# Introdução às Redes de Interação – MO804 (MC908)
# Breve revisão da teoria de grafos

Prof. Dr. Ruben Interian

Instituto de Computação, UNICAMP

# Resumo

# Resumo

# Objetivo

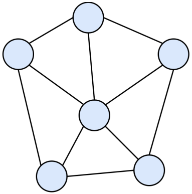
- Fazer uma breve revisão de conceitos de teoria de grafos que serão usados durante o curso.

# Resumo

# Teoria de grafos

Um **grafo** (ou **grafo não direcionado**):
é um par $G = (V, E)$, onde:

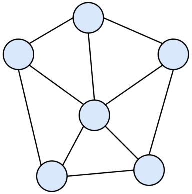
- $V$ é um conjunto finito de elementos chamados **vértices**, e
- $E$ é um conjunto finito de pares não ordenados de vértices chamados **arestas**.



# Teoria de grafos

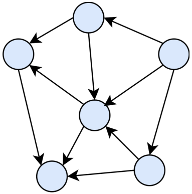
Um **grafo** (ou **grafo não direcionado**):
é um par $G = (V, E)$, onde:

- $V$ é um conjunto finito de elementos chamados **vértices**, e
- $E$ é um conjunto finito de pares não ordenados de vértices chamados **arestas**.



Um **grafo direcionado**:
é um par $G = (V, A)$, onde:

- $V$ é um conjunto finito de elementos chamados **vértices**, e
- $A$ é um conjunto finito de pares ordenados de vértices chamados **arcos (ou arestas)**.



# Teoria de grafos

Seja uma aresta $(a, b)$ (par **não ordenado** de vértices).

- Os vértices $a$ e $b$ são **adjacentes**.
- Os vértices $a$ e $b$ são os **extremos** da aresta.

- A aresta é **incidente** aos dois vértices.

- Pares não ordenados: $(a, b) = (b, a)$.

# Teoria de grafos

Seja uma aresta $(a, b)$ (par **não ordenado** de vértices).

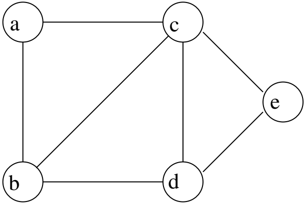
- Os vértices $a$ e $b$ são **adjacentes**.
- Os vértices $a$ e $b$ são os **extremos** da aresta.
- A aresta é **incidente** aos dois vértices.
- Pares não ordenados: $(a, b) = (b, a)$.

Seja um arco $(a, b)$ (par **ordenado** de vértices).

- O vértice $b$ é **adjacente** ao vértice $a$.
- Os vértices $a$ e $b$ são os **extremos** do arco.
- $a$ é o **início**, e $b$ é o **final** do arco.
- O arco **sai** do vértice $a$, e **entra** no vértice $b$ (é **incidente** no vértice $b$).
- Pares ordenados: $(a, b) \neq (b, a)$.

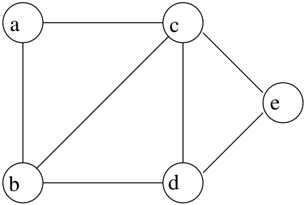
# Teoria de grafos

O **grau** $d(v)$ de um vértice $v$ é **o número de arestas incidentes** a $v$.

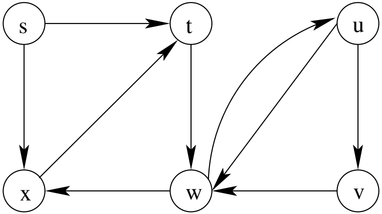


# Teoria de grafos

O **grau** $d(v)$ de um vértice $v$ é **o número de arestas incidentes** a $v$.

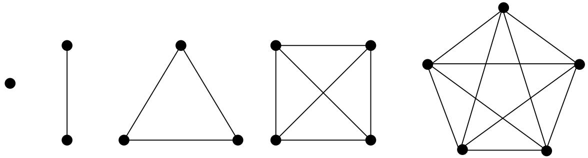



**Grau de saída** $d^+(v)$: número de arcos que saem de $v$.
**Grau de entrada** $d^-(v)$: número de arcos que entram em $v$.



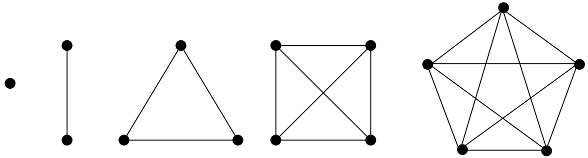
# Teoria de grafos

**Grafo completo**: grafo **não direcionado** no qual todo par de vértices diferentes são adjacentes.



# Teoria de grafos

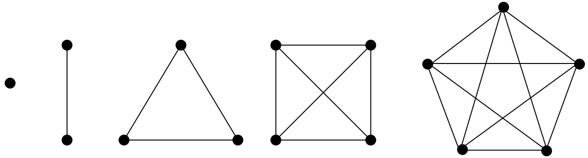
**Grafo completo**: grafo **não direcionado** no qual todo par de vértices diferentes são adjacentes.



*Quantas arestas tem um grafo completo com $n$ vértices?*

# Teoria de grafos

**Grafo completo**: grafo **não direcionado** no qual todo par de vértices diferentes são adjacentes.



*Quantas arestas tem um grafo completo com $n$ vértices?* $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

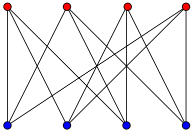
É o número de subconjuntos de 2 elementos em um conjunto com $n$ elementos.

$\rightarrow$ Definição para grafo não direcionado

# Teoria de grafos

**Grafo bipartido**: grafo $G = (V, E)$ no qual $V$ pode ser particionado em dois conjuntos, $X$ e $Y$, tais que cada aresta tem um extremo em $X$ e outro em $Y$.

*Em outras palavras, $G$ é bipartido se é possível colorir os vértices de $G$ com duas cores diferentes, de modo que vértices adjacentes tenham cores distintas. Não podemos ter nenhuma aresta entre dois vértices com a mesma cor.*



$\rightarrow$ Definição para grafo não direcionado

# Operações com grafos

Seja um grafo $G = (V, E)$. Notação para **operações com o grafo**:

- Remover uma aresta $e$: $G - e$ (as vezes denotado $G \setminus e$).
  - $G - e$ significa $(V, E - \{e\})$.

# Operações com grafos

Seja um grafo $G = (V, E)$. Notação para **operações com o grafo**:

- Remover uma aresta $e$: $G - e$ (as vezes denotado $G \setminus e$).
  - $G - e$ significa $(V, E - \{e\})$.
- Remover um vértice $v$: $G - v$.
  - $G - v$ significa $(V - \{v\}, E - \{e : v \in e\})$.

# Operações com grafos

Seja um grafo $G = (V, E)$. Notação para **operações com o grafo**:

- Remover uma aresta $e$: $G - e$ (as vezes denotado $G \setminus e$).
  - $G - e$ significa $(V, E - \{e\})$.
- Remover um vértice $v$: $G - v$.
  - $G - v$ significa $(V - \{v\}, E - \{e : v \in e\})$.
- Adicionar uma aresta $e$: $G + e = (V, E \cup \{e\})$.

# Operações com grafos

Seja um grafo $G = (V, E)$. Notação para **operações com o grafo**:

- Remover uma aresta $e$: $G - e$ (as vezes denotado $G \setminus e$).
  - $G - e$ significa $(V, E - \{e\})$.
- Remover um vértice $v$: $G - v$.
  - $G - v$ significa $(V - \{v\}, E - \{e : v \in e\})$.
- Adicionar uma aresta $e$: $G + e = (V, E \cup \{e\})$.
- Adicionar um vértice $v$: $G + v = (V \cup \{v\}, E)$. Vértice $v$ é **isolado**, $d(v) = 0$.

## Subgrafo e supergrafo

Um grafo $H = (V', E')$ é **subgrafo** de $G = (V, E)$, se: **(i)** $V' \subseteq V$, **(ii)** $E' \subseteq E$.

## Subgrafo e supergrafo

Um grafo $H = (V', E')$ é **subgrafo** de $G = (V, E)$, se: **(i)** $V' \subseteq V$, **(ii)** $E' \subseteq E$.

Veja que: $G - e$, $G - v$ são **subgrafos** de $G$.

# Subgrafo e supergrafo

Um grafo $H = (V', E')$ é **subgrafo** de $G = (V, E)$, se: **(i)** $V' \subseteq V$, **(ii)** $E' \subseteq E$.

Veja que: $G - e$, $G - v$ são **subgrafos** de $G$.

$G$ é **supergrafo** de $H$ se e somente se $H$ é **subgrafo** de $G$.

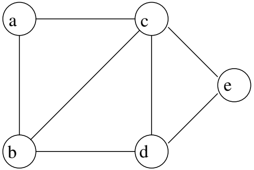
# Subgrafo e supergrafo

Um grafo $H = (V', E')$ é **subgrafo** de $G = (V, E)$, se: **(i)** $V' \subseteq V$, **(ii)** $E' \subseteq E$.

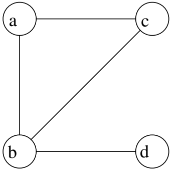
Veja que: $G - e$, $G - v$ são **subgrafos** de $G$.

$G$ é **supergrafo** de $H$ se e somente se $H$ é **subgrafo** de $G$.

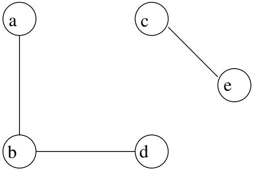
Exemplos:




G




H




H

# Subgrafo induzido, $G[S]$

Seja um grafo $G = (V, E)$. O **subgrafo** de $G$ **induzido** por um conjunto de vértices $S$ é o subgrafo formado por $S$ e todas as arestas entre vértices em $S$:

$$G[S] = (S, \{(u, v) \in E : u, v \in S\}).$$

# Resumo

# Passeio

## Passeio

Um passeio em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência:

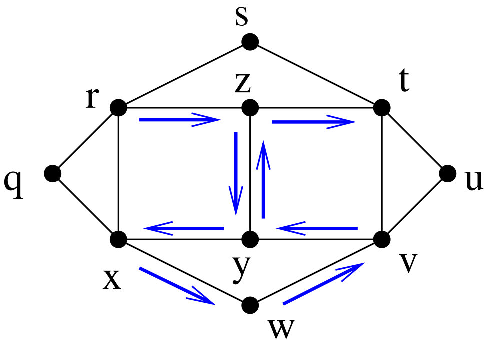
$$W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell),$$

onde $v_0, v_1, \dots, v_\ell$ são vértices de $G$ e $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ são arestas de $G$ para todo $i = 1, 2, \dots, \ell$.

Geralmente precisamos **escrever apenas os vértices**:

$$W = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_{\ell-1}, v_\ell)$$

# Passeio




Passeio $W = (r, z, y, x, w, v, y, z, t)$

# Passeio

Seja $W = (v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ um **passeio** em $G$:

- Dizemos que $W$ e um passeio de $v_0$ a $v_\ell$.

# Passeio

Seja $W = (v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ um **passeio** em $G$:

- Dizemos que $W$ e um passeio de $v_0$ a $v_\ell$.
- O comprimento $|W|$ do passeio $W$ é o seu número de arestas.

# Passeio

Seja $W = (v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ um **passeio** em $G$:

- Dizemos que $W$ e um passeio de $v_0$ a $v_\ell$.
- O comprimento $|W|$ do passeio $W$ é o seu número de arestas.
- O passeio $W$ é chamado de ímpar se $|W|$ é ímpar, e par, se $|W|$ é par.

# Passeio

Seja $W = (v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ um **passeio** em $G$:

- Dizemos que $W$ e um passeio de $v_0$ a $v_\ell$.
- O comprimento $|W|$ do passeio $W$ é o seu número de arestas.
- O passeio $W$ é chamado de ímpar se $|W|$ é ímpar, e par, se $|W|$ é par.
- O passeio $W$, com comprimento $|W| > 0$, é fechado, se $v_0 = v_\ell$.

# Passeio

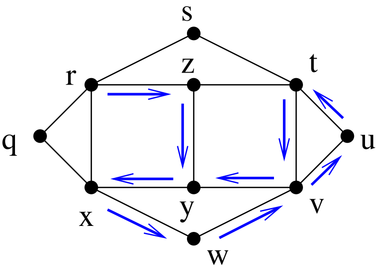
Seja $W = (v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ um **passeio** em $G$:

- Dizemos que $W$ e um passeio de $v_0$ a $v_\ell$.
- O comprimento $|W|$ do passeio $W$ é o seu número de arestas.
- O passeio $W$ é chamado de ímpar se $|W|$ é ímpar, e par, se $|W|$ é par.
- O passeio $W$, com comprimento $|W| > 0$, é fechado, se $v_0 = v_\ell$.
- Dizemos que $v_\ell$ é alcançável a partir de $v_0$ através de $W$.

# Trilha

## Trilha

Uma trilha $T = (v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ em um grafo $G = (V, E)$ é um passeio em que nenhuma aresta se repete.

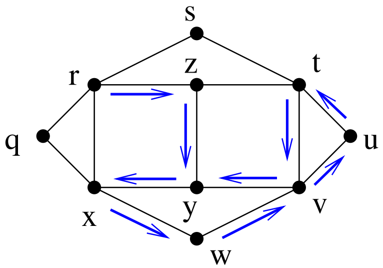



Trilha $T = (r, z, y, x, w, v, u, t, v, y)$.

# Trilha

## Trilha

Uma trilha $T = (v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ em um grafo $G = (V, E)$ é um passeio em que nenhuma aresta se repete.



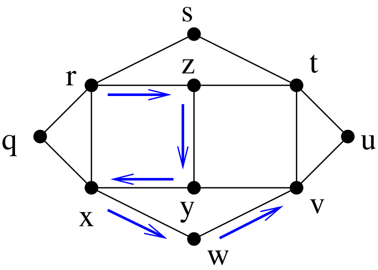

Trilha $T = (r, z, y, x, w, v, u, t, v, y)$.

Os vértices podem ser repetidos, mas as arestas precisam ser todas distintas.

# Caminho

## Caminho

Um caminho $P = (v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ em um grafo $G = (V, E)$ é um passeio em que nenhum vértice se repete.




Caminho $P = (r, z, y, x, w, v)$.

# Distância

## Distância

Seja um grafo $G = (V, E)$, e sejam $u, v \in V$ dois vértices. A **distância** de $u$ a $v$ em $G$ é o **comprimento** de um caminho **mais curto** de $u$ a $v$.

# Distância

## Distância

Seja um grafo $G = (V, E)$, e sejam $u, v \in V$ dois vértices. A **distância** de $u$ a $v$ em $G$ é o **comprimento** de um caminho **mais curto** de $u$ a $v$.

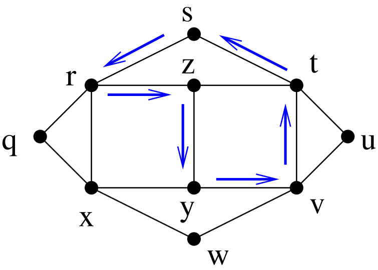
Notação:

- **Distância** de $u$ a $v$ em $G$: $dist_G(u, v)$.
- Se **não existe** caminho de $u$ a $v$ em $G$, escrevemos $dist_G(u, v) = +\infty$.

# Ciclo

## Ciclo

Um ciclo $C = (v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ em um grafo $G = (V, E)$ é um **passeio fechado** que não repete vértices nem arestas, exceto $v_0 = v_\ell$.




Ciclo $C = (r, z, y, v, t, s, r)$.

# Conexidade

As definições de passeios, trilhas, caminhos, ciclos e distância são **análogas** para grafos direcionados.

# Grafo conexo

## Grafo conexo

Um grafo $G = (V, E)$ é **conexo** se para **todo par** de vértices $u$, $v$ **existe um caminho** de $u$ a $v$ em $G$.

Se $G$ **não é conexo**, dizemos que $G$ é desconexo.

$\rightarrow$ Definição apenas para grafo não direcionado!

## Componentes conexas

### Teorema

Seja $G = (V, E)$ um grafo. A relação:

$$\mathcal{R} = \{(u, v) : \text{ existe um caminho de } u \text{ a } v \text{ em } G,\ u, v \in V\ \}$$

é uma **relação de equivalência**.

# Componentes conexas

**Teorema**

Seja $G = (V, E)$ um grafo. A relação:

$$\mathcal{R} = \{(u, v) : \text{ existe um caminho de } u \text{ a } v \text{ em } G,\ u, v \in V\ \}$$

é uma **relação de equivalência**.

As **classes de equivalência** que essa relação define são chamadas **componentes**, ou **componentes conexas** do grafo $G$.

# Componentes conexas

**Teorema**

Seja $G = (V, E)$ um grafo. A relação:

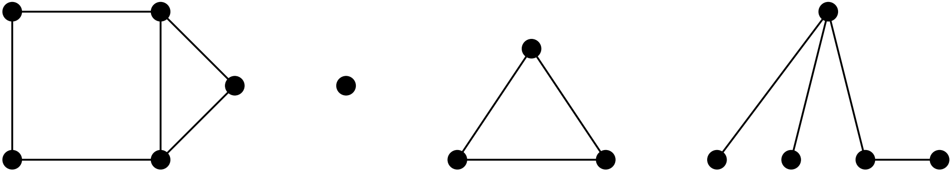
$$\mathcal{R} = \{(u, v) : \text{ existe um caminho de } u \text{ a } v \text{ em } G,\ u, v \in V\ \}$$

é uma **relação de equivalência**.

As **classes de equivalência** que essa relação define são chamadas **componentes**, ou **componentes conexas** do grafo $G$.

$\rightarrow$ Teorema vale apenas para grafo não direcionado!

# Componentes de um grafo



Componentes conexas de um grafo.

# Conexidade forte

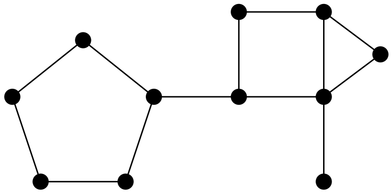
**Grafo direcionado fortemente conexo**

Um grafo direcionado $G = (V, A)$ é fortemente conexo se para quaisquer $u, v \in V$, existe um caminho (direcionado) de $u$ a $v$, e outro de $v$ a $u$, em $G$.

# Número de componentes

Seja $c(G)$ o **número de componentes** de um grafo $G$.

Se $G = (V, E)$ é um grafo, e $e \in E$, então $c(G) \leq c(G - e) \leq c(G) + 1$.



# Aresta-de-corte

## Definição

Seja $G = (V, E)$ um grafo. A aresta $e \in E$ é uma aresta-de-corte (ou ponte) de $G$, se $c(G - e) = c(G) + 1$.

# Aresta-de-corte

**Definição**

Seja $G = (V, E)$ um grafo. A aresta $e \in E$ é uma aresta-de-corte (ou ponte) de $G$, se $c(G - e) = c(G) + 1$.

- Se $G$ é conexo, dizemos que a remoção de $e$ desconecta $G$.

# Aresta-de-corte

## Definição

Seja $G = (V, E)$ um grafo. A aresta $e \in E$ é uma aresta-de-corte (ou ponte) de $G$, se $c(G - e) = c(G) + 1$.

- Se $G$ é conexo, dizemos que a remoção de $e$ desconecta $G$.

## Caracterização das arestas-de-corte

Seja $G = (V, E)$ um grafo, e seja $e \in E$. A aresta $e$ é uma **aresta-de-corte** de $G$ se e somente se $e$ não pertence a nenhum ciclo de $G$.

# Resumo

# Árvores

## Grafo acíclico

Um grafo $G$ é acíclico se ele não contém ciclos.

# Árvores

## Grafo acíclico

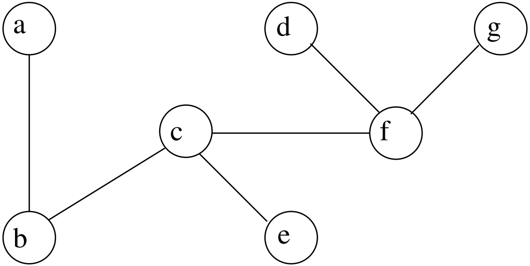
Um grafo $G$ é acíclico se ele não contém ciclos.

## Árvore

Uma árvore é um **grafo conexo** e **acíclico**.

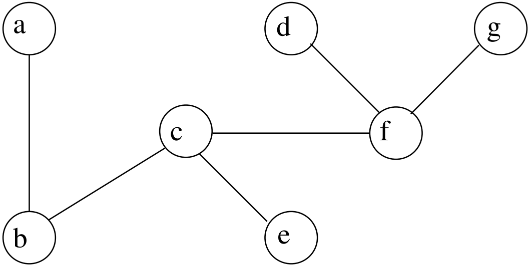
# Árvores

Exemplo de uma **árvore**:



# Árvores

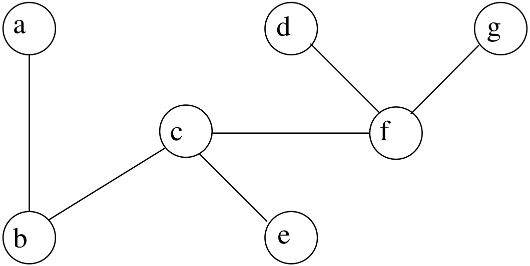
Exemplo de uma **árvore**:




- Uma **folha** de uma árvore $G$ é um vértice de grau 1.

# Árvores

Exemplo de uma **árvore**:




- Uma **folha** de uma árvore $G$ é um vértice de grau 1.
- Se $v$ é uma folha da árvore $G \Rightarrow G - v$ é uma árvore.

# Árvores

- Todo **grafo conexo** $G = (V, E)$ possui **pelo menos** $|V| - 1 = n - 1$ arestas.
  - Veja que cada aresta pode conectar apenas 2 componentes. Precisamos colocar no mínimo $n - 1$ arestas em um grafo vazio para ter uma única componente.

Portanto, uma árvore possui pelo menos $n - 1$ arestas.

# Árvores

- Todo **grafo conexo** $G = (V, E)$ possui **pelo menos** $|V| - 1 = n - 1$ arestas.
  - Veja que cada aresta pode conectar apenas 2 componentes. Precisamos colocar no mínimo $n - 1$ arestas em um grafo vazio para ter uma única componente.

  Portanto, uma árvore possui pelo menos $n - 1$ arestas.
- Na verdade, uma **árvore sempre possui exatamente $n - 1$ arestas**.

# Caracterização das árvores

**Teorema**

Seja $G = (V, E)$ um grafo com $|V| = n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $G$ é uma **árvore** ($G$ é **conexo** e **acíclico**),

# Caracterização das árvores

**Teorema**

Seja $G = (V, E)$ um grafo com $|V| = n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $G$ é uma **árvore** ($G$ é **conexo** e **acíclico**),
2. $G$ é **conexo** e $|E| = n - 1$,

# Caracterização das árvores

**Teorema**

Seja $G = (V, E)$ um grafo com $|V| = n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $G$ é uma **árvore** ($G$ é **conexo** e **acíclico**),
2. $G$ é **conexo** e $|E| = n - 1$,
3. $G$ é **acíclico** e $|E| = n - 1$,

# Caracterização das árvores

**Teorema**

Seja $G = (V, E)$ um grafo com $|V| = n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $G$ é uma **árvore** ($G$ é **conexo** e **acíclico**),
2. $G$ é **conexo** e $|E| = n - 1$,
3. $G$ é **acíclico** e $|E| = n - 1$,
4. $G$ é **conexo** e toda aresta é uma **aresta-de-corte**.

# Floresta

## Floresta

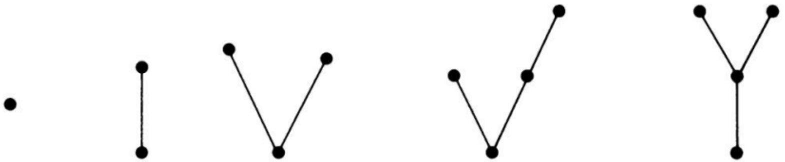
Um grafo acíclico (mas não necessariamente conexo) é uma **floresta**.

# Floresta

## Floresta

Um grafo acíclico (mas não necessariamente conexo) é uma **floresta**.

Veja que cada **componente da floresta** é uma **árvore**:



# Dúvidas

Dúvidas?