Projeto e Análise de Algoritmos II (MC558)
Busca em grafos: componentes fortemente conexas

Prof. Dr. Ruben Interian

Resumo

Resumo

Revisão do conteúdo

Vimos diversos usos do algoritmo **DFS**: componentes conexas em grafos não direcionados; ordenação topológica e suas aplicações ...

Objetivo

Identificar as **componentes fortemente conexas** de um **grafo direcionado**.

Objetivo

Identificar as **componentes fortemente conexas** de um **grafo direcionado**.

É um problema bem mais complexo do que em grafos não direcionados.

Resumo

Componentes fortemente conexas

Lembrando:

Grafo direcionado fortemente conexo

Um grafo direcionado $G = (V, A)$ é fortemente conexo se para quaisquer $u, v \in V$, existe um caminho (orientado) de u a v em G.

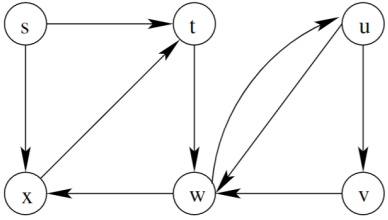
Componentes fortemente conexas

Lembrando:

Grafo direcionado fortemente conexo

Um grafo direcionado $G = (V, A)$ é fortemente conexo se para quaisquer $u, v \in V$, existe um caminho (orientado) de u a v em G.

Nem todo grafo é fortemente conexo ...



Componentes fortemente conexas

Componente fortemente conexa

Uma componente fortemente conexa de um grafo direcionado $G = (V, A)$ é um subconjunto **maximal** de vértices $C \subseteq V$ tal que o subgrafo induzido por C é fortemente conexo.

C é **maximal** se não existe outro conjunto de vértices C', que contém a C, tal que o subgrafo induzido por C' é fortemente conexo.

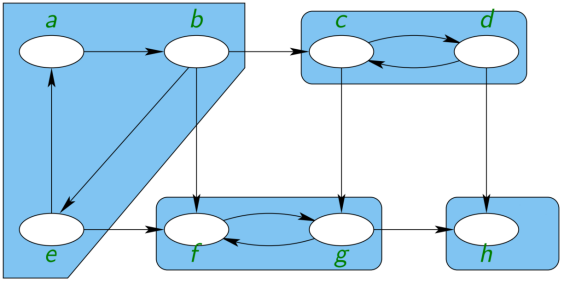
Componentes fortemente conexas

Componente fortemente conexa

Uma componente fortemente conexa de um grafo direcionado $G = (V, A)$ é um subconjunto **maximal** de vértices $C \subseteq V$ tal que o subgrafo induzido por C é fortemente conexo.

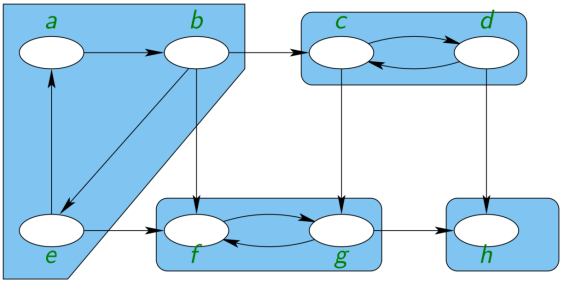
C é **maximal** se não existe outro conjunto de vértices C', que contém a C, tal que o subgrafo induzido por C' é fortemente conexo. $=$ Se não conseguimos "ampliar" C.

Componentes fortemente conexas



Um grafo direcionado e suas componentes fortemente conexas.

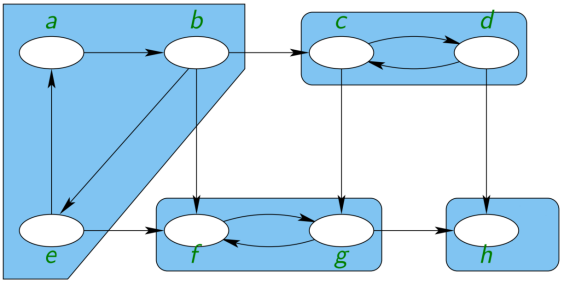
Componentes fortemente conexas



Um grafo direcionado e suas componentes fortemente conexas.

Problema: dado um grafo G, encontrar suas componentes fortemente conexas (CFC).

Componentes fortemente conexas



Um grafo direcionado e suas componentes fortemente conexas.

Problema: dado um grafo G, encontrar suas componentes fortemente conexas (CFC).

O algoritmo que identifica as CFC de G é baseado no grafo de componentes de G.

Componentes fortemente conexas

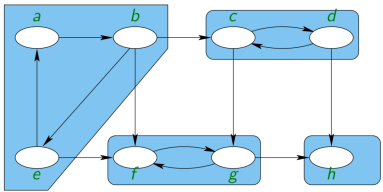
Grafo de componentes

Um grafo de componentes G^{CFC} de um grafo direcionado G é um grafo direcionado, no qual cada vértice no G^{CFC} é uma componente em G, e há aresta (C_1, C_2) em G^{CFC} se existe uma aresta (u, v) em G, tal que $u \in C_1$ e $v \in C_2$.

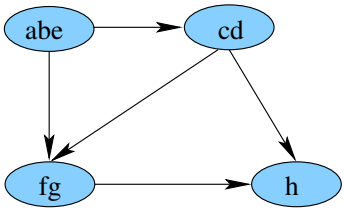
Componentes fortemente conexas

Grafo de componentes

Um grafo de componentes G^{CFC} de um grafo direcionado G é um grafo direcionado, no qual cada vértice no G^{CFC} é uma componente em G, e há aresta (C_1, C_2) em G^{CFC} se existe uma aresta (u, v) em G, tal que $u \in C_1$ e $v \in C_2$.



G

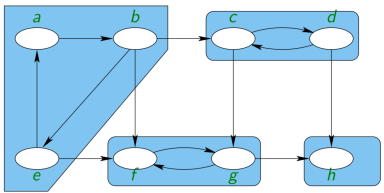


G^{CFC}

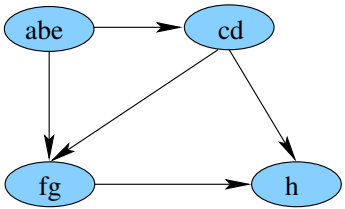
Componentes fortemente conexas

Grafo de componentes

Um grafo de componentes G^{CFC} de um grafo direcionado G é um grafo direcionado, no qual cada vértice no G^{CFC} é uma componente em G, e há aresta (C_1, C_2) em G^{CFC} se existe uma aresta (u, v) em G, tal que $u \in C_1$ e $v \in C_2$.



G



G^{CFC}

Propriedade fundamental: o grafo de componentes é acíclico. (Por quê?)

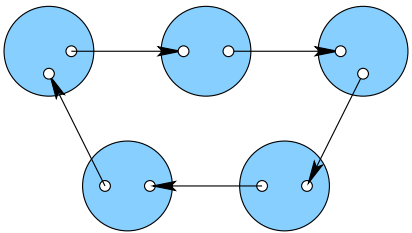
Componentes fortemente conexas

Propriedade fundamental: o grafo de componentes é acíclico.

Componentes fortemente conexas

Propriedade fundamental: o grafo de componentes é acíclico.

Se G^{CFC} contivesse um ciclo, então alguma componente fortemente conexa estaria contida em outro subgrafo fortemente conexo de G.



Componentes fortemente conexas

Considere uma busca em profundidade sobre G, e seja u o **último** vértice a ser **finalizado**. A componente fortemente conexa de u é **uma fonte** no grafo de componentes G^{CFC}.

Componentes fortemente conexas

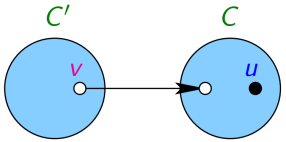
Considere uma busca em profundidade sobre G, e seja u o **último** vértice a ser **finalizado**. A componente fortemente conexa de u é **uma fonte** no grafo de componentes G^{CFC}.

Ideia da prova: Suponha que a componente f.c. C que contém u não é uma fonte. Então um vértice v de outra componente f.c. C' é adjacente a algum vértice de C. Mostre por contradição que o arco que sai de v e vai até um vértice de C não pode existir.

Componentes fortemente conexas

Considere uma busca em profundidade sobre G, e seja u o **último** vértice a ser **finalizado**. A componente fortemente conexa de u é **uma fonte** no grafo de componentes G^{CFC}.

Ideia da prova: Suponha que a componente f.c. C que contém u não é uma fonte. Então um vértice v de outra componente f.c. C' é adjacente a algum vértice de C. Mostre por contradição que o arco que sai de v e vai até um vértice de C não pode existir. **Dica**: Analise o instante $d[u]$ e compare-o com $f[v]$.



Componentes fortemente conexas

Grafo transposto

Seja $G = (V, E)$ um grafo direcionado. O grafo transposto de G é o grafo $G^T = (V, E^T)$ tal que $E^T = \{(u, v) : (v, u) \in E\}$.

Ou seja, G^T é obtido a partir de G invertendo as orientações das arestas.

Componentes fortemente conexas

Grafo transposto

Seja $G = (V, E)$ um grafo direcionado. O grafo transposto de G é o grafo $G^T = (V, E^T)$ tal que $E^T = \{(u, v) : (v, u) \in E\}$.

Ou seja, G^T é obtido a partir de G invertendo as orientações das arestas.

Dada uma representação de listas de adjacências de G é possível obter a representação de listas de adjacências de G^T em tempo $\Theta(V + E)$.

Componentes fortemente conexas

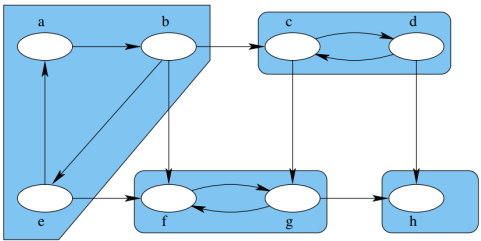
Ideia fundamental para entender o algoritmo para encontrar as componentes f.c.:

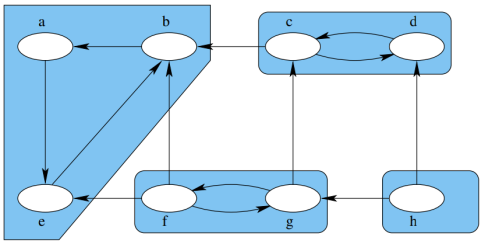
- **Os grafos G e G^T têm as mesmas componentes.**
- Se iniciamos uma BP em G^T começando no "**último**" vértice finalizado u (último vértice a ser finalizado em uma busca em profundidade anterior), **a primeira árvore encontrada** terá os vértices da componente f.c. de u.

Componentes fortemente conexas

Ideia fundamental para entender o algoritmo para encontrar as componentes f.c.:

- **Os grafos G e G^T têm as mesmas componentes.**
- Se iniciamos uma BP em G^T começando no "**último**" vértice finalizado u (último vértice a ser finalizado em uma busca em profundidade anterior), **a primeira árvore encontrada** terá os vértices da componente f.c. de u.





Componentes fortemente conexas

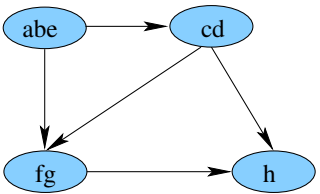
Desenvolvendo essa ideia:

- **Fontes** no grafo de componentes de G, são **sorvedouros** no grafo de componentes de G^T.

Componentes fortemente conexas

Desenvolvendo essa ideia:

- **Fontes** no grafo de componentes de G, são **sorvedouros** no grafo de componentes de G^T.
- Se temos um **vértice** u **de uma fonte** em G^{CFC}, os vértices alcançáveis de u em G^T **formam uma componente f.c.** de G.



G^{CFC}

Componentes fortemente conexas: o algoritmo

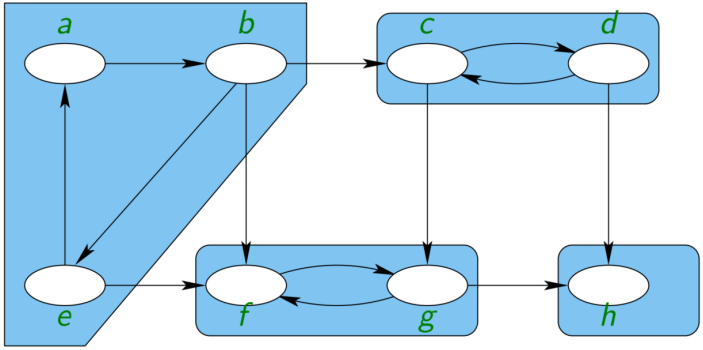
Algoritmo CFC(G)

1. Executar $DFS(G)$, calculando $f[v]$ para cada $v \in V$.
2. Executar $DFS(G^T)$, considerando os vértices em ordem decrescente de $f[v]$.
3. Devolver os **conjuntos de vértices** de **cada árvore** da floresta de busca encontrada.

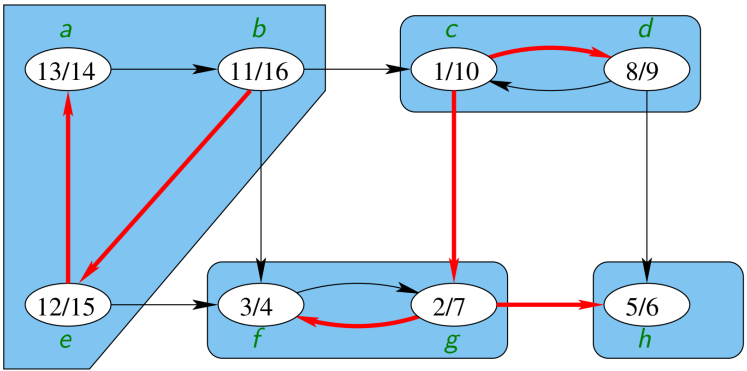
$\rightarrow$ Os conjuntos de vértices devolvidos são as componentes fortemente conexas de G.

Em alguns livros é chamado de **Algoritmo de Kosaraju**.

Componentes fortemente conexas

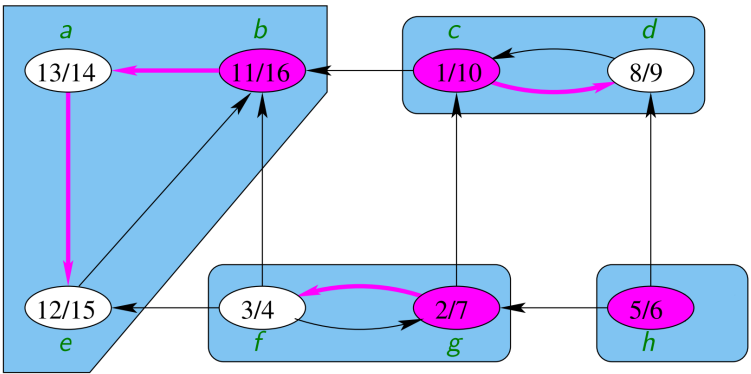


Componentes fortemente conexas



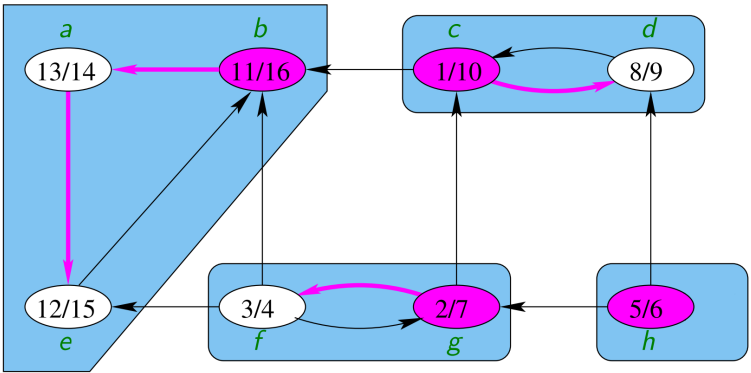
1. Executar $DFS(G)$, calculando $f[v]$ para cada $v \in V$.

Componentes fortemente conexas



2. Executar $DFS(G^T)$, considerando os vértices em ordem decrescente de $f[v]$.

Componentes fortemente conexas



3. Devolver os **conjuntos de vértices** de **cada árvore** da floresta de busca.

Componentes fortemente conexas: complexidade de tempo

Algoritmo CFC(G)

1. Executar $DFS(G)$, calculando $f[v]$ para cada $v \in V$.
2. Executar $DFS(G^T)$, considerando os vértices em ordem decrescente de $f[v]$.
3. Devolver os **conjuntos de vértices** de **cada árvore** da floresta de busca encontrada.

Complexidade de tempo:

Componentes fortemente conexas: complexidade de tempo

Algoritmo CFC(G)

1. Executar $DFS(G)$, calculando $f[v]$ para cada $v \in V$.
2. Executar $DFS(G^T)$, considerando os vértices em ordem decrescente de $f[v]$.
3. Devolver os **conjuntos de vértices** de **cada árvore** da floresta de busca encontrada.

Complexidade de tempo:

1. Executar $DFS(G)$

Componentes fortemente conexas: complexidade de tempo

Algoritmo CFC(G)

1. Executar $DFS(G)$, calculando $f[v]$ para cada $v \in V$.
2. Executar $DFS(G^T)$, considerando os vértices em ordem decrescente de $f[v]$.
3. Devolver os **conjuntos de vértices** de **cada árvore** da floresta de busca encontrada.

Complexidade de tempo:

1. Executar $DFS(G)$ – Tempo $O(V + E)$.

Componentes fortemente conexas: complexidade de tempo

Algoritmo CFC(G)

1. Executar $DFS(G)$, calculando $f[v]$ para cada $v \in V$.
2. Executar $DFS(G^T)$, considerando os vértices em ordem decrescente de $f[v]$.
3. Devolver os **conjuntos de vértices** de **cada árvore** da floresta de busca encontrada.

Complexidade de tempo:

1. Executar $DFS(G)$ – Tempo $O(V + E)$.
2. Calcular G^T, executar $DFS(G^T)$

Componentes fortemente conexas: complexidade de tempo

Algoritmo CFC(G)

1. Executar $DFS(G)$, calculando $f[v]$ para cada $v \in V$.
2. Executar $DFS(G^T)$, considerando os vértices em ordem decrescente de $f[v]$.
3. Devolver os **conjuntos de vértices** de **cada árvore** da floresta de busca encontrada.

Complexidade de tempo:

1. Executar $DFS(G)$ – Tempo $O(V + E)$.
2. Calcular G^T, executar $DFS(G^T)$ – Tempo $O(V + E)$.

Componentes fortemente conexas: complexidade de tempo

Algoritmo CFC(G)

1. Executar $DFS(G)$, calculando $f[v]$ para cada $v \in V$.
2. Executar $DFS(G^T)$, considerando os vértices em ordem decrescente de $f[v]$.
3. Devolver os **conjuntos de vértices** de **cada árvore** da floresta de busca encontrada.

Complexidade de tempo:

1. Executar $DFS(G)$ – Tempo $O(V + E)$.
2. Calcular G^T, executar $DFS(G^T)$ – Tempo $O(V + E)$.
3. Devolver os **conjuntos de vértices** de **cada árvore**

Componentes fortemente conexas: complexidade de tempo

Algoritmo CFC(G)

1. Executar $DFS(G)$, calculando $f[v]$ para cada $v \in V$.
2. Executar $DFS(G^T)$, considerando os vértices em ordem decrescente de $f[v]$.
3. Devolver os **conjuntos de vértices** de **cada árvore** da floresta de busca encontrada.

Complexidade de tempo:

1. Executar $DFS(G)$ – Tempo $O(V + E)$.
2. Calcular G^T, executar $DFS(G^T)$ – Tempo $O(V + E)$.
3. Devolver os **conjuntos de vértices** de **cada árvore** – Tempo $O(V)$.

Componentes fortemente conexas: complexidade de tempo

Algoritmo CFC(G)

1. Executar $DFS(G)$, calculando $f[v]$ para cada $v \in V$.
2. Executar $DFS(G^T)$, considerando os vértices em ordem decrescente de $f[v]$.
3. Devolver os **conjuntos de vértices** de **cada árvore** da floresta de busca encontrada.

Complexidade de tempo:

1. Executar $DFS(G)$ – Tempo $O(V + E)$.
2. Calcular G^T, executar $DFS(G^T)$ – Tempo $O(V + E)$.
3. Devolver os **conjuntos de vértices** de **cada árvore** – Tempo $O(V)$.

Complexidade $O(V + E)$.

Componentes fortemente conexas: correção do algoritmo

Correção do algoritmo CFC

O algoritmo **CFC** determina as componentes fortemente conexas de G.

Para provar a correção do algoritmo, precisamos de **dois lemas**.

Componentes fortemente conexas

Lema 1

Sejam C_1 e C_2 duas componentes f.c. de G, e sejam $u_1, v_1 \in C$, $u_2, v_2 \in C_2$.
Se **existe** um caminho $u_1 \rightsquigarrow u_2$ em G, então **não existe** um caminho $v_2 \rightsquigarrow v_1$ em G.

Prova:

Componentes fortemente conexas

Lema 1

Sejam C_1 e C_2 duas componentes f.c. de G, e sejam $u_1, v_1 \in C$, $u_2, v_2 \in C_2$.
Se **existe** um caminho $u_1 \rightsquigarrow u_2$ em G, então **não existe** um caminho $v_2 \rightsquigarrow v_1$ em G.

Prova: Já vimos que o grafo de componentes é acíclico, pela maximalidade de cada componente. Se tivéssemos um caminho $v_2 \rightsquigarrow v_1$, existiria um ciclo de comprimento 2 no grafo de componentes.

Componentes fortemente conexas: definições auxiliares

Definições auxiliares:

- Daqui pra frente $d[v], f[v]$ referem-se à busca em profundidade em G feita no Passo 1 do algoritmo.

Componentes fortemente conexas: definições auxiliares

Definições auxiliares:

- Daqui pra frente $d[v], f[v]$ referem-se à busca em profundidade em G feita no Passo 1 do algoritmo.
- Se U é um subconjunto de vértices de G, então

$$d(U) = \min_{u \in U} \{d[u]\}$$

- Ou seja, $d(U)$ é o instante em que o **primeiro vértice** de U foi descoberto.

Componentes fortemente conexas: definições auxiliares

Definições auxiliares:

- Daqui pra frente $d[v], f[v]$ referem-se à busca em profundidade em G feita no Passo 1 do algoritmo.
- Se U é um subconjunto de vértices de G, então

$$d(U) = \min_{u \in U} \{d[u]\}$$

- Ou seja, $d(U)$ é o instante em que o **primeiro vértice** de U foi descoberto.

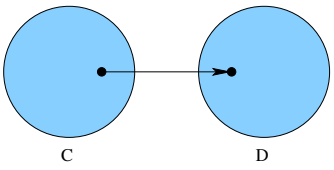
$$f(U) = \max_{u \in U} \{f[u]\}$$

- Ou seja, $f(U)$ é o instante em que o **último vértice** de U foi finalizado.

Componentes fortemente conexas

Lema 2

Sejam C e D duas componentes fortemente conexas no grafo direcionado $G = (V, A)$. Se existe um arco $(u, v) \in A$ tal que $u \in C$ e $v \in D$, então $f(C) > f(D)$.

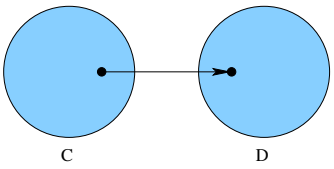


Prova

Componentes fortemente conexas

Lema 2

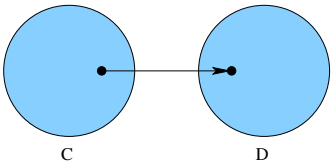
Sejam C e D duas componentes fortemente conexas no grafo direcionado $G = (V, A)$. Se existe um arco $(u, v) \in A$ tal que $u \in C$ e $v \in D$, então $f(C) > f(D)$.



Prova (Caso 1): $d(C) < d(D)$. Seja x o primeiro vértice de C que foi descoberto, logo $d[x] = d(C)$. No instante $d[x]$, existe um caminho branco de x a todo vértice de $C \cup D$. Pelo Teorema do Caminho Branco, todos os vértices de $C \cup D$ são descendentes de x. Portanto $f(D) < f[x] = f(C)$.

Componentes fortemente conexas

Existe um arco $(u, v) \in A$ tal que $u \in C$ e $v \in D \Rightarrow f(C) > f(D)$



Prova (Caso 2): $d(C) > d(D)$. O primeiro vértice de $C \cup D$ a ser descoberto pertence a D. Como D é fortemente conexo, todos os vértices de D serão finalizados antes de qualquer vértice de C ser descoberto. Isso mostra que $f(C) > f(D)$.

Componentes fortemente conexas

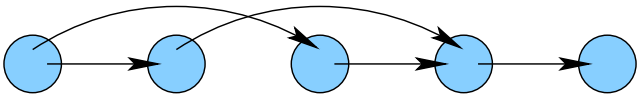
Corolário

Sejam C e D duas componentes fortemente conexas no grafo direcionado G. Se existe um arco (u, v) no grafo G^T tal que $u \in C$ e $v \in D$, então $f(C) < f(D)$.

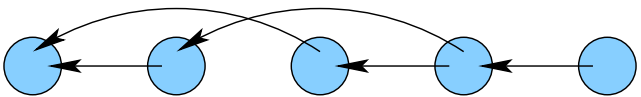
Veja que os grafos G e G^T têm as mesmas componentes f.c.: é suficiente aplicar o **Lema 2** para o arco (v, u) em G.

Componentes fortemente conexas vs ordenação topológica

O grafo G^{CFC} é direcionado e acíclico $\Rightarrow$ possui uma ordenação topológica. Veja que nós **já temos** essa O.T.: é a ordenação dos vértices (componentes f.c. de G) em ordem decrescente do valor $f(C)$.



Quando **DFS**(G^T) começa a construir uma nova árvore, ele escolhe como raiz um vértice de uma componente f.c. que é uma **fonte** do grafo G^{CFC} **"desconsiderando" as componentes com vértices já visitados anteriormente**.



Componentes fortemente conexas

Correção do algoritmo CFC

O algoritmo **CFC** determina as componentes fortemente conexas de G.

Prova (por **indução** no número k de árvores produzidas):

Componentes fortemente conexas

Correção do algoritmo CFC

O algoritmo **CFC** determina as componentes fortemente conexas de G.

Prova (por **indução** no número k de árvores produzidas):

Ou seja, vamos provar que as k primeiras árvores produzidas correspondem a componentes f.c. de G.

Base: $k = 0$ (trivial)

Hipótese de indução: as primeiras k árvores produzidas são componentes f.c.

Componentes fortemente conexas

Passo de indução: considere a $(k+1)$-ésima árvore produzida pelo algoritmo.
Vamos mostrar que o conjunto de vértices dessa árvore é uma componente f.c.

Componentes fortemente conexas

Passo de indução: considere a $(k+1)$-ésima árvore produzida pelo algoritmo. Vamos mostrar que o conjunto de vértices dessa árvore é uma componente f.c.

Seja u a raiz dessa árvore, e seja C a componente fortemente conexa de u.

Pela escolha do algoritmo, $f[u] = f(C) > f(D)$ para qualquer outra componente fortemente conexa D de vértices ainda não visitados em **DFS**(G^T).

Componentes fortemente conexas

Passo de indução: considere a $(k+1)$-ésima árvore produzida pelo algoritmo. Vamos mostrar que o conjunto de vértices dessa árvore é uma componente f.c.

Seja u a raiz dessa árvore, e seja C a componente fortemente conexa de u.

Pela escolha do algoritmo, $f[u] = f(C) > f(D)$ para qualquer outra componente fortemente conexa D de vértices ainda não visitados em **DFS**(G^T).

Quando a busca começa em u, todos os vértices de C são brancos. Pelo Teorema do Caminho Branco, todos os vértices de C tornam-se descendentes de u na árvore.

Componentes fortemente conexas

Passo de indução: considere a $(k+1)$-ésima árvore produzida pelo algoritmo. Vamos mostrar que o conjunto de vértices dessa árvore é uma componente f.c.

Seja u a raiz dessa árvore, e seja C a componente fortemente conexa de u.

Pela escolha do algoritmo, $f[u] = f(C) > f(D)$ para qualquer outra componente fortemente conexa D de vértices ainda não visitados em **DFS**(G^T).

Quando a busca começa em u, todos os vértices de C são brancos. Pelo Teorema do Caminho Branco, todos os vértices de C tornam-se descendentes de u na árvore.

Pelo Corolário, qualquer arco que sai de C só pode entrar em uma das k componentes fortemente conexas já visitadas. Portanto:

Componentes fortemente conexas

Passo de indução: considere a $(k+1)$-ésima árvore produzida pelo algoritmo. Vamos mostrar que o conjunto de vértices dessa árvore é uma componente f.c.

Seja u a raiz dessa árvore, e seja C a componente fortemente conexa de u.

Pela escolha do algoritmo, $f[u] = f(C) > f(D)$ para qualquer outra componente fortemente conexa D de vértices ainda não visitados em **DFS**(G^T).

Quando a busca começa em u, todos os vértices de C são brancos. Pelo Teorema do Caminho Branco, todos os vértices de C tornam-se descendentes de u na árvore.

Pelo Corolário, qualquer arco que sai de C só pode entrar em uma das k componentes fortemente conexas já visitadas. Portanto:

(1) os vértices de C estão na árvore de busca em profundidade de G^T com raiz u; e
(2) apenas esses vértices estão na árvore. ■

Resumo

Síntese

- O algoritmo **CFC**(G) identifica as **componentes fortemente conexas** de um **grafo direcionado**.
- As componentes fortemente conexas são geradas seguindo uma **ordenação topológica** dentro do grafo de componentes.

Aplicações

- Identificar grupos de **sítios web** relacionados, mas **não alcançáveis** desde a parte da Web indexada pelos motores de busca (**deep web**, ou **web obscura**, corresponde à parte não indexada, e **surface web** é a parte indexada).
- Detectar grupos fortemente conectados de indivíduos (ou **comunidades**) dentro das redes sociais;

Material bibliográfico e exercícios

T. Cormen et al. Algoritmos - Teoria e Prática (3a ed.). – **Cap. 22** (22.5)

Exercícios: ver exercícios no final do capítulo 22.5.

Dúvidas

Dúvidas?