Introdução às Redes de Interação – MO804 (MC908)
Modelos epidêmicos: doenças e boatos

Prof. Dr. Ruben Interian

Instituto de Computação, UNICAMP

Resumo

Resumo

Objetivo

- Estudar as características dos **modelos epidêmicos** de doenças e boatos em redes que os transmitem.

Resumo

Modelos epidêmicos

Modelos **epidêmicos**

- Há diversos modelos **compartimentais**, com diferentes **graus de complexidade**.

Modelos epidêmicos

Modelos **epidêmicos**

- Há diversos modelos **compartimentais**, com diferentes **graus de complexidade**.
- No modelo básico **SIR**, há **3** compartimentos: Suscetível, Infectado, Recuperado.

Modelos epidêmicos

Modelos **epidêmicos**

- Há diversos modelos **compartimentais**, com diferentes **graus de complexidade**.
- No modelo básico **SIR**, há **3** compartimentos: Suscetível, Infectado, Recuperado.
- Consideramos **3** variáveis, S, I, R: **proporções** de indivíduos nesses estados.

Modelos epidêmicos

Modelos **epidêmicos**

- Há diversos modelos **compartimentais**, com diferentes **graus de complexidade**.
- No modelo básico **SIR**, há **3** compartimentos: Suscetível, Infectado, Recuperado.
- Consideramos **3** variáveis, S, I, R: **proporções** de indivíduos nesses estados.
- Os estados mudam no tempo: $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$ são **funções**.

Modelos epidêmicos

Modelos **epidêmicos**

- Há diversos modelos **compartimentais**, com diferentes **graus de complexidade**.
- No modelo básico **SIR**, há **3** compartimentos: Suscetível, Infectado, Recuperado.
- Consideramos **3** variáveis, S, I, R: **proporções** de indivíduos nesses estados.
- Os estados mudam no tempo: $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$ são **funções**.

Modelos epidêmicos

O modelo **SIR** é representado pelo sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} & = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} & = \beta SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} & = \gamma I \end{cases}$$

Modelos epidêmicos

O modelo **SIR** é representado pelo sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} &= -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I \end{cases}$$

- β: número médio de contatos infecciosos de uma pessoa por unidade de tempo.

Modelos epidêmicos

O modelo **SIR** é representado pelo sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} & = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} & = \beta SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} & = \gamma I \end{cases}$$

- β: número médio de contatos infecciosos de uma pessoa por unidade de tempo.
- γ: taxa de recuperação dos indivíduos infectados (tempo médio infectado $= \frac{1}{\gamma}$).

Modelos epidêmicos

O modelo **SIR** é representado pelo sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} & = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} & = \beta SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} & = \gamma I \end{cases}$$

- β: número médio de contatos infecciosos de uma pessoa por unidade de tempo.
- γ: taxa de recuperação dos indivíduos infectados (tempo médio infectado $= \frac{1}{\gamma}$).
- $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$ indica, na média, quantas pessoas consegue infectar um indivíduo durante o período $\approx \frac{1}{\gamma}$ no qual ele está infectado. A propagação inicia **apenas** se $R_0 \geq 1$.

Modelos epidêmicos

Suposições feitas na formulação do modelo:

1. O número de contatos por unidade de tempo é **igual** ou parecido para todos.
2. Qualquer indivíduo pode entrar em contato com **qualquer outro** indivíduo.

Modelos epidêmicos

Suposições feitas na formulação do modelo:

1. O número de contatos por unidade de tempo é **igual** ou parecido para todos.
2. Qualquer indivíduo pode entrar em contato com **qualquer outro** indivíduo.

As epidemias reais não se comportam exatamente como no modelo pelas **falhas** nas suposições iniciais:

1. Os graus variam. As redes de contatos são frequentemente **livres de escala**.
2. Um indivíduo pode transmitir uma doença somente **para determinadas pessoas**.

Resumo

Modelos epidêmicos em redes

Modelo SIR em redes arbitrarias: parâmetros.

- p – probabilidade de contágio de $v \in I$ para $w \in S$ em cada iteração;

Modelos epidêmicos em redes

Modelo SIR em redes arbitrarias: parâmetros.

- p – probabilidade de contágio de $v \in I$ para $w \in S$ em cada iteração;
- μ – taxa de recuperação dos infectados por iteração (γ no **SIR** original).

Modelos epidêmicos em redes

Modelo SIR em redes arbitrarias: parâmetros.

- p – probabilidade de contágio de $v \in I$ para $w \in S$ em cada iteração;
- μ – taxa de recuperação dos infectados por iteração (γ no **SIR** original).

Algoritmo:

- No inicio, todos os nós estão em S, com exceção de um ou alguns nós em I.

Modelos epidêmicos em redes

Modelo SIR em redes arbitrarias: parâmetros.

- p – probabilidade de contágio de $v \in I$ para $w \in S$ em cada iteração;
- μ – taxa de recuperação dos infectados por iteração (γ no **SIR** original).

Algoritmo:

- No inicio, todos os nós estão em S, com exceção de um ou alguns nós em I.
- Cada nó em I:
  - Permanece infectado durante $\frac{1}{\mu}$ iterações, e vai para R (**v1**).

Modelos epidêmicos em redes

Modelo SIR em redes arbitrarias: parâmetros.

- p – probabilidade de contágio de $v \in I$ para $w \in S$ em cada iteração;
- μ – taxa de recuperação dos infectados por iteração (γ no **SIR** original).

Algoritmo:

- No inicio, todos os nós estão em S, com exceção de um ou alguns nós em I.
- Cada nó em I:
  - Permanece infectado durante $\frac{1}{\mu}$ iterações, e vai para R (**v1**).
  - Se recupera com probabilidade μ em cada iteração, e vai para R (**v2**).

Modelos epidêmicos em redes

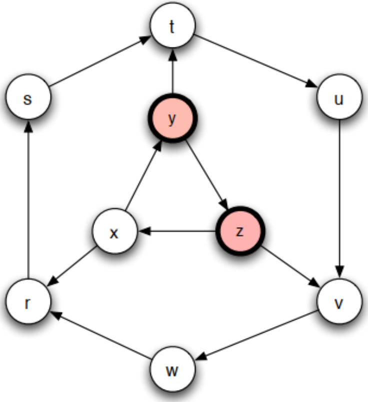
Modelo SIR em redes arbitrarias: parâmetros.

- p – probabilidade de contágio de $v \in I$ para $w \in S$ em cada iteração;
- μ – taxa de recuperação dos infectados por iteração (γ no **SIR** original).

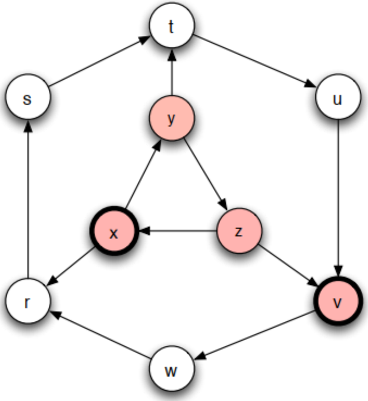
Algoritmo:

- No inicio, todos os nós estão em S, com exceção de um ou alguns nós em I.
- Cada nó em I:
  - Permanece infectado durante $\frac{1}{\mu}$ iterações, e vai para R (**v1**).
  - Se recupera com probabilidade μ em cada iteração, e vai para R (**v2**).
- Em cada iteração, cada nó $v \in I$ pode infectar cada um dos seus adjacentes que estão em S com probabilidade p.

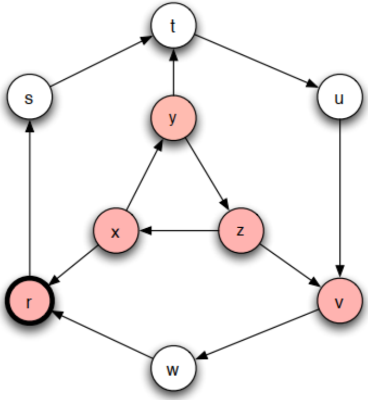
Modelos epidêmicos em redes: Exemplo



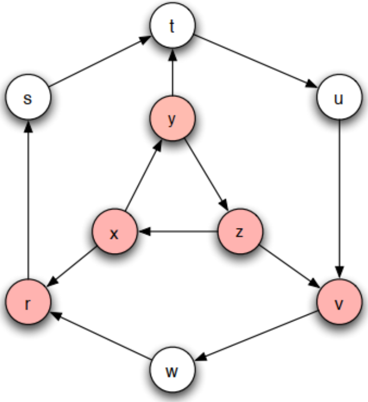
Modelos epidêmicos em redes: Exemplo



Modelos epidêmicos em redes: Exemplo



Modelos epidêmicos em redes: Exemplo



Modelos epidêmicos em redes

Comparando os parâmetros da versão continua e discreta do modelo:

Modelo	**Parâmetros**	**Propagação**
SIR	β, contatos infecciosos $\times$ nó $\times$ un. tempo	$R_0 = \frac{\beta}{\gamma} > 1$
	γ, taxa de recuperação por un. tempo	
SIR em redes	p, probabilidade de contágio $\times$ un. tempo	?
	μ, taxa de recuperação por un. tempo	

Modelos epidêmicos em redes

Comparando os parâmetros da versão continua e discreta do modelo:

Modelo	Parâmetros	Propagação
SIR	β, contatos infecciosos $\times$ nó $\times$ un. tempo	$R_0 = \frac{\beta}{\gamma} > 1$
	γ, taxa de recuperação por un. tempo	
SIR em redes	p, probabilidade de contágio $\times$ un. tempo	?
	μ, taxa de recuperação por un. tempo	

Pergunta: quais devem ser os **valores dos parâmetros** para que a epidemia se propague em uma rede?

Modelos epidêmicos em redes

Comparando os parâmetros da versão continua e discreta do modelo:

Modelo	**Parâmetros**	**Propagação**
SIR	β, contatos infecciosos $\times$ nó $\times$ un. tempo	$R_0 = \frac{\beta}{\gamma} > 1$
	γ, taxa de recuperação por un. tempo	
SIR em redes	p, probabilidade de contágio $\times$ un. tempo	?
	μ, taxa de recuperação por un. tempo	

Pergunta: quais devem ser os **valores dos parâmetros** para que a epidemia se propague em uma rede? **Relação** entre os parâmetros:

β é semelhante a $p \cdot k$, onde k é o grau de um nó; γ é semelhante a μ.

Modelos epidêmicos em redes

Comparando os parâmetros da versão continua e discreta do modelo:

Modelo	Parâmetros	Propagação
SIR	β, contatos infecciosos $\times$ nó $\times$ un. tempo	$R_0 = \frac{\beta}{\gamma} > 1$
	γ, taxa de recuperação por un. tempo	
SIR em redes	p, probabilidade de contágio $\times$ un. tempo	?
	μ, taxa de recuperação por un. tempo	

Pergunta: quais devem ser os **valores dos parâmetros** para que a epidemia se propague em uma rede? **Relação** entre os parâmetros:

β é semelhante a $p \cdot k$, onde k é o grau de um nó; γ é semelhante a μ.

Aparentemente, $R_0 \approx \frac{p\bar{k}}{\mu}$ ...

Modelos epidêmicos em redes

Comparando os parâmetros da versão continua e discreta do modelo:

Modelo	Parâmetros	Propagação
SIR	β, contatos infecciosos $\times$ nó $\times$ un. tempo	$R_0 = \frac{\beta}{\gamma} > 1$
	γ, taxa de recuperação por un. tempo	
SIR em redes	p, probabilidade de contágio $\times$ un. tempo	?
	μ, taxa de recuperação por un. tempo	

Pergunta: quais devem ser os **valores dos parâmetros** para que a epidemia se propague em uma rede? **Relação** entre os parâmetros:

β é semelhante a $p \cdot k$, onde k é o grau de um nó; γ é semelhante a μ.

Aparentemente, $R_0 \approx \frac{p\bar{k}}{\mu}$ ... Na verdade, essa aproximação não é muito boa, pois a propagação depende fortemente do **tipo de rede** considerada.

Modelos epidêmicos em redes

Até agora, temos a **aproximação**:

$$R_0 \approx \frac{p\overline{k}}{\mu} > 1,$$

onde $\frac{p}{\mu}$ é chamado de taxa de propagação (depende das características da doença), e $\overline{k}$ é o grau médio na rede.

Modelos epidêmicos em redes

Até agora, temos a **aproximação**:

$$R_0 \approx \frac{p\overline{k}}{\mu} > 1,$$

onde $\frac{p}{\mu}$ é chamado de taxa de propagação (depende das características da doença), e $\overline{k}$ é o grau médio na rede.

Quais são os limites dessa aproximação?

Modelos epidêmicos em redes

Até agora, temos a **aproximação**:

$$R_0 \approx \frac{p\overline{k}}{\mu} > 1,$$

onde $\frac{p}{\mu}$ é chamado de taxa de propagação (depende das características da doença), e $\overline{k}$ é o grau médio na rede.

Quais são os limites dessa aproximação? – Essa aproximação é boa **apenas** quando todos os graus são iguais ou muito semelhantes.

Modelos epidêmicos em redes

Até agora, temos a **aproximação**:

$$R_0 \approx \frac{p\overline{k}}{\mu} > 1,$$

onde $\frac{p}{\mu}$ é chamado de taxa de propagação (depende das características da doença), e $\overline{k}$ é o grau médio na rede.

Quais são os limites dessa aproximação? – Essa aproximação é boa **apenas** quando todos os graus são iguais ou muito semelhantes.

Problema: Não estamos considerando o impacto das diferenças nos graus dos vértices.

Precisamos **incorporar** o efeito das diferenças nos graus para chegar à condição necessária para que a propagação ocorra.

Modelos epidêmicos em redes

Momentos de uma distribuição:

- O n-ésimo momento de uma variável aleatória X com distribuição $f(x_i)$:

$$\langle X^n \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}\left[X^n\right] = \sum_i x_i^n f(x_i).$$

Modelos epidêmicos em redes

Momentos de uma distribuição:

- O n-ésimo momento de uma variável aleatória X com distribuição $f(x_i)$:

$$\langle X^n \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}\left[X^n\right] = \sum_i x_i^n f(x_i).$$

Seja a **distribuição de graus** da rede $P(k) = \frac{n_k}{|V|}$.

- 1^{ro} momento da distribuição de graus: $\langle k \rangle = \mathrm{E}\left[k\right] = \sum k_i p(k_i)$ (grau médio).

Modelos epidêmicos em redes

Momentos de uma distribuição:

- O n-ésimo momento de uma variável aleatória X com distribuição $f(x_i)$:

$$\langle X^n \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}[X^n] = \sum_i x_i^n f(x_i).$$

Seja a **distribuição de graus** da rede $P(k) = \frac{n_k}{|V|}$.

- 1^{ro} momento da distribuição de graus: $\langle k \rangle = \mathrm{E}[k] = \sum k_i p(k_i)$ (grau médio).
- 2^{do} momento da distribuição de graus: $\langle k^2 \rangle = \mathrm{E}\left[k^2\right] = \sum k_i^2 p(k_i)$.

Modelos epidêmicos em redes

Momentos de uma distribuição:

- O n-ésimo momento de uma variável aleatória X com distribuição $f(x_i)$:

$$\langle X^n \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}\left[X^n\right] = \sum_i x_i^n f(x_i).$$

Seja a **distribuição de graus** da rede $P(k) = \frac{n_k}{|V|}$.

- 1^{ro} momento da distribuição de graus: $\langle k \rangle = \mathrm{E}\left[k\right] = \sum k_i p(k_i)$ (grau médio).
- 2^{do} momento da distribuição de graus: $\langle k^2 \rangle = \mathrm{E}\left[k^2\right] = \sum k_i^2 p(k_i)$.

2^{do} momento **vs** variância: $\mathrm{var}(k) = \mathrm{E}\left[(k - \mathrm{E}[k])^2\right] = \mathrm{E}\left[k^2\right] - \mathrm{E}[k]^2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2$.

Modelos epidêmicos em redes

Pode ser demonstrado [Barabási 2016] que a propagação ocorre **apenas** se a taxa de propagação $\frac{p}{\mu}$ cumpre a propriedade:

Modelos epidêmicos em redes

Pode ser demonstrado [Barabási 2016] que a propagação ocorre **apenas** se a taxa de propagação $\frac{p}{\mu}$ cumpre a propriedade:

$$\frac{p}{\mu} > \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle} = \frac{1}{\frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} - 1}.$$

Modelos epidêmicos em redes

Pode ser demonstrado [Barabási 2016] que a propagação ocorre **apenas** se a taxa de propagação $\frac{p}{\mu}$ cumpre a propriedade:

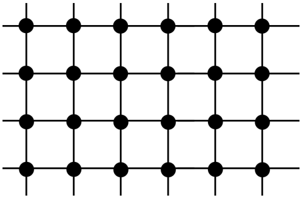
$$\frac{p}{\mu} > \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle} = \frac{1}{\frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} - 1}.$$

Importante: Esta é uma aproximação **muito melhor**!

Modelos epidêmicos em redes

SIR em redes: Propagação em diferentes tipos de grafos.

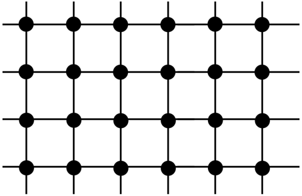
Redes regulares: todos os vértices têm grau d.



Modelos epidêmicos em redes

SIR em redes: Propagação em diferentes tipos de grafos.

Redes regulares: todos os vértices têm grau d.

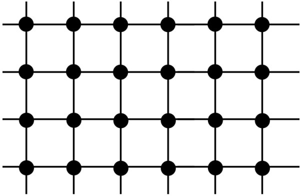


- **Distribuição**: $P(k = d) = 1$, o resto 0.

Modelos epidêmicos em redes

SIR em redes: Propagação em diferentes tipos de grafos.

Redes regulares: todos os vértices têm grau d.

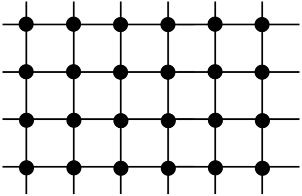


- **Distribuição**: $P(k = d) = 1$, o resto 0.
- $\langle k \rangle = ?$ $\quad \langle k \rangle = d$.

Modelos epidêmicos em redes

SIR em redes: Propagação em diferentes tipos de grafos.

Redes regulares: todos os vértices têm grau d.

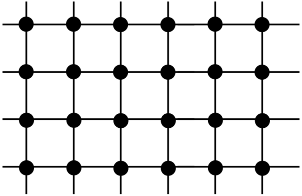


- **Distribuição**: $P(k = d) = 1$, o resto 0.
- $\langle k \rangle = ?$ $\quad \langle k \rangle = d$.
- $\langle k^2 \rangle = ?$

Modelos epidêmicos em redes

SIR em redes: Propagação em diferentes tipos de grafos.

Redes regulares: todos os vértices têm grau d.

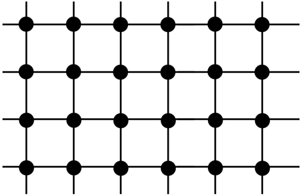


- **Distribuição**: $P(k = d) = 1$, o resto 0.
- $\langle k \rangle = ?$ $\quad \langle k \rangle = d$.
- $\langle k^2 \rangle = ?$ $\quad \langle k^2 \rangle = d^2$.

Modelos epidêmicos em redes

SIR em redes: Propagação em diferentes tipos de grafos.

Redes regulares: todos os vértices têm grau d.

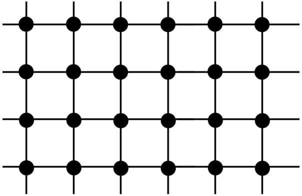


- **Distribuição**: $P(k = d) = 1$, o resto 0.
- $\langle k \rangle = ?$ $\quad \langle k \rangle = d$.
- $\langle k^2 \rangle = ?$ $\quad \langle k^2 \rangle = d^2$.
- $\frac{p}{\mu} > \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle} = \frac{d}{d^2 - d} = \frac{1}{d-1}$

Modelos epidêmicos em redes

SIR em redes: Propagação em diferentes tipos de grafos.

Redes regulares: todos os vértices têm grau d.



- **Distribuição**: $P(k = d) = 1$, o resto 0.
- $\langle k \rangle = ?$ $\quad \langle k \rangle = d$.
- $\langle k^2 \rangle = ?$ $\quad \langle k^2 \rangle = d^2$.
- $\frac{p}{\mu} > \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle} = \frac{d}{d^2 - d} = \frac{1}{d-1}$

Em redes regulares, a probabilidade de contágio deve ser ao menos $\frac{1}{d-1}$ durante o período de infecção. **Exemplo**: $\frac{1}{4}$ não alcança, precisamos que $\frac{p}{\mu}$ seja pelo menos $\frac{1}{3}$!

Modelos epidêmicos em redes

Compare os resultados em redes regulares:

$$\frac{p\bar{k}}{\mu} > 1$$

vs

$$\frac{p}{\mu} > \frac{1}{d-1}$$

Modelos epidêmicos em redes

SIR em redes: Propagação em diferentes tipos de grafos.

Redes aleatórias: distribuição de graus $\sim B(n, p_e)$.

Modelos epidêmicos em redes

SIR em redes: Propagação em diferentes tipos de grafos.

Redes aleatórias: distribuição de graus $\sim B(n, p_e)$.

- $\langle k \rangle = ?$ $\quad \langle k \rangle = np_e$.

Modelos epidêmicos em redes

SIR em redes: Propagação em diferentes tipos de grafos.

Redes aleatórias: distribuição de graus $\sim B(n, p_e)$.

- $\langle k \rangle = ?$ $\quad \langle k \rangle = np_e$.
- $\langle k^2 \rangle = ?$ $\quad \langle k^2 \rangle = np_e(1 - p_e) + (np_e)^2$.

Modelos epidêmicos em redes

SIR em redes: Propagação em diferentes tipos de grafos.

Redes aleatórias: distribuição de graus $\sim B(n, p_e)$.

- $\langle k \rangle = ?$ $\quad \langle k \rangle = np_e$.
- $\langle k^2 \rangle = ?$ $\quad \langle k^2 \rangle = np_e(1 - p_e) + (np_e)^2$.
- $\frac{p}{\mu} > \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle} = \frac{np_e}{np_e(1-p_e)+(np_e)^2-np_e} = \frac{1}{1-p_e+np_e-1} = \frac{1}{p_e(n-1)} \approx \frac{1}{np_e}$.

Em redes aleatórias, a probabilidade de contágio deve ser ao menos $\frac{1}{p_e(n-1)} \approx \frac{1}{np_e}$.

Modelos epidêmicos em redes

SIR em redes: Propagação em diferentes tipos de grafos.

Redes livres de escala: distribuição de graus é uma lei de potência, $P(k) = bk^{-\alpha}$.

Modelos epidêmicos em redes

SIR em redes: Propagação em diferentes tipos de grafos.

Redes livres de escala: distribuição de graus é uma lei de potência, $P(k) = bk^{-\alpha}$.

- $\langle k \rangle = ?$ Depende do valor do α. Se $\alpha > 2$, então $\langle k \rangle$ está definido.
  - Se $\alpha < 2$, temos $\langle k \rangle \to \infty$ (1^{ro} momento diverge).

Modelos epidêmicos em redes

SIR em redes: Propagação em diferentes tipos de grafos.

Redes livres de escala: distribuição de graus é uma lei de potência, $P(k) = bk^{-\alpha}$.

- $\langle k \rangle = ?$ Depende do valor do α. Se $\alpha > 2$, então $\langle k \rangle$ está definido.
  - Se $\alpha < 2$, temos $\langle k \rangle \to \infty$ (1^{ro} momento diverge).
- $\langle k^2 \rangle = ?$ Depende do valor do α. Se $\alpha > 3$, $\langle k^2 \rangle$ está definido.
  - Se $\alpha < 3$, temos $\langle k^2 \rangle \to \infty$ (2^{do} momento diverge, $\mathrm{var}(k) = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2$ diverge).

Modelos epidêmicos em redes

SIR em redes: Propagação em diferentes tipos de grafos.

Redes livres de escala: distribuição de graus é uma lei de potência, $P(k) = bk^{-\alpha}$.

- $\langle k \rangle = ?$ Depende do valor do α. Se $\alpha > 2$, então $\langle k \rangle$ está definido.
  - Se $\alpha < 2$, temos $\langle k \rangle \to \infty$ (1^{ro} momento diverge).
- $\langle k^2 \rangle = ?$ Depende do valor do α. Se $\alpha > 3$, $\langle k^2 \rangle$ está definido.
  - Se $\alpha < 3$, temos $\langle k^2 \rangle \to \infty$ (2^{do} momento diverge, $\mathrm{var}(k) = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2$ diverge).
- Na maioria das **redes reais**, o expoente fica no intervalo $2 < \alpha < 3$ ...

Modelos epidêmicos em redes

SIR em redes: Propagação em diferentes tipos de grafos.

Redes livres de escala: distribuição de graus é uma lei de potência, $P(k) = bk^{-\alpha}$.

Condição de contágio:

$$\frac{p}{\mu} > \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle}.$$

Modelos epidêmicos em redes

SIR em redes: Propagação em diferentes tipos de grafos.

Redes livres de escala: distribuição de graus é uma lei de potência, $P(k) = bk^{-\alpha}$.

Condição de contágio:

$$\frac{p}{\mu} > \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle}.$$

Em redes livres de escala reais, a condição de contágio pode ser cumprida **mesmo quando** o valor da a taxa de propagação $\frac{p}{\mu}$ é pequeno!

Modelos epidêmicos em redes

SIR em redes: Propagação em diferentes tipos de grafos.

Redes livres de escala: distribuição de graus é uma lei de potência, $P(k) = bk^{-\alpha}$.

Condição de contágio:

$$\frac{p}{\mu} > \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle}.$$

Em redes livres de escala reais, a condição de contágio pode ser cumprida **mesmo quando** o valor da a taxa de propagação $\frac{p}{\mu}$ é pequeno!

- A epidemia possui o chamado **comportamento caótico**: uma **instabilidade** por causa da sensibilidade do sistema a diferentes condições iniciais.

Modelos epidêmicos em redes

SIR em redes: Propagação em diferentes tipos de grafos.

Redes livres de escala: distribuição de graus é uma lei de potência, $P(k) = bk^{-\alpha}$.

Condição de contágio:

$$\frac{p}{\mu} > \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle}.$$

Em redes livres de escala reais, a condição de contágio pode ser cumprida **mesmo quando** o valor da a taxa de propagação $\frac{p}{\mu}$ é pequeno!

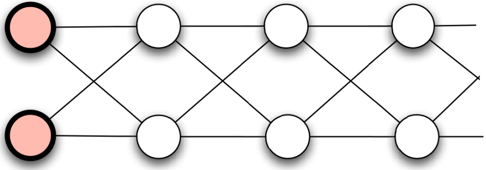
- A epidemia possui o chamado **comportamento caótico**: uma **instabilidade** por causa da sensibilidade do sistema a diferentes condições iniciais.
- Algumas informações **viralizam** em redes sociais online mesmo se parte significativa da população acha que são uma bobagem!

Modelos epidêmicos em redes

Embora bastante útil, a condição de propagação $\frac{p}{\mu} > \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle}$ continua sendo uma **aproximação**!

Modelos epidêmicos em redes

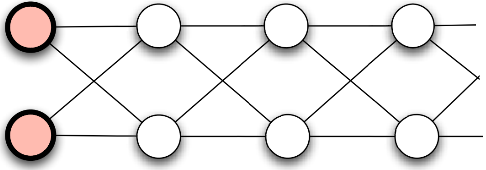
Embora bastante útil, a condição de propagação $\frac{p}{\mu} > \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle}$ continua sendo uma **aproximação**! Suponha que $p = \frac{2}{3}$ e $\mu = 1$, e temos a rede a seguir:



Condição de propagação: $\frac{p}{\mu} = \frac{2}{3} > \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle} \approx \frac{4}{16-4} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} > \frac{1}{3}$.

Modelos epidêmicos em redes

Embora bastante útil, a condição de propagação $\frac{p}{\mu} > \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle}$ continua sendo uma **aproximação**! Suponha que $p = \frac{2}{3}$ e $\mu = 1$, e temos a rede a seguir:



Condição de propagação: $\frac{p}{\mu} = \frac{2}{3} > \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle} \approx \frac{4}{16-4} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} > \frac{1}{3}$.

Porém, há chance de $\frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} \approx 1{,}2\%$ da propagação ser interrompida.

Além disso, a chance que dois vértices fiquem infectados é de $(1 - \frac{1}{3^2})^2 = \frac{64}{81} \approx 79\%$.

Modelos epidêmicos em redes

Consequência: Neste tipo de grafo, a chance da propagação acabar após poucas (7-8) iterações é muito grande.

Modelos epidêmicos em redes

Consequência: Neste tipo de grafo, a chance da propagação acabar após poucas (7-8) iterações é muito grande.

Limitações da abordagem usada:

- A solução **analítica** dos modelos (por exemplo, achar o tamanho de cada grupo em cada momento) pode ser **muito complexa**.

Modelos epidêmicos em redes

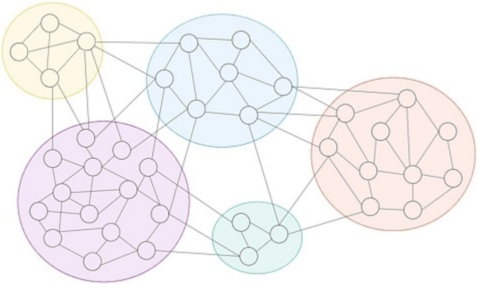
Consequência: Neste tipo de grafo, a chance da propagação acabar após poucas (7-8) iterações é muito grande.

Limitações da abordagem usada:

- A solução **analítica** dos modelos (por exemplo, achar o tamanho de cada grupo em cada momento) pode ser **muito complexa**.
- Em alguns casos, apenas com **simulações** é possível estudar os processos de propagação.

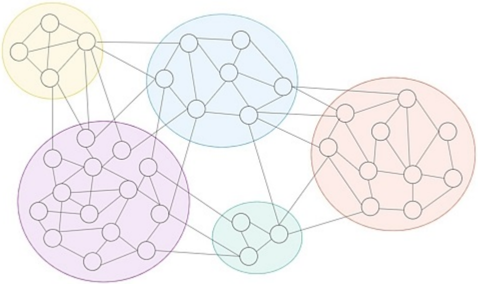
Modelos epidêmicos em redes

Como pode ocorrer a propagação nesta rede?



Modelos epidêmicos em redes

Como pode ocorrer a propagação nesta rede?



Fechamento de fronteiras e restrições de viagens: ideia de retardar a propagação usando "**gargalos**" difíceis de passar para a epidemia como pontes entre comunidades.

Resumo

Modelos epidêmicos e percolação

- Até agora, vimos o processo de propagação de uma epidemia da maneira mais tradicional, como um **processo dinâmico**.

Modelos epidêmicos e percolação

- Até agora, vimos o processo de propagação de uma epidemia da maneira mais tradicional, como um **processo dinâmico**.
- Porém, em alguns casos é possível transformar a propagação em um processo **completamente estático**, que é muito mais fácil de estudar.

Modelos epidêmicos e percolação

- Até agora, vimos o processo de propagação de uma epidemia da maneira mais tradicional, como um **processo dinâmico**.
- Porém, em alguns casos é possível transformar a propagação em um processo **completamente estático**, que é muito mais fácil de estudar.
- Vamos supor que temos uma propagação que segue o modelo **SIR** em redes, com $\mu = 1$. Veja que se $\mu \neq 1$, é possível adaptar o modelo fazendo a probabilidade de contágio p diminuir μ vezes.

Modelos epidêmicos e percolação

Para cada aresta (v, w), se um dos vértices fica infectado, precisamos **avaliar** se a aresta será usada durante a propagação **apenas uma vez**!

Modelos epidêmicos e percolação

Para cada aresta (v, w), se um dos vértices fica infectado, precisamos **avaliar** se a aresta será usada durante a propagação **apenas uma vez**!

- Seja, por exemplo, v o primeiro vértice infectado. Há apenas uma chance para v infectar w: após a infecção de v.

Modelos epidêmicos e percolação

Para cada aresta (v, w), se um dos vértices fica infectado, precisamos **avaliar** se a aresta será usada durante a propagação **apenas uma vez**!

- Seja, por exemplo, v o primeiro vértice infectado. Há apenas uma chance para v infectar w: após a infecção de v.
- Dado que $\mu = 1$, na próxima iteração v estará recuperado! A aresta (v, w) não será mais usada:
  - De v para w, pois v se recuperou e não pode mais propagar.
  - De w para v, pois se w fica infectado, v está imune, e já não pode ser infectado.

Modelos epidêmicos e percolação

Para cada aresta (v, w), se um dos vértices fica infectado, precisamos **avaliar** se a aresta será usada durante a propagação **apenas uma vez**!

- Seja, por exemplo, v o primeiro vértice infectado. Há apenas uma chance para v infectar w: após a infecção de v.
- Dado que $\mu = 1$, na próxima iteração v estará recuperado! A aresta (v, w) não será mais usada:
  - De v para w, pois v se recuperou e não pode mais propagar.
  - De w para v, pois se w fica infectado, v está imune, e já não pode ser infectado.

Observação: existe também a chance de v e w ficarem infectados na mesma iteração. Neste caso, a aresta não será usada.

Modelos epidêmicos e percolação

Resultado: o evento "aresta (v, w) poderá ser usada na propagação" é **independente** do momento (iteração) no qual a infecção chega a v ou w.

Isso significa que é possível decidir quais arestas serão usadas **antes de** começar a propagação!

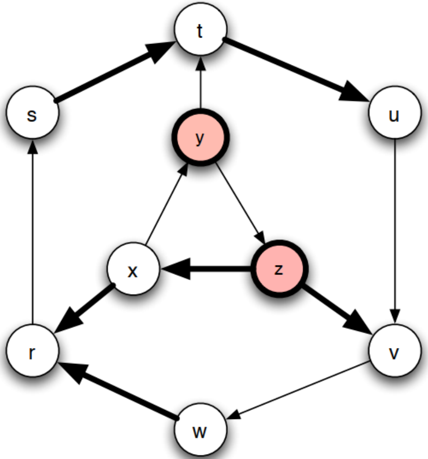
Modelos epidêmicos e percolação

Resultado: o evento "aresta (v, w) poderá ser usada na propagação" é **independente** do momento (iteração) no qual a infecção chega a v ou w.

Isso significa que é possível decidir quais arestas serão usadas **antes de** começar a propagação!

Vamos supor que já decidimos quais arestas serão usadas: temos um **subconjunto de arestas** chamadas abertas.

Modelos epidêmicos e percolação



Modelos epidêmicos e percolação

Podemos afirmar que:

O vértice v de uma rede **ficará infectado** se e somente se há um caminho que vai de um vértice inicialmente infectado até v através de arestas abertas.

Modelos epidêmicos e percolação

Podemos afirmar que:

O vértice v de uma rede **ficará infectado** se e somente se há um caminho que vai de um vértice inicialmente infectado até v através de arestas abertas.

A variante estática deste modelo é chamada de **problema de percolação**, e foi estudado em física:

Suponha que um líquido foi jogado em cima de algum material poroso. O líquido conseguirá chegar ao fundo?

É possível estudar, por exemplo, qual fração dos vértices, ou quais componentes, serão atingidas pela infecção.

Resumo

Controle de epidemias

$$\frac{p}{\mu} > \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle}.$$

Como **diminuir** a taxa de propagação $\frac{p}{\mu}$, e impedir que o contágio se espalhe pela rede?

Controle de epidemias

$$\frac{p}{\mu} > \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle}.$$

Como **diminuir** a taxa de propagação $\frac{p}{\mu}$, e impedir que o contágio se espalhe pela rede?

- Diminuir p, probabilidade de contágio $\times$ unidade de tempo. **Exemplos**:
    - Lavar as mãos, usar máscaras, manter uma distância mínima durante o contato, ...

Controle de epidemias

$$\frac{p}{\mu} > \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle}.$$

Como **diminuir** a taxa de propagação $\frac{p}{\mu}$, e impedir que o contágio se espalhe pela rede?

- Diminuir p, probabilidade de contágio $\times$ unidade de tempo. **Exemplos**:
  - Lavar as mãos, usar máscaras, manter uma distância mínima durante o contato, ...
- Diminuir os k_i's, o número de contatos dos vértices. **Exemplos**:
  - **Isolamento social**.

Controle de epidemias

$$\frac{p}{\mu} > \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle}.$$

Como **diminuir** a taxa de propagação $\frac{p}{\mu}$, e impedir que o contágio se espalhe pela rede?

- Diminuir p, probabilidade de contágio $\times$ unidade de tempo. **Exemplos**:
  - Lavar as mãos, usar máscaras, manter uma distância mínima durante o contato, ...
- Diminuir os k_i's, o número de contatos dos vértices. **Exemplos**:
  - **Isolamento social**.
  - **Vacinação**: afeta o **grau efetivo** de cada vértice (número de adjacentes suscetíveis).

Controle de epidemias

Situação ideal: vacinar a todos os indivíduos.

Vacinação aleatória (ou por grupos): estratégia usada quando não podemos imunizar a toda a população.

Controle de epidemias

Situação ideal: vacinar a todos os indivíduos.

Vacinação aleatória (ou por grupos): estratégia usada quando não podemos imunizar a toda a população.

- **Exemplo**: rede regular, $\frac{p}{\mu} > \frac{1}{d-1}$:

$$\frac{p(d-1)}{\mu} > 1.$$

Vamos supor que $\frac{p(d-1)}{\mu} = 1{,}05$, e vacinamos apenas 10% da população.

Controle de epidemias

Situação ideal: vacinar a todos os indivíduos.

Vacinação aleatória (ou por grupos): estratégia usada quando não podemos imunizar a toda a população.

- **Exemplo**: rede regular, $\frac{p}{\mu} > \frac{1}{d-1}$:

$$\frac{p(d-1)}{\mu} > 1.$$

Vamos supor que $\frac{p(d-1)}{\mu} = 1{,}05$, e vacinamos apenas 10% da população. O grau efetivo $d' = 0{,}9d$. A condição não é mais cumprida!

Controle de epidemias

Situação ideal: vacinar a todos os indivíduos.

Vacinação aleatória (ou por grupos): estratégia usada quando não podemos imunizar a toda a população.

- **Exemplo**: rede regular, $\frac{p}{\mu} > \frac{1}{d-1}$:

$$\frac{p(d-1)}{\mu} > 1.$$

  Vamos supor que $\frac{p(d-1)}{\mu} = 1{,}05$, e vacinamos apenas 10% da população. O grau efetivo $d' = 0{,}9d$. A condição não é mais cumprida!

- Isso mostra como a vacina protege **não apenas** o indivíduo que é imunizado, mas também o resto da rede, diminuindo a propagação!

Controle de epidemias

Vacinação em **outros tipos de redes**: os efeitos são mais complexos.

Controle de epidemias

Vacinação em **outros tipos de redes**: os efeitos são mais complexos.

- Redes **livres de escala**: podemos ter vértices de grau arbitrariamente grande.

Controle de epidemias

Vacinação em **outros tipos de redes**: os efeitos são mais complexos.

- Redes **livres de escala**: podemos ter vértices de grau arbitrariamente grande.
- O nível de vacinação aleatória suficiente para prevenir uma epidemia deve ser **muito alto** [Keeling 2005]. Em teoria, devemos imunizar **praticamente todos** os vértices para deter a epidemia!

Controle de epidemias

Vacinação em **outros tipos de redes**: os efeitos são mais complexos.

- Redes **livres de escala**: podemos ter vértices de grau arbitrariamente grande.
- O nível de vacinação aleatória suficiente para prevenir uma epidemia deve ser **muito alto** [Keeling 2005]. Em teoria, devemos imunizar **praticamente todos** os vértices para deter a epidemia!
- **Exemplo**: sarampo exige que 95% da população seja imunizada para evitar a propagação [Anderson & May 1992].

Controle de epidemias

Vacinação em **outros tipos de redes**: os efeitos são mais complexos.

- Redes **livres de escala**: podemos ter vértices de grau arbitrariamente grande.
- O nível de vacinação aleatória suficiente para prevenir uma epidemia deve ser **muito alto** [Keeling 2005]. Em teoria, devemos imunizar **praticamente todos** os vértices para deter a epidemia!
- **Exemplo**: sarampo exige que 95% da população seja imunizada para evitar a propagação [Anderson & May 1992].

Lembre, vacinar pode significar atualizar o antivírus,
fazer uma campanha de checagem de fatos, . . .

Material bibliográfico

M. Keeling and K. Eames: "Networks and epidemic models" (2005).

M. Newman: "Networks: An Introduction" (2010).

A. Barabási: "Network Science" (2016).

Dúvidas

Dúvidas?