Projeto e Análise de Algoritmos II (MC558)
Busca em grafos

Prof. Dr. Ruben Interian

Resumo

Resumo

Introdução

- Até agora, vimos diversos **conceitos e resultados** da Teoria de grafos. Vimos também como os grafos são **representados computacionalmente**.

Introdução

- Até agora, vimos diversos **conceitos e resultados** da Teoria de grafos. Vimos também como os grafos são **representados computacionalmente**.
- Vamos começar a estudar como estes conceitos, resultados e estruturas de dados podem ser usadas para **resolver problemas**.

Problema

Problema: **Como explorar/percorrer um grafo?**

- O grafo pode ser direcionado ou não direcionado.
- Um dos objetivos pode ser buscar (identificar) vértices com características estruturais específicas.
- Outro objetivo: conseguir enumerar os vértices em uma ordem específica.
- A enumeração de vértices seguindo uma determinada ordem é usada em diversos outros algoritmos que veremos no curso, por exemplo: identificar as componentes conexas, encontrar uma ordenação topológica, encontrar caminhos mínimos.
- **Algoritmos de busca em grafos são a base de alguns dos mais importantes algoritmos que veremos no curso**.

Resumo

Algoritmos de busca em grafos

Algoritmo de busca em grafos:

- **Entrada**: Grafo G.
- **Saída**: **?**

Algoritmos de busca em grafos

Algoritmo de busca em grafos:

- **Entrada**: Grafo G.
- **Saída**: **?**

Características que estamos procurando:

- Precisamos percorrer **todos** os vértices possíveis?

Algoritmos de busca em grafos

Algoritmo de busca em grafos:

- **Entrada**: Grafo G.
- **Saída**: ?

Características que estamos procurando:

- Precisamos percorrer **todos** os vértices possíveis? – Sim.

Algoritmos de busca em grafos

Algoritmo de busca em grafos:

- **Entrada**: Grafo G.
- **Saída**: ?

Características que estamos procurando:

- Precisamos percorrer **todos** os vértices possíveis? – Sim.
- Para explorar/percorrer um grafo, faz sentido andar em círculos (**ciclos**)?

Algoritmos de busca em grafos

Algoritmo de busca em grafos:

- **Entrada**: Grafo G.
- **Saída**: ?

Características que estamos procurando:

- Precisamos percorrer **todos** os vértices possíveis? – Sim.
- Para explorar/percorrer um grafo, faz sentido andar em círculos (**ciclos**)? – Não.

Algoritmos de busca em grafos

Algoritmo de busca em grafos:

- **Entrada**: Grafo G.
- **Saída**: **?**

Características que estamos procurando:

- Precisamos percorrer **todos** os vértices possíveis? – Sim.
- Para explorar/percorrer um grafo, faz sentido andar em círculos (**ciclos**)? – Não.
- Seria desejável saber qual vértice foi visitado a partir de qual.

Algoritmos de busca em grafos

Algoritmo de busca em grafos:

- **Entrada**: Grafo G.
- **Saída**: **?**

Características que estamos procurando:

- Precisamos percorrer **todos** os vértices possíveis? – Sim.
- Para explorar/percorrer um grafo, faz sentido andar em círculos (**ciclos**)? – Não.
- Seria desejável saber qual vértice foi visitado a partir de qual.

Estrutural acíclica, contém todos os vértices $\Rightarrow$

Algoritmos de busca em grafos

Algoritmo de busca em grafos:

- **Entrada**: Grafo G.
- **Saída**: ?

Características que estamos procurando:

- Precisamos percorrer **todos** os vértices possíveis? – Sim.
- Para explorar/percorrer um grafo, faz sentido andar em círculos (**ciclos**)? – Não.
- Seria desejável saber qual vértice foi visitado a partir de qual.

Estrutural acíclica, contém todos os vértices $\Rightarrow$ **Arvore** (floresta?) **geradora**.

Algoritmos de busca em grafos

Vamos estudar **dois algoritmos** de busca em grafos:

- Busca em largura
  - É chamada de **BFS**, do inglês breadth-first search.
- Busca em profundidade
  - É chamada de **DFS**, do inglês depth-first search.

Algoritmos de busca em grafos

Vamos estudar **dois algoritmos** de busca em grafos:

- Busca em largura
  - É chamada de **BFS**, do inglês breadth-first search.
- Busca em profundidade
  - É chamada de **DFS**, do inglês depth-first search.

Ambos os algoritmos:

- recebem como **entrada** um grafo G, e
- geram como **saída** uma arvore geradora (seja do grafo ou de uma componente).

Representação de árvores

Como representar essa arvore? (chamada de **árvore de busca**)

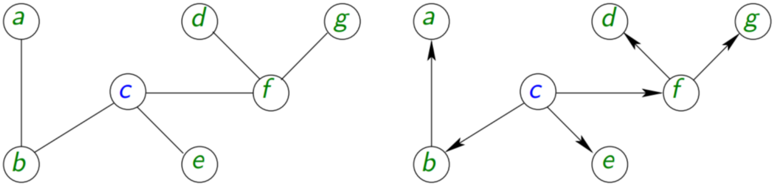
- Vamos usar uma árvore enraizada, cuja raiz é um vértice inicial s.
- Veja que podemos representar essa árvore por meio de um vetor π.
- O pai de um vértice v é $\pi[v]$. O vértice raiz não tem pai: $\pi[s] = \text{NIL}$.

Representação de árvores

Vetor π ($\pi[v]$ é pai de v):

v	a	b	c	d	e	f	g
$\pi[v]$	b	c	NIL	f	c	c	f

NIL: símbolo usado para indicar não existência.



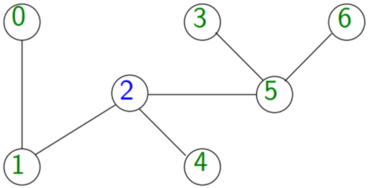
raiz c

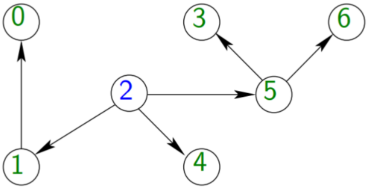
Representação de árvores

Vetor π ($\pi[v]$ é pai de v):

v	0	1	2	3	4	5	6
$\pi[v]$	1	2	*NIL*	5	2	2	5

NIL: símbolo usado para indicar não existência.





raiz 2

Representação de árvores

- Essa representação permite determinar facilmente o caminho que vai de um vértice v até a raiz s: $v, \pi[v], \pi[\pi[v]], \ldots, s$.
- Podemos chegar de s a v usando o caminho inverso.

Representação de árvores

PrintPath (G, s, v)

```
se v == s então
    Print s
senão se π[v] = NIL então
    Print Não existe caminho de s a v
senão
    PrintPath (G, s, π[v])
    Print v
```

Representação de árvores

PrintPath (G, s, v)

se $v == s$ **então**
    Print s
senão se $\pi[v] = \text{NIL}$ **então**
    Print Não existe caminho de s a v
senão
    PrintPath $(G, s, \pi[v])$
    Print v

Imprime o caminho de s a v na árvore de raiz s em tempo **linear** no tamanho do caminho.

Resumo

Busca em largura

Vértices alcançáveis:

- O vértice v é alcançável a partir de s se existe um caminho de s a v.

Distância:

- A distância $dist(s, v)$ é o comprimento do caminho mais curto de s a v.
- Se v não é alcançável a partir de s, $dist(s, v) = \infty$.

Busca em largura: ideia do algoritmo

Ideia do algoritmo BFS:

- Começar pelo vértice inicial s;
- Depois os vizinhos de s;
- Depois os vizinhos dos vizinhos de s;
- . . . [e assim por diante]

Busca em largura: ideia do algoritmo

Ideia do algoritmo BFS:

- Começar pelo vértice inicial s;
- Depois os vizinhos de s;
- Depois os vizinhos dos vizinhos de s;
- . . . [e assim por diante]

Subprodutos do algoritmo BFS:

- Distâncias dos vértices ao vértice inicial s.
- Caminhos mais curtos para os vértices alcançáveis a partir de s.

Busca em largura

Ideias para implementar o algoritmo (e obter a árvore geradora):

- A **árvore de busca** no inicio contém apenas o vértice inicial s.
- Cada vizinho v de s e a aresta (s, v) são acrescentadas à árvore;
- O processo é repetido para os vizinhos dos vizinhos, e assim até que todos os vértices alcançáveis por s sejam inseridos na árvore.
- Qual estrutura de dados permite "lembrar" qual é o próximo vértice a ser visitado?

Busca em largura

Ideias para implementar o algoritmo (e obter a árvore geradora):

- A **árvore de busca** no inicio contém apenas o vértice inicial s.
- Cada vizinho v de s e a aresta (s, v) são acrescentadas à árvore;
- O processo é repetido para os vizinhos dos vizinhos, e assim até que todos os vértices alcançáveis por s sejam inseridos na árvore.
- Qual estrutura de dados permite "lembrar" qual é o próximo vértice a ser visitado? – Fila Q, com as operações Enqueue e Dequeue.

Busca em largura

Como podemos saber **quais vértices já foram visitados**? – Usaremos cores.

Busca em largura

Como podemos saber **quais vértices já foram visitados**? – Usaremos cores.

- Branco = "ainda não visitado" (inicialmente todos os vértices são brancos).
- Cinza = "na fila, ainda não finalizado" (ainda não analisei seus vizinhos).
- Preto = "visitado e finalizado" (vizinhos já analisados).

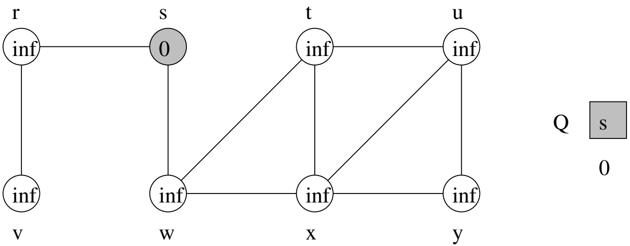
Busca em largura

Como podemos saber **quais vértices já foram visitados**? – Usaremos cores.

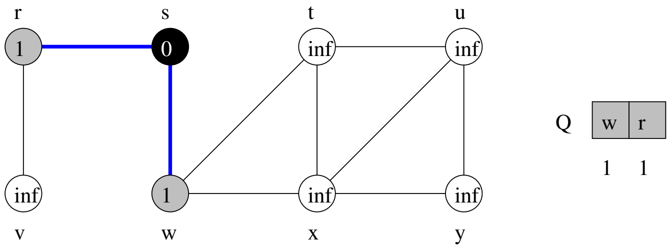
- Branco = "ainda não visitado" (inicialmente todos os vértices são brancos).
- Cinza = "na fila, ainda não finalizado" (ainda não analisei seus vizinhos).
- Preto = "visitado e finalizado" (vizinhos já analisados).

As cores vão nos ajudar a entender o algoritmo, mas não são estritamente necessárias para fazer a implementação.

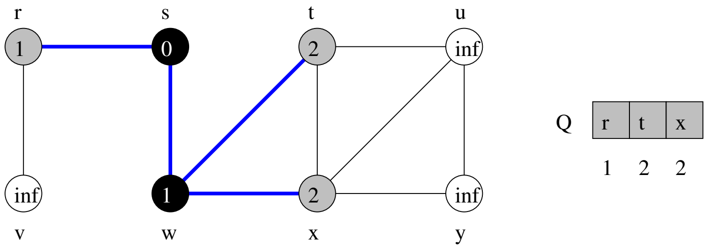
Busca em largura: Exemplo



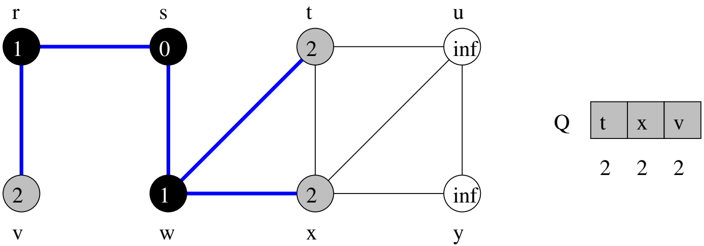
Busca em largura: Exemplo



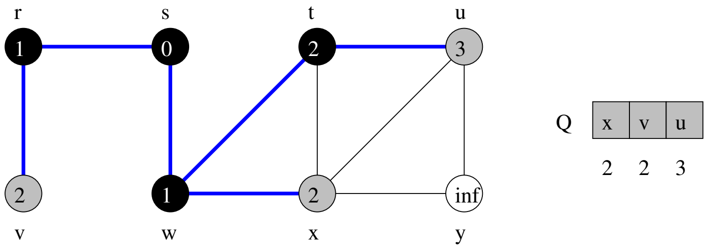
Busca em largura: Exemplo



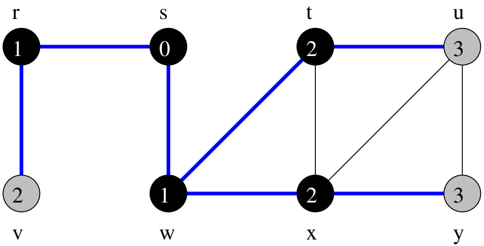
Busca em largura: Exemplo



Busca em largura: Exemplo



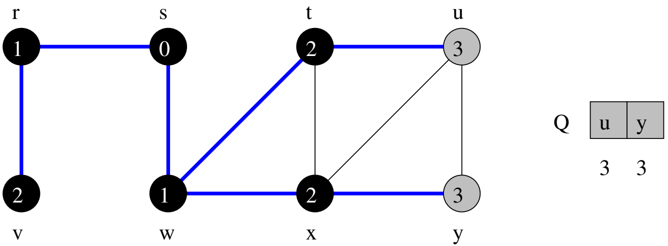
Busca em largura: Exemplo



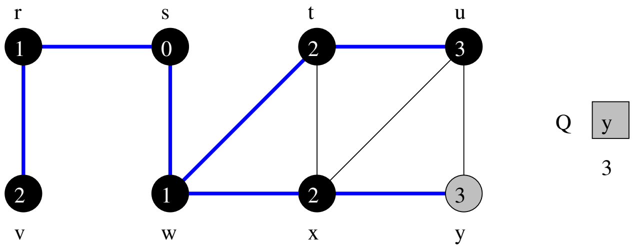
Q

v	u	y
2	3	3

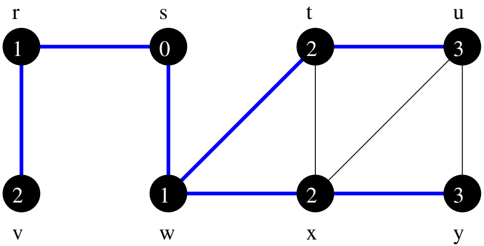
Busca em largura: Exemplo



Busca em largura: Exemplo



Busca em largura: Exemplo



Q O

Busca em largura: O algoritmo

Qual **estrutura de dados** é melhor usar neste algoritmo: matriz ou listas de adjacências?

Busca em largura: O algoritmo

Qual **estrutura de dados** é melhor usar neste algoritmo: matriz ou listas de adjacências?

Por quê?

Busca em largura: O algoritmo

Qual **estrutura de dados** é melhor usar neste algoritmo: matriz ou listas de adjacências?

Por quê?

O algoritmo BFS recebe um grafo G, na forma de listas de adjacências, e um vértice inicial $s \in V$, e devolve uma arvore de busca em largura, e adicionalmente as distâncias dos vértices ao vértice inicial s.

Busca em largura: O algoritmo

BFS (G, s)

para cada $u \in V - \{s\}$ **faça**
    $\text{cor}[u] \leftarrow \text{branco}$
    $\text{d}[u] \leftarrow \infty$
    $\pi[u] \leftarrow \text{NIL}$
$\text{cor}[s] \leftarrow \text{cinza}$
$\text{d}[s] \leftarrow 0$
$\pi[s] \leftarrow \text{NIL}$
$Q \leftarrow \emptyset$
Enqueue(Q, s)

(Inicialização)

Busca em largura: O algoritmo

BFS (G, s)

```
para cada u ∈ V − {s} faça
    cor[u] ← branco
    d[u] ← ∞
    π[u] ← NIL
cor[s] ← cinza
d[s] ← 0
π[s] ← NIL
Q ← ∅
Enqueue(Q, s)
```

(Inicialização)

```
enquanto Q ≠ ∅ faça
    u ← Dequeue(Q)
    para cada v ∈ Adj[u] faça
        se cor[v] = branco então
            cor[v] ← cinza
            d[v] ← d[u] + 1
            π[v] ← u
            Enqueue(Q, v)
    cor[u] ← preto
```

(Execução)

Busca em largura: complexidade de tempo

Método de análise **agregado**.

Busca em largura: complexidade de tempo

Método de análise **agregado**.

- A inicialização consome tempo $\Theta(V)$.

Busca em largura: complexidade de tempo

Método de análise **agregado**.

- A inicialização consome tempo $\Theta(V)$.
- Depois que um vértice deixa de ser branco, ele não volta a ser branco novamente. Assim, cada vértice é inserido na fila Q no máximo 1 vez. Cada operação sobre a fila consome tempo $\Theta(1)$ resultando em um total de $O(V)$.

Busca em largura: complexidade de tempo

Método de análise **agregado**.

- A inicialização consome tempo $\Theta(V)$.
- Depois que um vértice deixa de ser branco, ele não volta a ser branco novamente. Assim, cada vértice é inserido na fila Q no máximo 1 vez. Cada operação sobre a fila consome tempo $\Theta(1)$ resultando em um total de $O(V)$.
- Em cada lista de adjacência, os vértices são visitados apenas 1 vez (linhas 12-13). A soma dos comprimentos das listas de adjacência é $\Theta(E)$. Assim, o tempo gasto para percorrer as listas é $O(E)$.

Busca em largura: complexidade de tempo

Método de análise **agregado**.

- A inicialização consome tempo $\Theta(V)$.
- Depois que um vértice deixa de ser branco, ele não volta a ser branco novamente. Assim, cada vértice é inserido na fila Q no máximo 1 vez. Cada operação sobre a fila consome tempo $\Theta(1)$ resultando em um total de $O(V)$.
- Em cada lista de adjacência, os vértices são visitados apenas 1 vez (linhas 12-13). A soma dos comprimentos das listas de adjacência é $\Theta(E)$. Assim, o tempo gasto para percorrer as listas é $O(E)$.

Conclusão: A complexidade de tempo do algoritmo **BFS** é $O(V + E)$.

Busca em largura: correção do algoritmo

Vamos mostrar que **BFS** funciona. Para isso, precisamos mostrar duas coisas:

1. O vetor π define uma árvore de busca com raiz s.
2. $d[v] = dist(s, v)$ para todo $v \in V$.

Busca em largura: correção do algoritmo

Vamos mostrar que **BFS** funciona. Para isso, precisamos mostrar duas coisas:

1. O vetor π define uma árvore de busca com raiz s.
2. $d[v] = dist(s, v)$ para todo $v \in V$.

Teorema

Seja $G = (V, E)$ um grafo, e seja $s \in V$ um vértice de G. Então, depois de executar **BFS**(G, s), temos:

1. π define uma árvore enraizada em s,
2. $d[v] = dist(s, v)$ para todo $v \in V$.

Busca em largura: correção do algoritmo

Para provar o **Teorema**, precisamos de dois lemas:

- Lema 1: o caminho de s a v na árvore tem tamanho $d[v]$;
- Lema 2: a fila Q respeita a ordem de $d[v]$.

Busca em largura: Lema 1

Lema 1

Seja T a árvore induzida por π (*). Se $d[v] < \infty$, então:

1. v é um vértice de T,
2. o caminho de s a v em T tem comprimento $d[v]$.

(*) As arestas de $T = (V_\pi, E_\pi)$ são $(\pi[v], v)$, para todo v, $\pi[v] \neq \mathrm{NIL}$.

Busca em largura: Lema 1

Lema 1

Seja T a árvore induzida por π (*). Se $d[v] < \infty$, então:

1. v é um vértice de T,
2. o caminho de s a v em T tem comprimento $d[v]$.

(*) As arestas de $T = (V_\pi, E_\pi)$ são $(\pi[v], v)$, para todo v, $\pi[v] \neq \text{NIL}$.

Prova. (por indução no número de operações **Enqueue** – "Enfileirar")

Busca em largura: Lema 1

Lema 1

Seja T a árvore induzida por π (*). Se $d[v] < \infty$, então:

1. v é um vértice de T,
2. o caminho de s a v em T tem comprimento $d[v]$.

(*) As arestas de $T = (V_\pi, E_\pi)$ são $(\pi[v], v)$, para todo v, $\pi[v] \neq$ NIL.

Prova. (por indução no número de operações **Enqueue** – "Enfileirar")

Base: Depois que executamos **Enqueue** pela primeira vez, T continha apenas s, com $d[s] = 0$. Nem $d[s]$ (nem nenhum $d[v]$) nunca muda após o vértice ser inserido na fila.

Busca em largura: Lema 1

Hipótese de indução: antes de enfileirar o vértice v, todo vértice u com $d[u] < \infty$ já está em T, e possui um caminho de s a u em T, com comprimento $d[u]$.

Busca em largura: Lema 1

Hipótese de indução: antes de enfileirar o vértice v, todo vértice u com $d[u] < \infty$ já está em T, e possui um caminho de s a u em T, com comprimento $d[u]$.

No instante em que enfileiramos v:

- v foi descoberto percorrendo os vizinhos de um vértice u;
- mas u já havia sido enfileirado;
- pela hipótese de indução, existe um caminho de s a u com comprimento $d[u]$.

Busca em largura: Lema 1

Hipótese de indução: antes de enfileirar o vértice v, todo vértice u com $d[u] < \infty$ já está em T, e possui um caminho de s a u em T, com comprimento $d[u]$.

No instante em que enfileiramos v:

- v foi descoberto percorrendo os vizinhos de um vértice u;
- mas u já havia sido enfileirado;
- pela hipótese de indução, existe um caminho de s a u com comprimento $d[u]$.

Portanto, v está em T (linha 16: $\pi[v] \leftarrow u$), e há caminho de s a v em T, pois $\pi[v] = u$, sendo $d[v] = d[u] + 1$.

→ Algoritmo

Busca em largura: Lema 1

Corolário 1

Durante a execução do algoritmo, $d[v] \geq dist_G(s, v)$ para todo $v \in V$.

Busca em largura: Lema 2

Lema 2

Suponha que $\langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$ seja a disposição da fila Q em alguma iteração do algoritmo. Então:

$$d[v_1] \leq d[v_2] \leq \cdots \leq d[v_r] \leq d[v_1] + 1.$$

Ou seja, os vértices são inseridos na fila em ordem não-decrescente dos valores de $d[\ ]$ e há no máximo dois valores de $d[\ ]$ para vértices na fila.

Busca em largura: Lema 2

Lema 2

Suponha que $\langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$ seja a disposição da fila Q em alguma iteração do algoritmo. Então:

$$d[v_1] \leq d[v_2] \leq \cdots \leq d[v_r] \leq d[v_1] + 1.$$

Ou seja, os vértices são inseridos na fila em ordem não-decrescente dos valores de $d[\,]$ e há no máximo dois valores de $d[\,]$ para vértices na fila.

Prova. (por indução no número de iterações)

Busca em largura: Lema 2

Lema 2

Suponha que $\langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$ seja a disposição da fila Q em alguma iteração do algoritmo. Então:

$$d[v_1] \leq d[v_2] \leq \cdots \leq d[v_r] \leq d[v_1] + 1.$$

Ou seja, os vértices são inseridos na fila em ordem não-decrescente dos valores de $d[\ ]$ e há no máximo dois valores de $d[\ ]$ para vértices na fila.

Prova. (por indução no número de iterações)

Base: Antes da primeira iteração, $Q = \langle s \rangle$, e o lema vale.

Busca em largura: Lema 2

Hipótese: Na iteração i, a desigualdade $d[v_1] \leq \cdots \leq d[v_r] \leq d[v_1] + 1$ vale.

Passo de indução: Considere a execução do laço.

- no início da iteração a fila era $\langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$
- na iteração, removemos v_1 e inserimos $v_{r+1}, \ldots, v_{r+t}$
- no final da iteração a fila será $\langle v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_{r+t} \rangle$

Inserimos **vizinhos** de v_1:

- se v_j é um vértice inserido, então $d[v_j] = d[v_1] + 1$
- pela hipótese de indução

$$d[v_2] \leq \cdots \leq d[v_r] \leq d[v_1] + 1 \leq d[v_2] + 1$$

- portanto

$$d[v_2] \leq \cdots \leq d[v_r] \leq d[v_{r+1}] \leq \cdots \leq d[v_{r+t}] \leq d[v_2] + 1$$

Busca em largura: correção do algoritmo

Teorema

Seja $G = (V, E)$ um grafo, e seja $s \in V$ um vértice de G. Então, depois de executar **BFS**(G, s), temos:

1. π define uma árvore enraizada em s,
2. $d[v] = dist(s, v)$ para todo $v \in V$.

Busca em largura: correção do algoritmo

Teorema

Seja $G = (V, E)$ um grafo, e seja $s \in V$ um vértice de G. Então, depois de executar **BFS**(G, s), temos:

1. π define uma árvore enraizada em s,
2. $d[v] = dist(s, v)$ para todo $v \in V$.

Prova. Primeiramente, o grafo $T = (V_\pi, E_\pi)$ cujas arestas são $(\pi[v], v)$, para todo v, $\pi[v] \neq$ NIL, é uma árvore. Por quê?

Busca em largura: correção do algoritmo

Teorema

Seja $G = (V, E)$ um grafo, e seja $s \in V$ um vértice de G. Então, depois de executar **BFS**(G, s), temos:

1. π define uma árvore enraizada em s,
2. $d[v] = dist(s, v)$ para todo $v \in V$.

Prova. Primeiramente, o grafo $T = (V_\pi, E_\pi)$ cujas arestas são $(\pi[v], v)$, para todo v, $\pi[v] \neq$ NIL, é uma árvore. Por quê? – É conexa e $|E_\pi| = |V_\pi| - 1$.

Busca em largura: correção do algoritmo

Teorema

Seja $G = (V, E)$ um grafo, e seja $s \in V$ um vértice de G. Então, depois de executar **BFS**(G, s), temos:

1. π define uma árvore enraizada em s,
2. $d[v] = dist(s, v)$ para todo $v \in V$.

Prova. Primeiramente, o grafo $T = (V_\pi, E_\pi)$ cujas arestas são $(\pi[v], v)$, para todo v, $\pi[v] \neq$ NIL, é uma árvore. Por quê? – É conexa e $|E_\pi| = |V_\pi| - 1$.

Precisamos provar que $d[v] = dist(s, v)$ para todo $v \in V$.

Busca em largura: correção do algoritmo

$$d[v] = dist(s, v) \text{ para todo } v \in V$$

Se $dist(s, v) = \infty$, então $d[v] = \infty$ pelo Corolário 1.

Resta provar que se $dist(s, v) < \infty$, então $d[v] = dist(s, v)$.

Seja $v \in V$, e seja $dist(s, v) = k$. Vamos provar que $d[v] = k$ por **indução em** k.

Busca em largura: correção do algoritmo

$$d[v] = dist(s, v) \text{ para todo } v \in V$$

Se $dist(s, v) = \infty$, então $d[v] = \infty$ pelo Corolário 1.

Resta provar que se $dist(s, v) < \infty$, então $d[v] = dist(s, v)$.

Seja $v \in V$, e seja $dist(s, v) = k$. Vamos provar que $d[v] = k$ por **indução em** k.

Base: se $k = 0$, $v = s$, e o resultado vale.

Busca em largura: correção do algoritmo

$$d[v] = dist(s, v) \text{ para todo } v \in V$$

Se $dist(s, v) = \infty$, então $d[v] = \infty$ pelo Corolário 1.

Resta provar que se $dist(s, v) < \infty$, então $d[v] = dist(s, v)$.

Seja $v \in V$, e seja $dist(s, v) = k$. Vamos provar que $d[v] = k$ por **indução em** k.

Base: se $k = 0$, $v = s$, e o resultado vale.

Hipótese de indução: $d[u] = dist(s, u)$ para todo $u \in V$ com $dist(s, u) < k$.

Busca em largura: correção do algoritmo

$$d[v] = dist(s, v) \text{ para todo } v \in V$$

Se $dist(s, v) = \infty$, então $d[v] = \infty$ pelo Corolário 1.

Resta provar que se $dist(s, v) < \infty$, então $d[v] = dist(s, v)$.

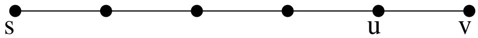
Seja $v \in V$, e seja $dist(s, v) = k$. Vamos provar que $d[v] = k$ por **indução em** k.

Base: se $k = 0$, $v = s$, e o resultado vale.

Hipótese de indução: $d[u] = dist(s, u)$ para todo $u \in V$ com $dist(s, u) < k$.

Passo de indução: Seja v um vértice com $dist(s, v) = k$. Considere um caminho mínimo de s a v em G e seja u o vértice que antecede v neste caminho.

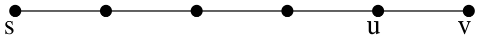
Busca em largura: correção do algoritmo



Veja que $dist(s, u) = k - 1$ (Por quê?).

Considere o instante em que u foi removido da fila Q (linha 11 → Algoritmo). Neste instante, v é branco, cinza ou preto.

Busca em largura: correção do algoritmo

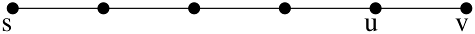


Veja que $dist(s, u) = k - 1$ (Por quê?).

Considere o instante em que u foi removido da fila Q (linha 11 → Algoritmo). Neste instante, v é branco, cinza ou preto.

Se v é branco, então na linha 15 fazemos: $d[v] = d[u] + 1 = (k - 1) + 1 = k$.

Busca em largura: correção do algoritmo



Veja que $dist(s, u) = k - 1$ (Por quê?).

Considere o instante em que u foi removido da fila Q (linha 11 → Algoritmo). Neste instante, v é branco, cinza ou preto.

Se v é branco, então na linha 15 fazemos: $d[v] = d[u] + 1 = (k - 1) + 1 = k$.

Se v é cinza, v foi visitado antes por um vértice w ($v \in Adj[w]$) e $d[v] = d[w] + 1$. Pelo Lema 2, $d[w] \leq d[u] = k - 1$, e como $k \leq d[v]$ (Corolário 1), segue que $d[v] = k$.

Busca em largura: correção do algoritmo

Veja que $dist(s, u) = k - 1$ (Por quê?).

Considere o instante em que u foi removido da fila Q (linha 11 → Algoritmo). Neste instante, v é branco, cinza ou preto.

Se v é branco, então na linha 15 fazemos: $d[v] = d[u] + 1 = (k - 1) + 1 = k$.

Se v é cinza, v foi visitado antes por um vértice w ($v \in Adj[w]$) e $d[v] = d[w] + 1$. Pelo Lema 2, $d[w] \leq d[u] = k - 1$, e como $k \leq d[v]$ (Corolário 1), segue que $d[v] = k$.

Se v for preto, v já passou pela fila e, pelo Lema 2, $d[v] \leq d[u] = k - 1$. Mas por outro lado, pelo Corolário 1, $d[v] \geq k$ (**contradição**): v não é preto. ∎

Resumo

Síntese

- Vimos as características gerais dos algoritmos de busca em grafos.
- Formulamos o algoritmo de busca em largura (**BFS**), e mostramos como esse algoritmo funciona.

Aplicações

A busca em largura é a **base** ou modelo de diversos algoritmos em grafos, entre eles alguns dos mais importantes:

- O algoritmo de Dijkstra.
- O algoritmo de Prim.

Material bibliográfico e exercícios

T. Cormen et al. Algoritmos - Teoria e Prática (3a ed.). – **Cap. 22** (22.1 - 22.2)

Exercícios: ver exercícios no final do capítulo 22.2.

Dúvidas

Dúvidas?