

Resumo

- 1 Objetivo
- 2 Vínculos positivos e negativos
- 3 Equilíbrio estrutural
- 4 Equilíbrio estrutural fraco
- 5 Aplicações

Objetivo

- Estudar os modelos de redes com vínculos positivos e negativos, e o conceito de equilíbrio estrutural.

Vínculos positivos e negativos

Até agora, os vínculos geralmente tinham uma **conotação positiva**: amizade, colaboração, compartilhamento de informação, participação em um grupo.

Vínculos positivos e negativos

Até agora, os vínculos geralmente tinham uma **conotação positiva**: amizade, colaboração, compartilhamento de informação, participação em um grupo.

Porém, nas redes de interação, os vínculos também podem ser **positivos e negativos**:

- Amizade ou inimizade.
- Envio texto, e-mail, mensagem positiva ou negativa.
- Votação a favor ou contra um candidato.
- Débito ou crédito entre contas.
- Reação química: a energia pode ser absorvida ou liberada.

Vínculos positivos e negativos

Vamos supor que temos um grafo $G = (V, E)$, e uma função f que atribui a cada aresta $e \in E$ um rótulo: $+$ ou $-$.

Esse grafo $G = (V, E, f)$, com a função $f : E \rightarrow \{+, -\}$, vai ser chamado **grafo com sinais** (*signed graph*).

Vínculos positivos e negativos

Os vínculos representam (exemplos):

- Vínculos positivos: amizade, confiança, benefício, cooperação, simbiose (**interações positivas**).

Vínculos positivos e negativos

Os vínculos representam (exemplos):

- Vínculos positivos: amizade, confiança, benefício, cooperação, simbiose (**interações positivas**).
- Vínculos negativos: inimizade, desconfiança, prejuízo, competição, antagonismo (**interações negativas**).

Vínculos positivos e negativos

Como podemos obter uma **rede com sinais** a partir de dados reais?

Vínculos positivos e negativos

Como podemos obter uma **rede com sinais** a partir de dados reais?

- Coletar dados reais já rotulados: débito/crédito, like/dislike em redes sociais, dados de votação, experimentos químicos.

Vínculos positivos e negativos

Como podemos obter uma **rede com sinais** a partir de dados reais?

- Coletar dados reais já rotulados: débito/crédito, like/dislike em redes sociais, dados de votação, experimentos químicos.
- Fazer estimativas a partir de dados reais: perguntas e pesquisas de opinião.

Vínculos positivos e negativos

Como podemos obter uma **rede com sinais** a partir de dados reais?

- Coletar dados reais já rotulados: débito/crédito, like/dislike em redes sociais, dados de votação, experimentos químicos.
- Fazer estimativas a partir de dados reais: perguntas e pesquisas de opinião.
- Heurísticas, uso de palavras chave, processamento de linguagem natural.

Vínculos positivos e negativos

Como podemos obter uma **rede com sinais** a partir de dados reais?

- Coletar dados reais já rotulados: débito/crédito, like/dislike em redes sociais, dados de votação, experimentos químicos.
- Fazer estimativas a partir de dados reais: perguntas e pesquisas de opinião.
- Heurísticas, uso de palavras chave, processamento de linguagem natural.
- (**mais recentemente**) IA e Large Language Models (LLMs).

Equilíbrio estrutural – motivação

Suponha que você tem um amigo que sempre fala mal de outra pessoa, e de repente você o conhece e acha essa pessoa superlegal.

Como você se sentiria? Por quê?

Equilíbrio estrutural – motivação

Suponha que você tem um amigo que sempre fala mal de outra pessoa, e de repente você o conhece e acha essa pessoa superlegal.

Como você se sentiria? Por quê?

Dissonância cognitiva: ocorre quando existe uma incoerência entre as atitudes ou comportamentos em relação a um sujeito ou objeto.

Equilíbrio estrutural – motivação

A noção de **equilíbrio** surgiu da ideia de que, em um grupo de pessoas, algumas regras lógicas são geralmente observadas. As pessoas **geralmente**:

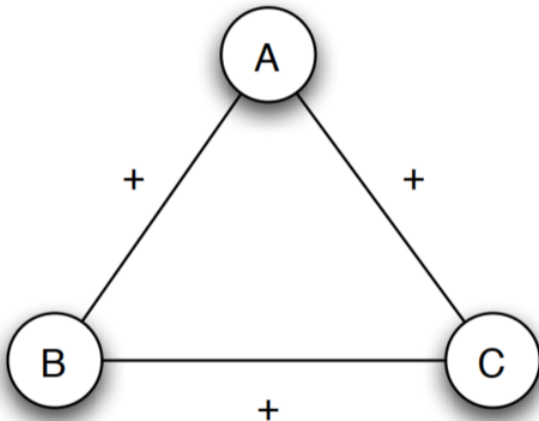
- Gostam dão “**amigos dos seus amigos**”.
- Não gostam dos “**inimigos dos seus amigos**”.

Equilíbrio estrutural

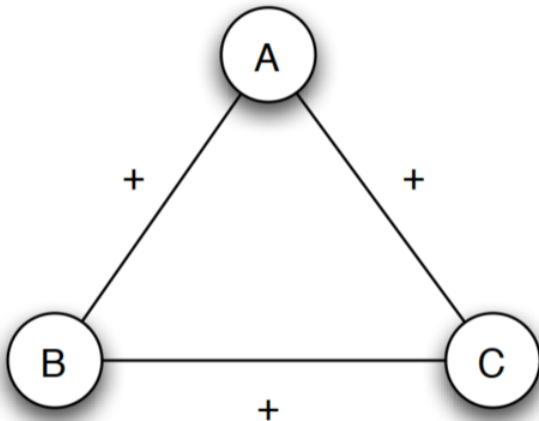
Para simplificar a análise, suponha que temos exatamente três pessoas, A , B e C que se conhecem mutuamente. Uma aresta positiva entre duas pessoas representa a relação “amigo de”, e uma aresta negativa representa uma relação “inimigo de”.

Vamos analisar exaustivamente os possíveis casos de amizade e inimizade entre os três.

Equilíbrio estrutural – caso 1

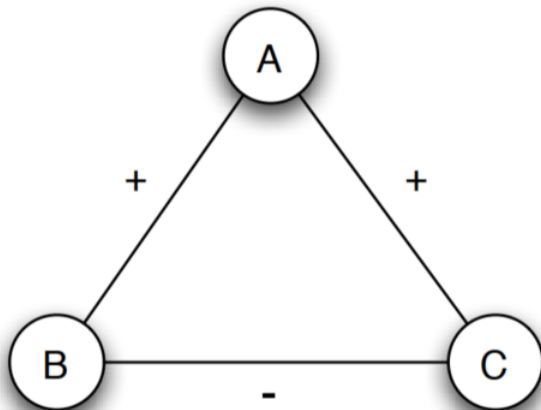


Equilíbrio estrutural – caso 1

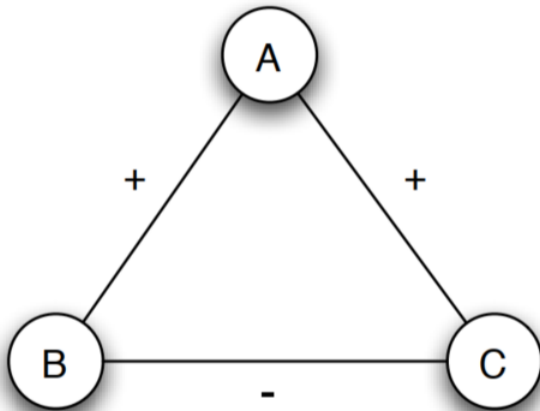


Parece OK!

Equilíbrio estrutural – caso 2

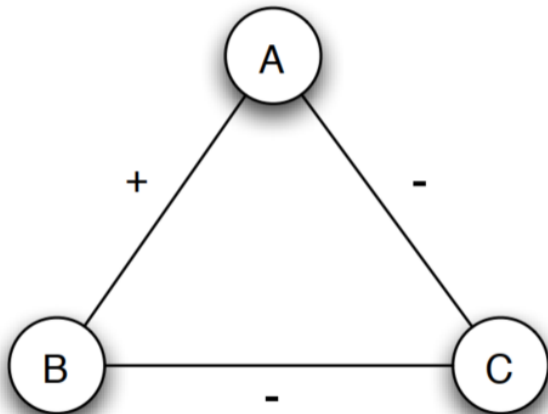


Equilíbrio estrutural – caso 2

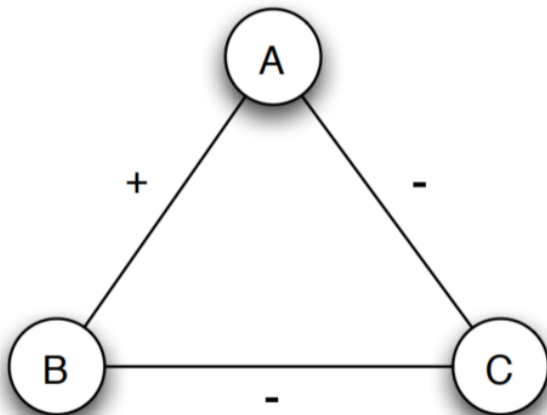


Não parece OK!

Equilíbrio estrutural – caso 3

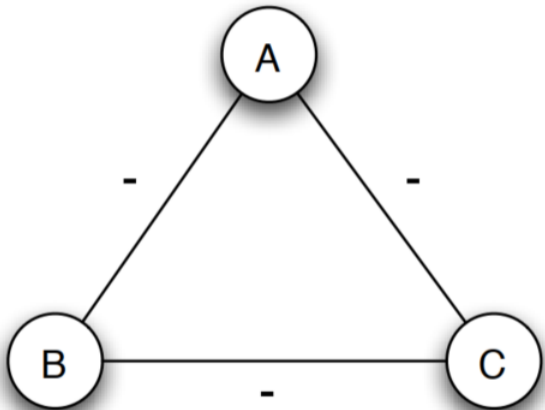


Equilíbrio estrutural – caso 3

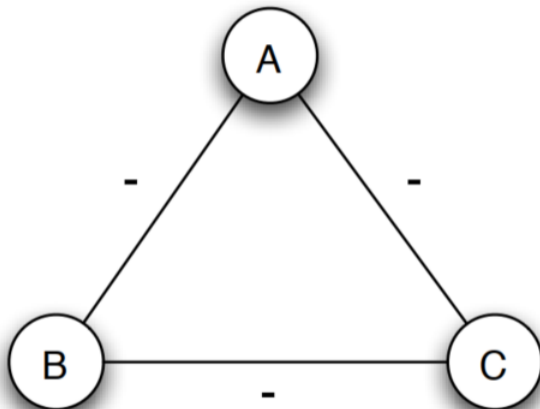


Parece OK!

Equilíbrio estrutural – caso 4



Equilíbrio estrutural – caso 4



Não parece OK! (ou sim?...)

Equilíbrio estrutural

Resumo:

- Caso 1 (+ + +) e caso 3 (+ - -): existe o equilíbrio entre os vínculos (podemos dizer também que o triângulo está **balanceado**).

Equilíbrio estrutural

Resumo:

- Caso 1 (+ + +) e caso 3 (+ - -): existe o equilíbrio entre os vínculos (podemos dizer também que o triângulo está **balanceado**).
- Caso 2 (+ + -) e caso 4 (- - -): não existe o equilíbrio entre os vínculos (podemos dizer também que o triângulo está **desbalanceado**).

Equilíbrio estrutural

Resumo:

- Caso 1 (+ + +) e caso 3 (+ - -): existe o equilíbrio entre os vínculos (podemos dizer também que o triângulo está **balanceado**).
- Caso 2 (+ + -) e caso 4 (- - -): não existe o equilíbrio entre os vínculos (podemos dizer também que o triângulo está **desbalanceado**).

Ou seja, para que não haja **incoerências** nas relações positivas e negativas, cada triângulo pode ter **1** ou **3** arestas positivas.

Equilíbrio estrutural

Resumo:

- Caso 1 (+ + +) e caso 3 (+ - -): existe o equilíbrio entre os vínculos (podemos dizer também que o triângulo está **balanceado**).
- Caso 2 (+ + -) e caso 4 (- - -): não existe o equilíbrio entre os vínculos (podemos dizer também que o triângulo está **desbalanceado**).

Ou seja, para que não haja **incoerências** nas relações positivas e negativas, cada triângulo pode ter **1** ou **3** arestas positivas.

Os triângulos que cumprem com essa propriedade estão **em equilíbrio**, ou **balanceados**.

Equilíbrio estrutural

O raciocínio que fizemos não é uma construção meramente teórica.
Em redes sociais reais, os triângulos **desbalanceados** realmente são muito mais raros do que os **balanceados**!

Equilíbrio estrutural

O raciocínio que fizemos não é uma construção meramente teórica. Em redes sociais reais, os triângulos **desbalanceados** realmente são muito mais raros do que os **balanceados**!

Os princípios dessa teoria chamada Equilíbrio estrutural foram propostos originalmente por [Heider](#), na área psicologia social, e adaptados à linguagem da teoria de grafos e generalizados por [Cartwright](#) e [Harary](#).

Equilíbrio estrutural

Inicialmente, suponha que **todas as arestas na rede existem**: temos um grafo completo. **É um caso particular**, que simplifica o raciocínio e que vai ser generalizado depois!

Equilíbrio estrutural

Inicialmente, suponha que **todas as arestas na rede existem**: temos um grafo completo. **É um caso particular**, que simplifica o raciocínio e que vai ser generalizado depois!

Propriedade do equilíbrio estrutural

Um grafo com sinais completo G está em equilíbrio estrutural se cada triângulo em G possui as **suas três arestas positivas**, ou possui exatamente **uma aresta positiva**.

Equilíbrio estrutural

Inicialmente, suponha que **todas as arestas na rede existem**: temos um grafo completo. **É um caso particular**, que simplifica o raciocínio e que vai ser generalizado depois!

Propriedade do equilíbrio estrutural

Um grafo com sinais completo G está em equilíbrio estrutural se cada triângulo em G possui as **suas três arestas positivas**, ou possui exatamente **uma aresta positiva**.

Em outras palavras, um grafo com sinais completo G está em equilíbrio estrutural se todos os seus triângulos são **balanceados**.

Equilíbrio estrutural

A definição de **equilíbrio estrutural** é, em certa medida, **extrema**.

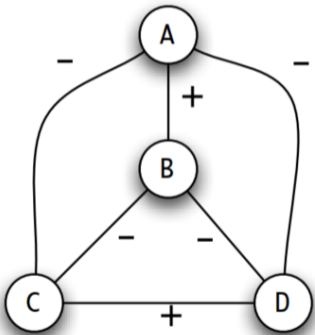
- O que acontece se, em uma rede grande, todos os triângulos, exceto um ou dois deles, são balanceados?

Equilíbrio estrutural

A definição de **equilíbrio estrutural** é, em certa medida, **extrema**.

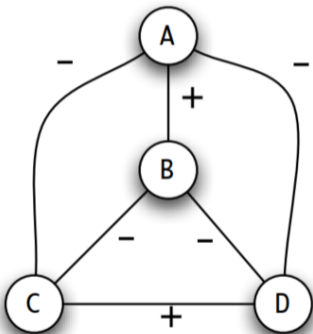
- O que acontece se, em uma rede grande, todos os triângulos, exceto um ou dois deles, são balanceados?
- É uma pergunta válida, que podemos responder no futuro. Vamos estudar e entender as propriedades dos **casos mais simples** para logo **passar aos complexos**.

Equilíbrio estrutural: Exemplos

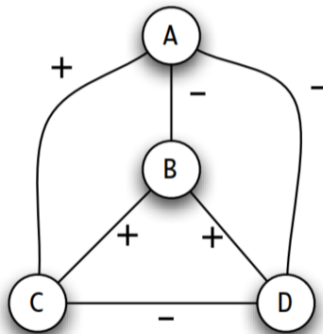


Em equilíbrio? – **Sim** (balanced)

Equilíbrio estrutural: Exemplos

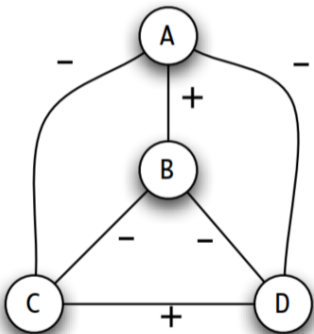


Em equilíbrio? – **Sim** (balanced)

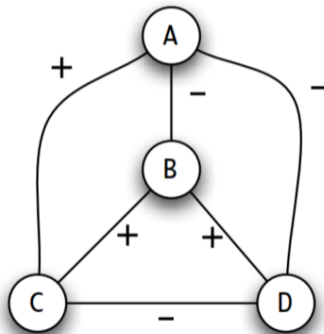


Em equilíbrio?

Equilíbrio estrutural: Exemplos



Em equilíbrio? – **Sim** (balanced)



Em equilíbrio? – **Não** (unbalanced)

Equilíbrio estrutural: Teorema do Equilíbrio

Que características gerais possui uma rede em equilíbrio estrutural?

Equilíbrio estrutural: Teorema do Equilíbrio

Que características gerais possui uma rede em equilíbrio estrutural?

O Teorema a seguir responde essa pergunta:

Teorema (do Equilíbrio)

Seja $G = (V, E, f)$, $f : E \rightarrow \{+, -\}$, um grafo com sinais completo. Se G está em equilíbrio estrutural, então uma das seguintes afirmações é verdadeira:

Equilíbrio estrutural: Teorema do Equilíbrio

Que características gerais possui uma rede em equilíbrio estrutural?

O Teorema a seguir responde essa pergunta:

Teorema (do Equilíbrio)

Seja $G = (V, E, f)$, $f : E \rightarrow \{+, -\}$, um grafo com sinais completo. Se G está em equilíbrio estrutural, então uma das seguintes afirmações é verdadeira:

- 1 Todas as arestas de G são positivas;

Equilíbrio estrutural: Teorema do Equilíbrio

Que características gerais possui uma rede em equilíbrio estrutural?

O Teorema a seguir responde essa pergunta:

Teorema (do Equilíbrio)

Seja $G = (V, E, f)$, $f : E \rightarrow \{+, -\}$, um grafo com sinais completo. Se G está em equilíbrio estrutural, então uma das seguintes afirmações é verdadeira:

- 1 Todas as arestas de G são positivas;
- 2 É possível particionar os nós em dois conjuntos não vazios, X e Y , de modo que:
 - Todas as arestas entre nós que estão **no mesmo grupo** são **positivas**, e
 - Todas as arestas entre nós de **diferentes grupos** são **negativas**.

Equilíbrio estrutural: Teorema do Equilíbrio

Que características gerais possui uma rede em equilíbrio estrutural?

O Teorema a seguir responde essa pergunta:

Teorema (do Equilíbrio)

Seja $G = (V, E, f)$, $f : E \rightarrow \{+, -\}$, um grafo com sinais completo. Se G está em equilíbrio estrutural, então uma das seguintes afirmações é verdadeira:

- 1 Todas as arestas de G são positivas;
- 2 É possível particionar os nós em dois conjuntos não vazios, X e Y , de modo que:
 - Todas as arestas entre nós que estão **no mesmo grupo** são **positivas**, e
 - Todas as arestas entre nós de **diferentes grupos** são **negativas**.

Interpretação: ou está “todo mundo junto”, ou há duas “**facções**” opostas.

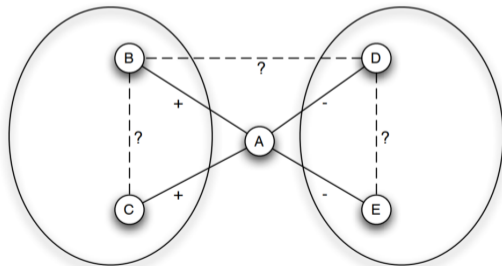
Equilíbrio estrutural: Teorema do Equilíbrio

Prova: Suponha que temos um grafo com sinais completo $G = (V, E, f)$, que cumpre com a propriedade do equilíbrio estrutural (os triângulos estão balanceados). Se todas as arestas de G são positivas, não há nada a provar.

Equilíbrio estrutural: Teorema do Equilíbrio

Prova: Suponha que temos um grafo com sinais completo $G = (V, E, f)$, que cumpre com a propriedade do equilíbrio estrutural (os triângulos estão balanceados). Se todas as arestas de G são positivas, não há nada a provar.

A prova é construtiva. Seja $A \in V$ um vértice do grafo que é extremo de alguma aresta negativa. Como G é completo, os outros vértices do grafo são adjacentes a A , ou com uma aresta positiva (chamaremos eles amigos), ou com uma aresta negativa (inimigos). Vamos definir o conjunto X como formado por A e todos os seus amigos e Y formado por todos os inimigos.

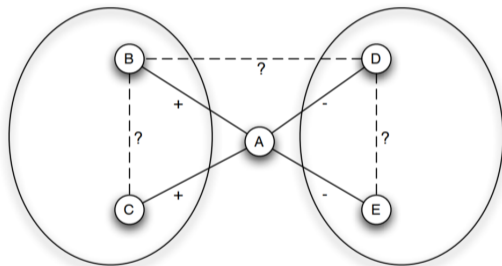


Equilíbrio estrutural: Teorema do Equilíbrio

Precisamos mostrar que todas as arestas:

- Entre nós em X são **positivas**.

Sejam $B \in X$ e $C \in X$.

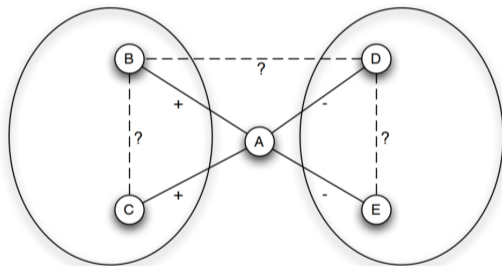


Equilíbrio estrutural: Teorema do Equilíbrio

Precisamos mostrar que todas as arestas:

- Entre nós em X são **positivas**.

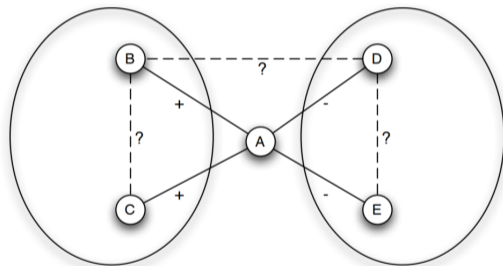
Sejam $B \in X$ e $C \in X$. Se B e C fossem inimigos, A , B e C formariam um triângulo desbalanceado $++-$ (o que é impossível)
 $\Rightarrow (B, C)$ é positiva.



Equilíbrio estrutural: Teorema do Equilíbrio

Precisamos mostrar que todas as arestas:

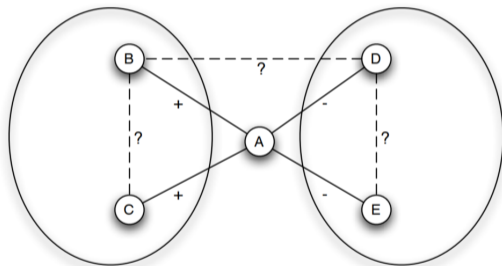
- Entre nós em X são **positivas**.
Sejam $B \in X$ e $C \in X$. Se B e C fossem inimigos, A , B e C formariam um triângulo desbalanceado $++-$ (o que é impossível)
 $\Rightarrow (B, C)$ é positiva.
- Entre nós em Y são **positivas**.
Sejam $D \in Y$ e $E \in Y$.



Equilíbrio estrutural: Teorema do Equilíbrio

Precisamos mostrar que todas as arestas:

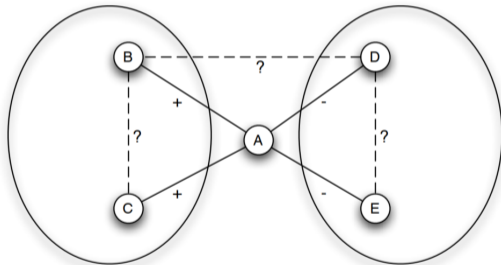
- Entre nós em X são **positivas**.
Sejam $B \in X$ e $C \in X$. Se B e C fossem inimigos, A , B e C formariam um triângulo desbalanceado $++-$ (o que é impossível)
 $\Rightarrow (B, C)$ é positiva.
- Entre nós em Y são **positivas**.
Sejam $D \in Y$ e $E \in Y$. Se D e E fossem inimigos, A , D e E formariam um triângulo desbalanceado $---$ (o que é impossível)
 $\Rightarrow (D, E)$ é positiva.



Equilíbrio estrutural: Teorema do Equilíbrio

Precisamos mostrar que todas as arestas:

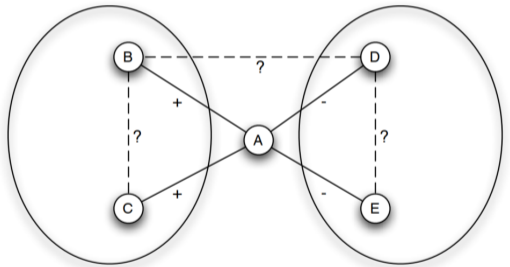
- Entre nós de X e Y são **negativas**.
- Seja $B \in X$ e $D \in Y$.



Equilíbrio estrutural: Teorema do Equilíbrio

Precisamos mostrar que todas as arestas:

- Entre nós de X e Y são **negativas**.
 Seja $B \in X$ e $D \in Y$. Se B e D fossem amigos, A, B e D formariam um triângulo desbalanceado $++-$ (o que é impossível, pois a rede está em equilíbrio)
 $\Rightarrow (B, D)$ é negativa.



Equilíbrio estrutural: Teorema do Equilíbrio

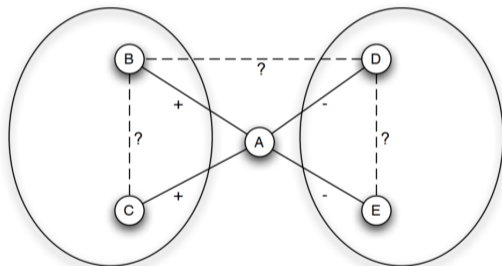
Precisamos mostrar que todas as arestas:

- Entre nós de X e Y são **negativas**.

Seja $B \in X$ e $D \in Y$. Se B e D fossem amigos, A , B e D formariam um triângulo desbalanceado $++-$ (o que é impossível, pois a rede está em equilíbrio)

$\Rightarrow (B, D)$ é negativa.

Mostramos que todas as arestas entre nós em X (e entre nós em Y), são positivas, e também que as arestas entre nós de X e Y são negativas. ■



Equilíbrio estrutural: Teorema do Equilíbrio

Ou seja, assumindo que **a rede está em equilíbrio**, podemos chegar à conclusão que é possível dividir os vértices em dois subconjuntos **antagônicos** ou **polarizados**.

Equilíbrio estrutural: Teorema do Equilíbrio

E no outro sentido?

Se é possível particionar os nós em dois conjuntos não vazios, X e Y , de modo que todas as arestas entre nós que estão **no mesmo grupo** são **positivas**, e todas as arestas entre nós de **diferentes grupos** são **negativas**, então G está em equilíbrio estrutural?

Equilíbrio estrutural: Teorema do Equilíbrio

E no outro sentido?

Se é possível particionar os nós em dois conjuntos não vazios, X e Y , de modo que todas as arestas entre nós que estão **no mesmo grupo** são **positivas**, e todas as arestas entre nós de **diferentes grupos** são **negativas**, então G está em equilíbrio estrutural?

Exercício.

Equilíbrio estrutural: Teorema do Equilíbrio

Veja que a prova que fizemos **oferece um algoritmo** (bem simples) para detectar **comunidades** (grupos antagônicos) em grafos completos em equilíbrio!

Qual é o algoritmo?

Resumo

- 1 Objetivo
- 2 Vínculos positivos e negativos
- 3 Equilíbrio estrutural
- 4 Equilíbrio estrutural fraco**
- 5 Aplicações

Equilíbrio estrutural fraco

Voltando à análise de triângulos, tínhamos **dois tipos** de triângulos desbalanceados:

- Caso 2 (+ + -).
O desconforto e a tensão vem de várias formas. . .

Equilíbrio estrutural fraco

Voltando à análise de triângulos, tínhamos **dois tipos** de triângulos desbalanceados:

- Caso 2 (+ + -).
O desconforto e a tensão vem de várias formas. . .
- Caso 4 (- - -).
O inimigo do meu inimigo de fato teria que ser meu amigo? . . .

Equilíbrio estrutural fraco

Uma forma **alternativa** de definir o equilíbrio estrutural:

Propriedade do equilíbrio estrutural fraco

Um grafo com sinais completo G está em equilíbrio estrutural fraco se **nenhum** triângulo em G possui **duas arestas positivas** e **uma aresta negativa**.

Equilíbrio estrutural fraco

Uma forma **alternativa** de definir o equilíbrio estrutural:

Propriedade do equilíbrio estrutural fraco

Um grafo com sinais completo G está em equilíbrio estrutural fraco se **nenhum** triângulo em G possui **duas arestas positivas** e **uma aresta negativa**.

Que características gerais possui uma rede em equilíbrio estrutural fraco?

– Vamos responder essa pergunta na próxima aula!

Equilíbrio estrutural fraco

Na **próxima aula** veremos:

- Características gerais de uma **rede em equilíbrio estrutural fraco**;
- Equilíbrio estrutural em **grafos** que **não são completos** e **algoritmos** para identificar **comunidades** (grupos antagônicos) nesses grafos;
- Entender o que acontece **se não todos os triângulos** são balanceados?

Resumo

- 1 Objetivo
- 2 Vínculos positivos e negativos
- 3 Equilíbrio estrutural
- 4 Equilíbrio estrutural fraco
- 5 Aplicações**

Aplicações

Algumas **aplicações** do equilíbrio estrutural:

- **Relações internacionais**, alianças e conflitos.
- **Votações** (e.g., Wikipédia – eleições para administração).
- Análise de **textos e mensagens** (positivas e negativas) em redes sociais.

Aplicações

Quantidades e frequências de triângulos, votações na **Wikipédia**:

T_3	+++	555,300	0.702
T_1	+--	163,328	0.207
T_2	++-	63,425	0.080
T_0	---	8,479	0.011

Observação

Vimos outro exemplo que mostra como propriedades *locais* da rede (presença de determinados tipos de triângulos), que envolvem poucos nós, podem influenciar propriedades *globais* (divisão em comunidades com características específicas), que envolvem muitos nós ou toda a rede.

Observação

Vimos outro exemplo que mostra como propriedades *locais* da rede (presença de determinados tipos de triângulos), que envolvem poucos nós, podem influenciar propriedades *globais* (divisão em comunidades com características específicas), que envolvem muitos nós ou toda a rede.

- **Triângulos balanceados** implicam em **coalizões globais**.

Observação

Vimos outro exemplo que mostra como propriedades *locais* da rede (presença de determinados tipos de triângulos), que envolvem poucos nós, podem influenciar propriedades *globais* (divisão em comunidades com características específicas), que envolvem muitos nós ou toda a rede.

- **Triângulos balanceados** implicam em **coalizões globais**.
- **Forças locais** que levam os triângulos a serem balanceados influenciam na estrutura global da rede, estimulando a formação de polos e **grupos divergentes**.

Material bibliográfico

David Easley and Jon Kleinberg. *Networks, Crowds, and Markets: Reasoning about a Highly Connected World*, pp 107-118.

