Introdução às Redes de Interação – MO804 (MC908)
Redes dinâmicas: principais modelos

Prof. Dr. Ruben Interian

Instituto de Computação, UNICAMP

Resumo

Resumo

Objetivo

- **Modelo WS**: origem e características das redes de mundo pequeno.

Resumo

Introdução

Redes reais estão **cheias de caminhos curtos**:

Introdução

Redes reais estão **cheias de caminhos curtos**:

- **Paul Erdős**: matemático húngaro extremamente prolífico ($\approx$ 1500 artigos). Levava uma vida nômade viajando e colaborando com diversos pesquisadores.

Introdução

Redes reais estão **cheias de caminhos curtos**:

- **Paul Erdős**: matemático húngaro extremamente prolífico (≈ 1500 artigos). Levava uma vida nômade viajando e colaborando com diversos pesquisadores.
- *Um matemático é um dispositivo que transforma café em teoremas*, "O Livro".

Introdução

Redes reais estão **cheias de caminhos curtos**:

- **Paul Erdős**: matemático húngaro extremamente prolífico ($\approx$ 1500 artigos). Levava uma vida nômade viajando e colaborando com diversos pesquisadores.
- *Um matemático é um dispositivo que transforma café em teoremas*, “O Livro”.
- O **Número de Erdős** de um pesquisador é igual ao **menor número de Erdős** dos seus colaboradores $+1$. O número de Erdős de Erdős é zero.

Introdução

Redes reais estão **cheias de caminhos curtos**:

- **Paul Erdős**: matemático húngaro extremamente prolífico ($\approx$ 1500 artigos). Levava uma vida nômade viajando e colaborando com diversos pesquisadores.
- *Um matemático é um dispositivo que transforma café em teoremas*, "O Livro".
- O **Número de Erdős** de um pesquisador é igual ao **menor número de Erdős** dos seus colaboradores $+1$. O número de Erdős de Erdős é zero.
- Mesmo em outras áreas, os valores do número de Erdős são **pequenos**:

	#Laureates	#Erdős	%Erdős	Min	Max	Average
Fields Medal	56	56	100.0%	2	6	3.36
Nobel Physics	200	159	79.50%	2	12	5.63
Nobel Economics	76	47	61.84%	2	8	4.11

Fonte: *Mathematics and economics: a reality check*.

Introdução

AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
MATHSCINET
MATHEMATICAL REVIEWS

Universidade Estadual de Campinas

Author A

Interian, Ruben

Author B

Erdős, Paul[1]

MR Collaboration Distance = 4

Interian, Ruben	coauthored with	Ribeiro, Celso Carneiro	**MR**3740254
Ribeiro, Celso Carneiro	coauthored with	Pardalos, Panos M.	**MR**1960518
Pardalos, Panos M.	coauthored with	Graham, Ronald Lewis	**MR**2485301
Graham, Ronald Lewis	coauthored with	Erdős, Paul[1]	**MR**3437526

Introdução

Exemplo possivelmente mais famoso: **Teoria dos seis graus de separação**.

- **Hipótese**: são necessários no máximo **seis vínculos** por meio dos quais duas pessoas quaisquer no mundo estão ligadas.

Introdução

Exemplo possivelmente mais famoso: **Teoria dos seis graus de separação**.

- **Hipótese**: são necessários no máximo **seis vínculos** por meio dos quais duas pessoas quaisquer no mundo estão ligadas.
- O primeiro estudo empírico dessa teoria foi realizado nos anos 1960 pelo psicólogo social **Stanley Milgram**, também conhecido por seus controversos experimentos sobre **obediência**.

Introdução

Para testar essa hipótese, Stanley Milgram realizou o **experimento de mundo pequeno**.

Introdução

Para testar essa hipótese, Stanley Milgram realizou o **experimento de mundo pequeno**.

- Não existiam rede sociais (online). O **orçamento** de Milgram para o projeto foi de 680 dólares.

Introdução

Para testar essa hipótese, Stanley Milgram realizou o **experimento de mundo pequeno**.

- Não existiam rede sociais (online). O **orçamento** de Milgram para o projeto foi de 680 dólares.
- Milgram escolheu nos EUA 296 participantes do estudo. O objetivo era **fazer chegar uma carta** para uma única pessoa-alvo.

Introdução

Para testar essa hipótese, Stanley Milgram realizou o **experimento de mundo pequeno**.

- Não existiam rede sociais (online). O **orçamento** de Milgram para o projeto foi de 680 dólares.
- Milgram escolheu nos EUA 296 participantes do estudo. O objetivo era **fazer chegar uma carta** para uma única pessoa-alvo.
- Os participantes receberam algumas **informações pessoais** sobre o objetivo, como nome, endereço e emprego.

Introdução

Para testar essa hipótese, Stanley Milgram realizou o **experimento de mundo pequeno**.

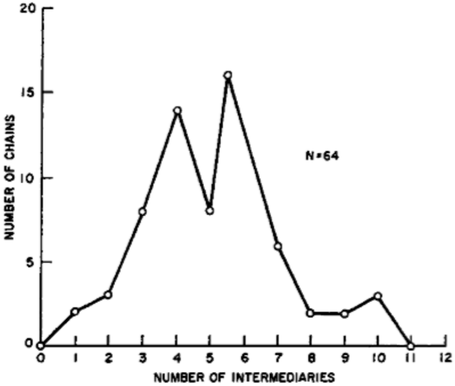
- Não existiam rede sociais (online). O **orçamento** de Milgram para o projeto foi de 680 dólares.
- Milgram escolheu nos EUA 296 participantes do estudo. O objetivo era **fazer chegar uma carta** para uma única pessoa-alvo.
- Os participantes receberam algumas **informações pessoais** sobre o objetivo, como nome, endereço e emprego.
- As regras do estudo eram: **somente** encaminhar a carta a uma pessoa que conhece pelo primeiro nome, com as mesmas instruções, com o **objetivo** de **alcançar o alvo o mais rápido possível**.

Introdução

Resultado **surpreendente** do experimento de Milgram: 64 cadeias de envios de cartas (caminhos na rede social) chegaram ao destino, com uma **mediana** de **6** envios – número que ficou então conhecido pela frase "**seis graus de separação**".

Introdução

Resultado **surpreendente** do experimento de Milgram: 64 cadeias de envios de cartas (caminhos na rede social) chegaram ao destino, com uma **mediana** de **6** envios – número que ficou então conhecido pela frase "**seis graus de separação**".



Introdução

Consequências:

- Os caminhos curtos entre quaisquer vértices são **abundantes**, e são uma característica básica da estrutura da sociedade e de outras redes.

Introdução

Consequências:

- Os caminhos curtos entre quaisquer vértices são **abundantes**, e são uma característica básica da estrutura da sociedade e de outras redes.
- A **velocidade** com que informações, doenças e comportamentos podem se espalhar pela sociedade cresce em um mundo interconectado.

Introdução

Consequências:

- Os caminhos curtos entre quaisquer vértices são **abundantes**, e são uma característica básica da estrutura da sociedade e de outras redes.
- A **velocidade** com que informações, doenças e comportamentos podem se espalhar pela sociedade cresce em um mundo interconectado.
- Os caminhos curtos não apenas **existem**, mas muitas vezes é possível **encontrar** esses caminhos curtos **sem precisar conhecer a estrutura** geral e global da sociedade.

Resumo

Desordem garante caminhos curtos

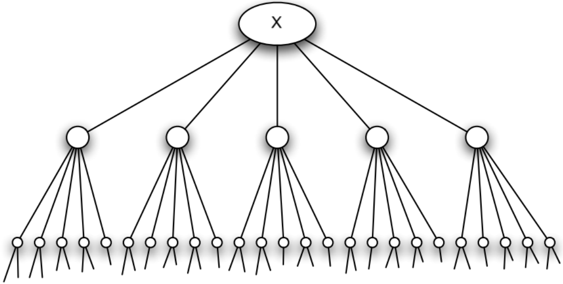
- Vimos que, em redes aleatórias, o **diâmetro** do grafo é relativamente pequeno.

Desordem garante caminhos curtos

- Vimos que, em redes aleatórias, o **diâmetro** do grafo é relativamente pequeno.
- O **diâmetro** é proporcional a $\log n$. Veja que $\log_{10} 10^6 = 6$ – **seis graus de separação**!

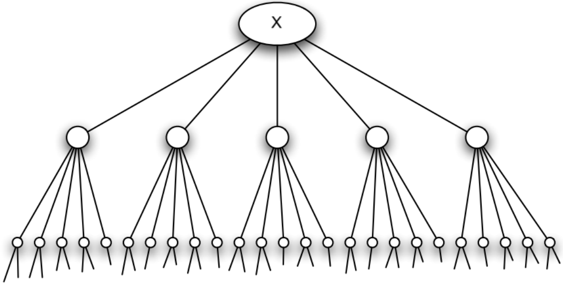
Desordem garante caminhos curtos

- Vimos que, em redes aleatórias, o **diâmetro** do grafo é relativamente pequeno.
- O **diâmetro** é proporcional a $\log n$. Veja que $\log_{10} 10^6 = 6$ – **seis graus de separação**!



Desordem garante caminhos curtos

- Vimos que, em redes aleatórias, o **diâmetro** do grafo é relativamente pequeno.
- O **diâmetro** é proporcional a $\log n$. Veja que $\log_{10} 10^6 = 6$ – **seis graus de separação**!



- A **desordem** de vínculos garante caminhos curtos.

Desordem garante caminhos curtos

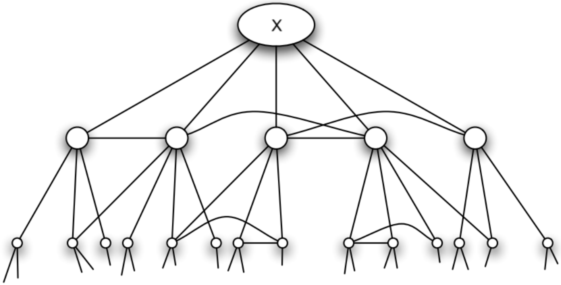
- O **fecho triádico** diminui o crescimento exponencial dos vértices alcançáveis por caminhos curtos.

Desordem garante caminhos curtos

- O **fecho triádico** diminui o crescimento exponencial dos vértices alcançáveis por caminhos curtos.
- Porém, os **coeficientes de clusterização** em redes aleatórias são **pequenos**.

Desordem garante caminhos curtos

- O **fecho triádico** diminui o crescimento exponencial dos vértices alcançáveis por caminhos curtos.
- Porém, os **coeficientes de clusterização** em redes aleatórias são **pequenos**.



Redes *ordenadas*

- Sabemos que redes reais **não são aleatórias**, mas apresentam comportamento homofílico: vértices se conectam com vértices **semelhantes**.

Redes *ordenadas*

- Sabemos que redes reais **não são aleatórias**, mas apresentam comportamento homofílico: vértices se conectam com vértices **semelhantes**.
- Em particular, vértices se conectam com vértices com os quais compartilham **características** (e.g., vizinhos comuns).

Redes *ordenadas*

- Sabemos que redes reais **não são aleatórias**, mas apresentam comportamento homofílico: vértices se conectam com vértices **semelhantes**.
- Em particular, vértices se conectam com vértices com os quais compartilham **características** (e.g., vizinhos comuns).
- Em consequência, os coeficientes de clusterização **não são pequenos**.

Redes *ordenadas*

- Sabemos que redes reais **não são aleatórias**, mas apresentam comportamento homofílico: vértices se conectam com vértices **semelhantes**.
- Em particular, vértices se conectam com vértices com os quais compartilham **características** (e.g., vizinhos comuns).
- Em consequência, os coeficientes de clusterização **não são pequenos**.
- A forma mais simples de definir redes com essas características é usando os **grafos regulares**.

Redes *ordenadas*

Os **grafos regulares**, em particular as *malhas*, são o **oposto** das redes aleatórias, sendo caracterizados pela **ordem** nas suas conexões:

Redes *ordenadas*

Os **grafos regulares**, em particular as *malhas*, são o **oposto** das redes aleatórias, sendo caracterizados pela **ordem** nas suas conexões:

- Todos os vértices possuem o mesmo grau k.

Redes *ordenadas*

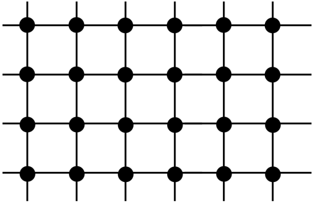
Os **grafos regulares**, em particular as *malhas*, são o **oposto** das redes aleatórias, sendo caracterizados pela **ordem** nas suas conexões:

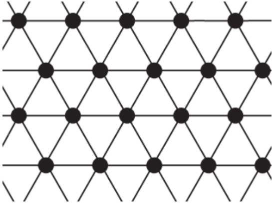
- Todos os vértices possuem o mesmo grau k.
- Cada par de vértices adjacentes possuem o mesmo número ℓ de vizinhos em comum (grafo **fortemente regular**).

Redes *ordenadas*

Os **grafos regulares**, em particular as *malhas*, são o **oposto** das redes aleatórias, sendo caracterizados pela **ordem** nas suas conexões:

- Todos os vértices possuem o mesmo grau k.
- Cada par de vértices adjacentes possuem o mesmo número ℓ de vizinhos em comum (grafo **fortemente regular**).
- **Exemplos**:





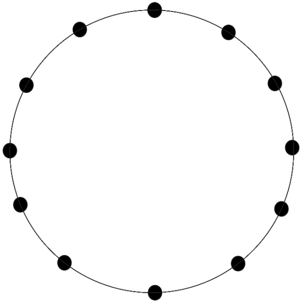
Redes *ordenadas*

Outro exemplo ainda **mais simples** – malha unidimensional.

Redes *ordenadas*

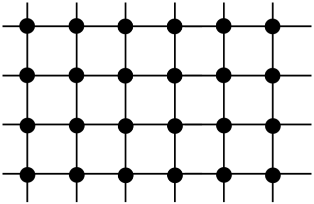
Outro exemplo ainda **mais simples** – malha unidimensional.

Se trabalhamos com malhas finitas, evitamos problemas (e.g., diferenças nos graus), criando **malhas periódicas**.



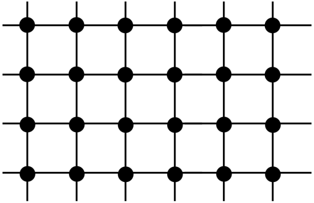
Redes *ordenadas*

Malhas retangulares também podem ser periódicas:

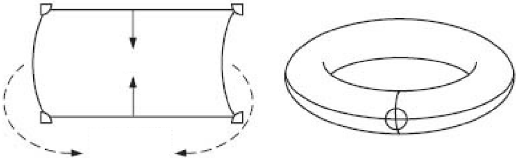


Redes *ordenadas*

Malhas retangulares também podem ser periódicas:



$\Rightarrow$

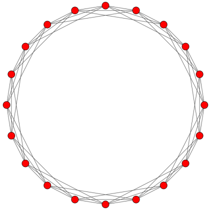


Redes *ordenadas*

A partir de uma malha, podemos criar grafos regulares com (i) **diferentes graus**, e (ii) **coeficientes de clusterização** altos.

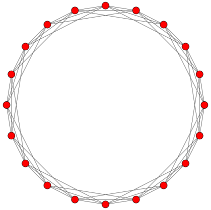
Redes *ordenadas*

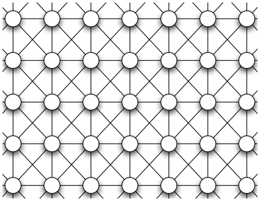
A partir de uma malha, podemos criar grafos regulares com (i) **diferentes graus**, e (ii) **coeficientes de clusterização** altos.



Redes *ordenadas*

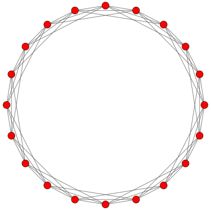
A partir de uma malha, podemos criar grafos regulares com (i) **diferentes graus**, e (ii) **coeficientes de clusterização** altos.

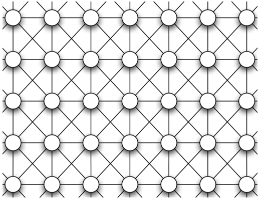




Redes *ordenadas*

A partir de uma malha, podemos criar grafos regulares com (i) **diferentes graus**, e (ii) **coeficientes de clusterização** altos.





As **distancias** entre os vértices nesses grafos são grandes.

Resumo

Redes dinâmicas: modelo WS

Lembrando: o modelo **Watts-Strogatz** (WS), ou de mundo pequeno, é um modelo **estocástico e estrutural**.

Redes dinâmicas: modelo WS

Lembrando: o modelo **Watts-Strogatz** (WS), ou de mundo pequeno, é um modelo **estocástico e estrutural**.

- Estudamos comportamentos ou regras dos vértices que levam a uma determinada **estrutura** que geralmente observamos.

Redes dinâmicas: modelo WS

Lembrando: o modelo **Watts-Strogatz** (WS), ou de mundo pequeno, é um modelo **estocástico e estrutural**.

- Estudamos comportamentos ou regras dos vértices que levam a uma determinada **estrutura** que geralmente observamos.
- Estrutura que geralmente observamos em redes reais: nível significativo de cumprimento do **fecho triádico**, refletido em um alto coeficiente de clusterização, e **ao mesmo tempo** distâncias pequenas entre os vértices.

Redes dinâmicas: modelo WS

Lembrando: o modelo **Watts-Strogatz** (WS), ou de mundo pequeno, é um modelo **estocástico e estrutural**.

- Estudamos comportamentos ou regras dos vértices que levam a uma determinada **estrutura** que geralmente observamos.
- Estrutura que geralmente observamos em redes reais: nível significativo de cumprimento do **fecho triádico**, refletido em um alto coeficiente de clusterização, e **ao mesmo tempo** distâncias pequenas entre os vértices.
- Watts e Strogatz tentaram responder a **questão**:
  Qual é o modelo mais simples que pode replicar o fenômeno do mundo pequeno?

Redes dinâmicas: modelo WS

O modelo WS é **baseado** na existência de dois tipos de vínculos.

- Vínculos "**curtos**" (relacionados à ideia da **ordem**). Podemos modelar os vínculos curtos usando malhas.

Redes dinâmicas: modelo WS

O modelo WS é **baseado** na existência de dois tipos de vínculos.

- Vínculos "**curtos**" (relacionados à ideia da **ordem**). Podemos modelar os vínculos curtos usando malhas.
- Vínculos "**longos**", ou **fracos** (**desordem**). Podemos modelar os vínculos fracos usando arestas aleatórias.

Redes dinâmicas: modelo WS

WS $(G = (V, E), M)$

$E' \leftarrow \emptyset$
para cada $i = 1, \ldots, M$ **faça**
    $(v_i, v_j) \leftarrow \text{Random}(E)$
    $w \leftarrow \text{Random}(V \setminus \{v_i\})$
    $E \leftarrow E \setminus \{(v_i, v_j)\}$
    $E' \leftarrow E' \cup \{(v_i, w)\}$
devolva $G = (V, E \cup E')$

Redes dinâmicas: modelo WS

WS $(G = (V, E), M)$

1: $E' \leftarrow \emptyset$
2: **para cada** $i = 1, \ldots, M$ **faça**
3: $\quad (v_i, v_j) \leftarrow \text{Random}(E)$
4: $\quad w \leftarrow \text{Random}(V \setminus \{v_i\})$
5: $\quad E \leftarrow E \setminus \{(v_i, v_j)\}$
6: $\quad E' \leftarrow E' \cup \{(v_i, w)\}$
7: **devolva** $G = (V, E \cup E')$

- Temos um grafo G inicial, tipicamente regular, sendo K o grau de cada vértice.

Redes dinâmicas: modelo WS

WS $(G = (V, E), M)$

$E' \leftarrow \emptyset$
para cada $i = 1, \dots, M$ **faça**
    $(v_i, v_j) \leftarrow \mathrm{Random}(E)$
    $w \leftarrow \mathrm{Random}(V \setminus \{v_i\})$
    $E \leftarrow E \setminus \{(v_i, v_j)\}$
    $E' \leftarrow E' \cup \{(v_i, w)\}$
devolva $G = (V, E \cup E')$

- Temos um grafo G inicial, tipicamente regular, sendo K o grau de cada vértice.
- Sabemos tudo sobre os casos $M = 0$ e $M = |E|$, mas quase nada se $0 < M < |E|$.

Redes dinâmicas: modelo WS

WS $(G = (V, E), M)$

1: $E' \leftarrow \emptyset$
2: **para cada** $i = 1, \ldots, M$ **faça**
3: $\quad (v_i, v_j) \leftarrow \text{Random}(E)$
4: $\quad w \leftarrow \text{Random}(V \setminus \{v_i\})$
5: $\quad E \leftarrow E \setminus \{(v_i, v_j)\}$
6: $\quad E' \leftarrow E' \cup \{(v_i, w)\}$
7: **devolva** $G = (V, E \cup E')$

- Temos um grafo G inicial, tipicamente regular, sendo K o grau de cada vértice.
- Sabemos tudo sobre os casos $M = 0$ e $M = |E|$, mas quase nada se $0 < M < |E|$.
- Para $|E|$ grande, o modelo é equivalente a aleatorizar cada aresta do grafo com probabilidade $\beta = M/|E|$.

Redes dinâmicas: modelo WS

WS $(G = (V, E), \beta)$

$E' \leftarrow \emptyset$
para cada $(v_i, v_j) \in E$ **faça**
    se $\text{Random}(0, 1) \leq \beta$ **então**
        $w \leftarrow \text{Random}(V \setminus \{v_i\})$
        $E \leftarrow E \setminus \{(v_i, v_j)\}$
        $E' \leftarrow E' \cup \{(v_i, w)\}$
devolva $G = (V, E \cup E')$

Redes dinâmicas: modelo WS

WS $(G = (V, E), \beta)$

1: $E' \leftarrow \emptyset$
2: **para cada** $(v_i, v_j) \in E$ **faça**
3: **se** Random$(0, 1) \leq \beta$ **então**
4: $w \leftarrow$ Random$(V \setminus \{v_i\})$
5: $E \leftarrow E \setminus \{(v_i, v_j)\}$
6: $E' \leftarrow E' \cup \{(v_i, w)\}$
7: **devolva** $G = (V, E \cup E')$

- Sabemos o que ocorre se $\beta = 0$ e se $\beta = 1$, mas quase nada se $0 < \beta < 1$.

Redes dinâmicas: modelo WS

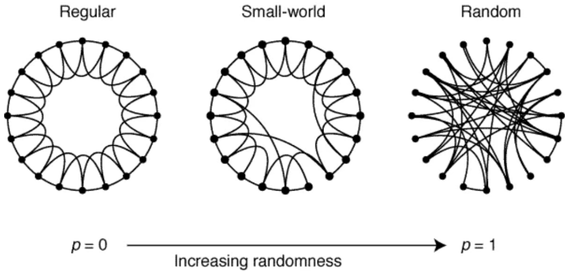
WS $(G = (V, E), \beta)$

1: $E' \leftarrow \emptyset$
2: **para cada** $(v_i, v_j) \in E$ **faça**
3: **se** Random$(0, 1) \leq \beta$ **então**
4: $w \leftarrow$ Random$(V \setminus \{v_i\})$
5: $E \leftarrow E \setminus \{(v_i, v_j)\}$
6: $E' \leftarrow E' \cup \{(v_i, w)\}$
7: **devolva** $G = (V, E \cup E')$

- Sabemos o que ocorre se $\beta = 0$ e se $\beta = 1$, mas quase nada se $0 < \beta < 1$.
- Na versão original do algoritmo, G é uma malha regular periódica unidimensional, mais conhecida como rede de anel (ver o próximo slide).

Redes dinâmicas: modelo WS

Mudanças na rede inicial durante a execução do **modelo WS**, malha unidimensional.
(D. Watts & S. Strogatz: Collective dynamics of 'small-world' networks)



Redes dinâmicas: modelo WS

Vamos analisar as **características do modelo**:

- **Coeficiente de clusterização**;
- **Distância media**;
- **Distribuição de graus**.

Redes dinâmicas: modelo WS

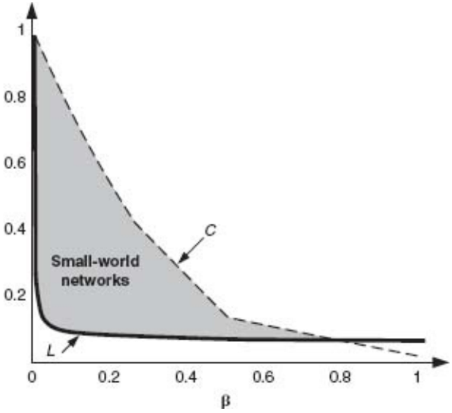
Vamos analisar as **características do modelo**:

- **Coeficiente de clusterização**;
- **Distância media**;
- **Distribuição de graus**.

$$P(k) \approx \sum_{n=0}^{f(k,K)} \binom{K/2}{n} (1-\beta)^n \beta^{K/2-n} \frac{(\beta K/2)^{k-K/2-n}}{(k-K/2-n)!} e^{-\beta K/2}.$$

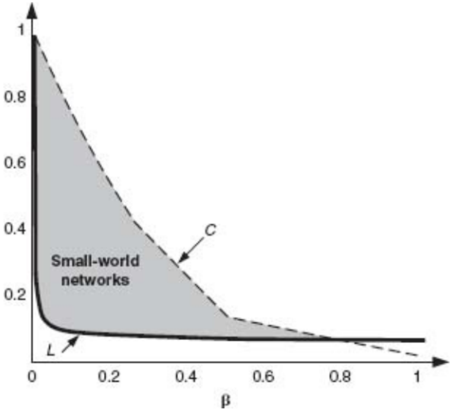
Redes dinâmicas: modelo WS

Valores do **coeficiente de clusterização** e **distância media** no modelo WS.
(D. Watts, “Six degrees: The science of a connected age”)



Redes dinâmicas: modelo WS

Valores do **coeficiente de clusterização** e **distância media** no modelo WS.
(D. Watts, "Six degrees: The science of a connected age")



Curiosidade:
A randomização das cinco primeiras arestas reduz a distância média $\approx$ pela metade, **independentemente do número de vértices na rede**.

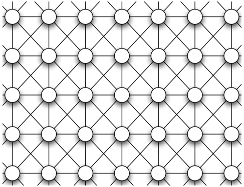
Redes dinâmicas: modelo WS

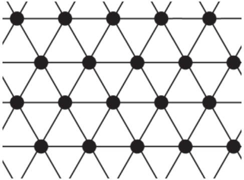
Embora foram escolhidas redes regulares (malhas) como estrutura inicial no modelo WS, é possível escolher **outras estruturas**.

Redes dinâmicas: modelo WS

Embora foram escolhidas redes regulares (malhas) como estrutura inicial no modelo WS, é possível escolher **outras estruturas**.

- O algoritmo pode ser aplicado em **malhas bidimensionais**.

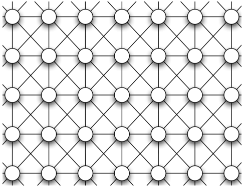


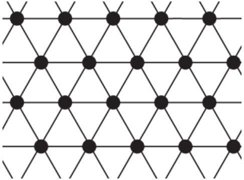


Redes dinâmicas: modelo WS

Embora foram escolhidas redes regulares (malhas) como estrutura inicial no modelo WS, é possível escolher **outras estruturas**.

- O algoritmo pode ser aplicado em **malhas bidimensionais**.



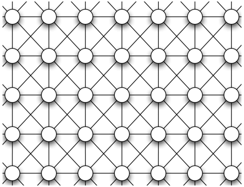


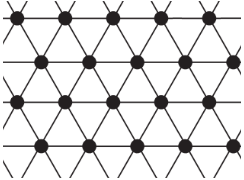
- Podemos escolher grafos **mais realistas**, com resultados **similares**: randomizando uma quantidade **pequena** de arestas, é possível criar o efeito de mundo pequeno.

Redes dinâmicas: modelo WS

Embora foram escolhidas redes regulares (malhas) como estrutura inicial no modelo WS, é possível escolher **outras estruturas**.

- O algoritmo pode ser aplicado em **malhas bidimensionais**.





- Podemos escolher grafos **mais realistas**, com resultados **similares**: randomizando uma quantidade **pequena** de arestas, é possível criar o efeito de mundo pequeno.
- Este processo mantém o coeficiente de clusterização **quase inalterado** (por exemplo, pode manter seus valores iniciais altos).

Redes dinâmicas: modelo WS

Redes de pequeno mundo surgem de um **compromisso** muito simples entre duas forças básicas: ordem e desordem.

Redes dinâmicas: modelo WS

Redes de pequeno mundo surgem de um **compromisso** muito simples entre duas forças básicas: ordem e desordem. Existem **dois extremos**:

- **Ordem** (redes regulares): coeficientes de clusterização altos, distâncias grandes.
- **Desordem** (redes aleatórias): coeficientes de clusterização baixos, distâncias pequenas.

Redes dinâmicas: modelo WS

Redes de pequeno mundo surgem de um **compromisso** muito simples entre duas forças básicas: ordem e desordem. Existem **dois extremos**:

- **Ordem** (redes regulares): coeficientes de clusterização altos, distâncias grandes.
- **Desordem** (redes aleatórias): coeficientes de clusterização baixos, distâncias pequenas.

Em relação a esses critérios, **o mundo real fica no meio!**

Redes dinâmicas: modelo WS

A estrutura **social** pode ser explicada por **dois grupos de fatores**:

1. Em parte, pela família na qual nascemos, país onde moramos – a posição que ocupamos na estrutura social.

Redes dinâmicas: modelo WS

A estrutura **social** pode ser explicada por **dois grupos de fatores**:

1. Em parte, pela família na qual nascemos, país onde moramos – a posição que ocupamos na estrutura social.
2. Em parte, pelas nossas nossas características naturais e inatas, pelas nossas preferências.

Redes dinâmicas: modelo WS

A estrutura **social** pode ser explicada por **dois grupos de fatores**:

1. Em parte, pela família na qual nascemos, país onde moramos – a posição que ocupamos na estrutura social.
2. Em parte, pelas nossas nossas características naturais e inatas, pelas nossas preferências.

A estrutura social é explicada pelo **trade-off** entre ambos os fatores.

Redes dinâmicas: modelo WS

A estrutura das **redes biológicas** pode ser explicada por **dois grupos de fatores**:

1. Em parte, pela função de cada molécula, proteína, gene – a posição que eles ocupam na estrutura da rede.

Redes dinâmicas: modelo WS

A estrutura das **redes biológicas** pode ser explicada por **dois grupos de fatores**:

1. Em parte, pela função de cada molécula, proteína, gene – a posição que eles ocupam na estrutura da rede.
2. Em parte, pela variabilidade (**aleatoriedade**) genética, pelas mutações, pelos eventos que ocorrem durante a vida do organismo.

Redes dinâmicas: modelo WS

A estrutura das **redes biológicas** pode ser explicada por **dois grupos de fatores**:

1. Em parte, pela função de cada molécula, proteína, gene – a posição que eles ocupam na estrutura da rede.
2. Em parte, pela variabilidade (**aleatoriedade**) genética, pelas mutações, pelos eventos que ocorrem durante a vida do organismo.

A estrutura das redes biológicas é explicada pelo **trade-off** entre ambos os fatores.

Redes dinâmicas: modelo WS

Em resumo: O modelo WS gera redes **de mundo pequeno** (*small-world*).

Redes dinâmicas: modelo WS

Em resumo: O modelo WS gera redes **de mundo pequeno** (*small-world*).

1. Os **graus** dos vértices são similares.

Redes dinâmicas: modelo WS

Em resumo: O modelo WS gera redes **de mundo pequeno** (*small-world*).

1. Os **graus** dos vértices são similares.
2. Os **coeficientes de clusterização** são altos.

Redes dinâmicas: modelo WS

Em resumo: O modelo WS gera redes **de mundo pequeno** (*small-world*).

1. Os **graus** dos vértices são similares.
2. Os **coeficientes de clusterização** são altos.
3. As **distâncias** são pequenas ($O(\log n)$ mesmo com β pequeno).

Material bibliográfico

D. Watts: "Six degrees: The science of a connected age" (2003).

D. Watts & S. Strogatz: Collective dynamics of 'small-world' networks (1998).

Dúvidas

Dúvidas?