$, denominado peso (ou custo) da aresta.

- O grafo pode ser direcionado, neste caso os pesos estão associados aos arcos.



Grafos ponderados: representação

Como podemos representar um grafo ponderado?

Grafos ponderados: representação

Como podemos representar um grafo ponderado?

- Matriz de adjacência não binária. Cada posição $A[i,j]$ possui um valor real diferente de zero, se $(i,j) \in E$. Caso contrário, $A[i,j] = 0$.

Grafos ponderados: representação

Como podemos representar um grafo ponderado?

- Matriz de adjacência não binária. Cada posição $A[i,j]$ possui um valor real diferente de zero, se $(i,j) \in E$. Caso contrário, $A[i,j] = 0$.
- Listas de adjacência (n listas ligadas). Cada elemento da lista ligada, além do ID do vértice, precisa armazenar o peso da aresta.

Grafos ponderados: representação

Como podemos representar um grafo ponderado?

- Matriz de adjacência não binária. Cada posição $A[i,j]$ possui um valor real diferente de zero, se $(i,j) \in E$. Caso contrário, $A[i,j] = 0$.
- Listas de adjacência (n listas ligadas). Cada elemento da lista ligada, além do ID do vértice, precisa armazenar o peso da aresta.

E para grafos direcionados?

Resumo

Síntese

- **Grafos direcionados**: arcos (arestas) possuem orientação ou direção, modelando situações onde os **vínculos são assimétricos**.
- **Grafos ponderados**: arestas possuem valores reais (pesos) associados, mostrando a **força** ou **peso** daquela relação.

Exercícios

Seja $G = (V, A)$ um grafo direcionado. **Certo ou errado?**

- $\delta^+(S) = \delta^-(V - S)$.

Exercícios

Seja $G = (V, A)$ um grafo direcionado. **Certo ou errado?**

- $\delta^+(S) = \delta^-(V - S)$.
- G é fortemente conexo se $\delta^+(S) \neq \emptyset$ para todo $S \subset V$, $S \neq \emptyset$.

Exercícios

O **grafo transposto** $G^T = (V, A^T)$ de um grafo direcionado $G = (V, A)$ é um grafo tal que se $(u, v) \in A \Rightarrow (v, u) \in A^T$ (ou seja, os arcos estão em direções opostas). Descreva como computar eficientemente G^T a partir de G, quando G é representado:

1. pela matriz de adjacência,
2. por listas de adjacência.

Expresse a eficiência das soluções em termos assintóticos em função do tamanho de G.

Dúvidas

Dúvidas?