Introdução às Redes de Interação – MO804 (MC908)
Vínculos positivos e negativos. Equilíbrio estrutural.

Prof. Dr. Ruben Interian

Instituto de Computação, UNICAMP

Resumo

1. Revisão do conteúdo e objetivo
2. Equilíbrio estrutural fraco
3. Equilíbrio estrutural em redes genéricas
4. Equilíbrio aproximado

Resumo

1. Revisão do conteúdo e objetivo
2. Equilíbrio estrutural fraco
3. Equilíbrio estrutural em redes genéricas
4. Equilíbrio aproximado

Revisão do conteúdo

- **Grafo com sinais** (*signed graph*): $G = (V, E, f)$, onde V é o conjunto de vértices, E é o conjunto de arestas, $f : E \to \{+, -\}$ atribui rótulos às arestas.

Revisão do conteúdo

- **Grafo com sinais** (*signed graph*): $G = (V, E, f)$, onde V é o conjunto de vértices, E é o conjunto de arestas, $f : E \to \{+, -\}$ atribui rótulos às arestas.
- Um grafo com sinais completo G está em equilíbrio estrutural se cada triângulo em G possui três arestas positivas, ou possui exatamente uma aresta positiva.

Revisão do conteúdo

- **Grafo com sinais** (*signed graph*): $G = (V, E, f)$, onde V é o conjunto de vértices, E é o conjunto de arestas, $f : E \to \{+, -\}$ atribui rótulos às arestas.
- Um grafo com sinais completo G está em equilíbrio estrutural se cada triângulo em G possui três arestas positivas, ou possui exatamente uma aresta positiva.
- Se G está em equilíbrio estrutural, então é possível particionar os vértices em dois conjuntos, de modo que as arestas entre vértices do mesmo grupo são positivas, e as arestas entre vértices de grupos diferentes são negativas.

Revisão do conteúdo

- **Grafo com sinais** (*signed graph*): $G = (V, E, f)$, onde V é o conjunto de vértices, E é o conjunto de arestas, $f : E \to \{+, -\}$ atribui rótulos às arestas.
- Um grafo com sinais completo G está em equilíbrio estrutural se cada triângulo em G possui três arestas positivas, ou possui exatamente uma aresta positiva.
- Se G está em equilíbrio estrutural, então é possível particionar os vértices em dois conjuntos, de modo que as arestas entre vértices do mesmo grupo são positivas, e as arestas entre vértices de grupos diferentes são negativas.
- **Forças**, **estímulos** ou **incentivos** locais que levam os triângulos a serem balanceados determinam a estrutura global da rede: dois "polos" opostos.

Objetivos

- Características de uma **rede em equilíbrio estrutural fraco**;
- Equilíbrio estrutural em **grafos** que **não são completos** e **algoritmos** para identificar **comunidades** (grupos antagônicos) nesses grafos;
- Entender o que acontece se **não todos os triângulos** são balanceados?

Resumo

1. Revisão do conteúdo e objetivo
2. Equilíbrio estrutural fraco
3. Equilíbrio estrutural em redes genéricas
4. Equilíbrio aproximado

Equilíbrio estrutural fraco

Propriedade do equilíbrio estrutural

Um grafo com sinais completo G está em equilíbrio estrutural se cada triângulo em G possui as suas três arestas positivas, ou possui exatamente uma aresta positiva.

Propriedade do equilíbrio estrutural fraco

Um grafo com sinais completo G está em equilíbrio estrutural fraco se nenhum triângulo em G possui exatamente duas arestas positivas e uma negativa.

Equilíbrio estrutural fraco

Propriedade do equilíbrio estrutural

Um grafo com sinais completo G está em equilíbrio estrutural se cada triângulo em G possui as suas três arestas positivas, ou possui exatamente uma aresta positiva.

Propriedade do equilíbrio estrutural fraco

Um grafo com sinais completo G está em equilíbrio estrutural fraco se nenhum triângulo em G possui exatamente duas arestas positivas e uma negativa.

Que características gerais possui uma rede em equilíbrio estrutural fraco?

Equilíbrio estrutural fraco

Teorema (do Equilíbrio fraco)

Seja $G = (V, E, f)$, $f : E \to \{+, -\}$, um grafo com sinais completo. Se G está em **equilíbrio estrutural fraco**, então é possível particionar os vértices **em** k **grupos** $X_1, X_2, \ldots, X_k$, de modo que todas as arestas entre vértices que estão no mesmo grupo são positivas, e todas as arestas entre vértices de diferentes grupos são negativas.

Equilíbrio estrutural fraco

Teorema (do Equilíbrio fraco)

Seja $G = (V, E, f)$, $f : E \to \{+, -\}$, um grafo com sinais completo. Se G está em **equilíbrio estrutural fraco**, então é possível particionar os vértices **em** k **grupos** $X_1, X_2, \ldots, X_k$, de modo que todas as arestas entre vértices que estão no mesmo grupo são positivas, e todas as arestas entre vértices de diferentes grupos são negativas.

Interpretação: há várias "**facções**" opostas.

Equilíbrio estrutural fraco

Prova: Suponha que temos um grafo com sinais completo $G = (V, E, f)$, que cumpre com a propriedade do equilíbrio estrutural fraco: o grafo **não possui** triângulos com duas arestas positivas e uma negativa.

Equilíbrio estrutural fraco

Prova: Suponha que temos um grafo com sinais completo $G = (V, E, f)$, que cumpre com a propriedade do equilíbrio estrutural fraco: o grafo **não possui** triângulos com duas arestas positivas e uma negativa.

Seja $A \in V$ um vértice do grafo. O primeiro grupo X_1 será formado por A e todos os vértices amigos de A.

Equilíbrio estrutural fraco

Prova: Suponha que temos um grafo com sinais completo $G = (V, E, f)$, que cumpre com a propriedade do equilíbrio estrutural fraco: o grafo **não possui** triângulos com duas arestas positivas e uma negativa.

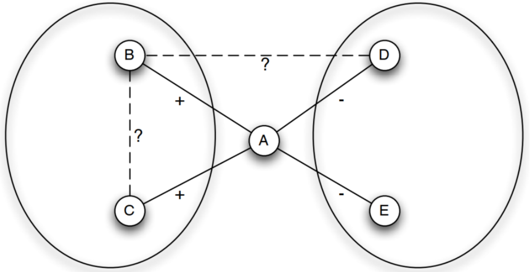
Seja $A \in V$ um vértice do grafo. O primeiro grupo X_1 será formado por A e todos os vértices amigos de A.

Precisamos provar que:
(i) o Teorema vale para todas as arestas incidentes a X_1, e
(ii) o Teorema vale para todas as arestas não incidentes a X_1.

Equilíbrio estrutural fraco

Para as arestas incidentes ao grupo X_1, precisamos provar que todas as arestas:

- Entre nós em X_1 são positivas.
  Sejam $B \in X_1$ e $C \in X_1$. Se B e C fossem inimigos, A, B e C formariam um triângulo desbalanceado $++-$
  $\Rightarrow (B, C)$ é positiva.

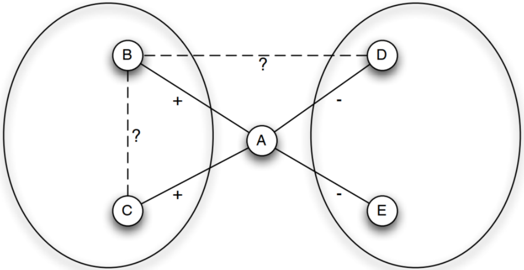


Equilíbrio estrutural fraco

Para as arestas incidentes ao grupo X_1, precisamos provar que todas as arestas:

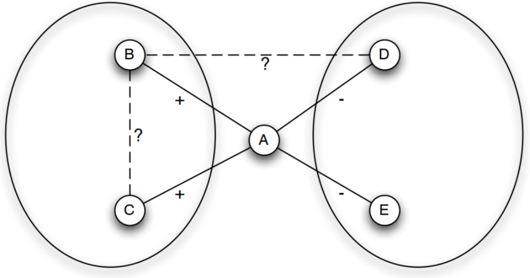
- Entre nós em X_1 são positivas.
  Sejam $B \in X_1$ e $C \in X_1$. Se B e C fossem inimigos, A, B e C formariam um triângulo desbalanceado $++-$ $\Rightarrow (B, C)$ é positiva.

- Entre X_1 e $V - X_1$ são negativas.
  Seja $B \in X_1$ e $D \in V - X_1$. Se B e D fossem amigos, A, B e D formariam um triângulo desbalanceado $++-$ $\Rightarrow (B, D)$ é negativa.



Equilíbrio estrutural fraco

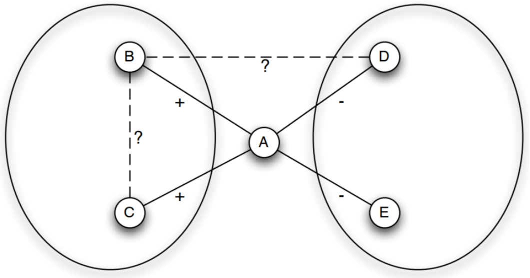
E para as arestas não incidentes a X_1?



Equilíbrio estrutural fraco

E para as arestas não incidentes a X_1?

Se precisamos analisar apenas as arestas não incidentes a X_1, podemos remover X_1 do grafo G, obtendo o subgrafo $G - X_1$.

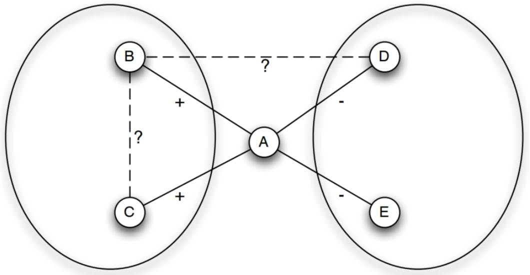


Equilíbrio estrutural fraco

E para as arestas não incidentes a X_1?

Se precisamos analisar apenas as arestas não incidentes a X_1, podemos remover X_1 do grafo G, obtendo o subgrafo $G - X_1$.

Logo, podemos aplicar o mesmo raciocínio a um grafo **menor** $G - X_1$, que continua respeitando o equilíbrio estrutural fraco.



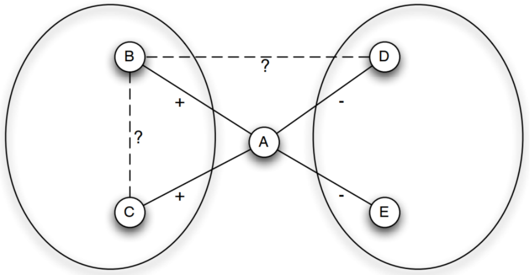
Equilíbrio estrutural fraco

E para as arestas não incidentes a X_1?

Se precisamos analisar apenas as arestas não incidentes a X_1, podemos remover X_1 do grafo G, obtendo o subgrafo $G - X_1$.

Logo, podemos aplicar o mesmo raciocínio a um grafo **menor** $G - X_1$, que continua respeitando o equilíbrio estrutural fraco.

Dentro de $G - X_1$, podemos encontrar um segundo grupo X_2, e assim por diante, até todos os nós serem atribuídos grupos, dentro dos quais todas as arestas são positivas, e entre os grupos negativas. ■



Equilíbrio estrutural fraco

A prova que fizemos se assemelha à construção de um algoritmo recursivo: chamamos o **mesmo algoritmo** para um grafo menor **até termos o último grafo**, sem arestas negativas.

Poderíamos implementar esse algoritmo para identificar os grupos de vértices:

Equilíbrio estrutural fraco

A prova que fizemos se assemelha à construção de um algoritmo recursivo: chamamos o **mesmo algoritmo** para um grafo menor **até termos o último grafo**, sem arestas negativas.

Poderíamos implementar esse algoritmo para identificar os grupos de vértices:

- **O algoritmo**: escolhe um vértice, cria um grupo com todos os seus "amigos", e retira esse grupo do grafo. Se existem ainda vértices não removidos no grafo, chama o algoritmo recursivamente.

Equilíbrio estrutural fraco

A prova que fizemos se assemelha à construção de um algoritmo recursivo: chamamos o **mesmo algoritmo** para um grafo menor **até termos o último grafo**, sem arestas negativas.

Poderíamos implementar esse algoritmo para identificar os grupos de vértices:

- **O algoritmo**: escolhe um vértice, cria um grupo com todos os seus "amigos", e retira esse grupo do grafo. Se existem ainda vértices não removidos no grafo, chama o algoritmo recursivamente.
- Nosso algoritmo sempre finaliza: em cada passo retiramos alguns (ao menos um) vértice do grafo. Como o grafo é finito, esse processo sempre irá finalizar.

Equilíbrio estrutural fraco

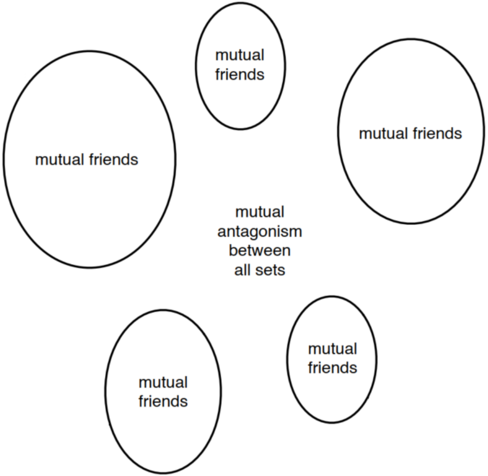
A prova que fizemos se assemelha à construção de um algoritmo recursivo: chamamos o **mesmo algoritmo** para um grafo menor **até termos o último grafo**, sem arestas negativas.

Poderíamos implementar esse algoritmo para identificar os grupos de vértices:

- **O algoritmo**: escolhe um vértice, cria um grupo com todos os seus "amigos", e retira esse grupo do grafo. Se existem ainda vértices não removidos no grafo, chama o algoritmo recursivamente.
- Nosso algoritmo sempre finaliza: em cada passo retiramos alguns (ao menos um) vértice do grafo. Como o grafo é finito, esse processo sempre irá finalizar.
- Em cada passo do algoritmo, e para cada grupo criado, temos a garantia que: todas as arestas dentro do grupo são positivas, e desse grupo para os demais as arestas são negativas.

Equilíbrio estrutural fraco

Modelos que usam equilíbrio estrutural fraco são apropriados em situações nas quais a rede está "dividida" (por meio de interações negativas) em **mais de duas** "facções" ou grupos antagônicos.



Resumo

1. Revisão do conteúdo e objetivo
2. Equilíbrio estrutural fraco
3. Equilíbrio estrutural em redes genéricas
4. Equilíbrio aproximado

Equilíbrio estrutural em redes genéricas

O que ocorre se **a nossa rede não é completa**?

Equilíbrio estrutural em redes genéricas

O que ocorre se **a nossa rede não é completa**?

Em **redes arbitrárias**, ou genéricas (não necessariamente completas):

- Precisamos **adaptar** nosso conceito de equilíbrio (forte).
  Essas redes podem não ter nenhum triângulo!

Equilíbrio estrutural em redes genéricas

O que ocorre se **a nossa rede não é completa**?

Em **redes arbitrárias**, ou genéricas (não necessariamente completas):

- Precisamos **adaptar** nosso conceito de equilíbrio (forte).
  Essas redes podem não ter nenhum triângulo!
- Agora, entre dois vértices, A e B:
  - Podemos ter uma aresta positiva;
  - Podemos ter uma aresta negativa;
  - Podemos não ter aresta (não há relação, ou não sabemos se há relação).

Equilíbrio estrutural em redes genéricas

Redefinindo o equilíbrio para redes genéricas

Teorema do Equilíbrio: o equilíbrio pode ser visto de duas formas equivalentes:

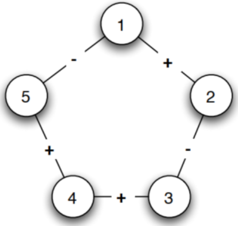
Equilíbrio estrutural em redes genéricas

Redefinindo o equilíbrio para redes genéricas

Teorema do Equilíbrio: o equilíbrio pode ser visto de duas formas equivalentes:

- Visão **local**: os triângulos são balanceados.

  Pergunta: Podemos preencher as arestas rotuladas faltantes de modo que todos os triângulos sejam balanceados? – Caso **sim**, está em **equilíbrio**.



$\Rightarrow$

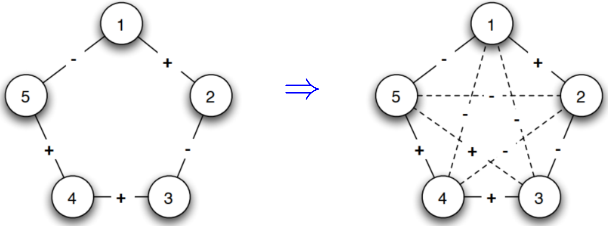
Equilíbrio estrutural em redes genéricas

Redefinindo o equilíbrio para redes genéricas

Teorema do Equilíbrio: o equilíbrio pode ser visto de duas formas equivalentes:

- Visão **local**: os triângulos são balanceados.

  Pergunta: Podemos preencher as arestas rotuladas faltantes de modo que todos os triângulos sejam balanceados? – Caso **sim**, está em **equilíbrio**.



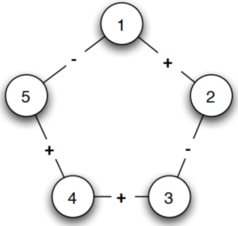
Equilíbrio estrutural em redes genéricas

Redefinindo o equilíbrio para redes genéricas

Teorema do Equilíbrio: o equilíbrio pode ser visto de duas formas equivalentes:

- Visão **global**: a rede está dividida em duas facções opostas.

  Pergunta: Podemos particionar os nós em 2 conjuntos de modo que uma aresta entre nós do mesmo grupo sempre é positiva, se existe, e uma aresta entre nós de diferentes grupos sempre é negativa, se existe? – Caso **sim**, está em **equilíbrio**.



$\Rightarrow$

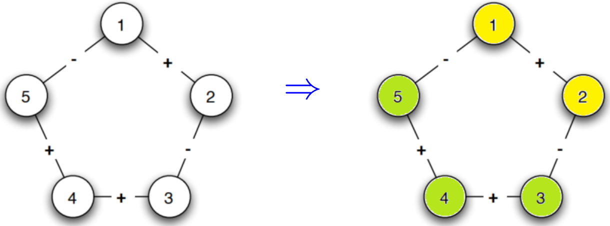
Equilíbrio estrutural em redes genéricas

Redefinindo o equilíbrio para redes genéricas

Teorema do Equilíbrio: o equilíbrio pode ser visto de duas formas equivalentes:

- Visão **global**: a rede está dividida em duas facções opostas.

  Pergunta: Podemos particionar os nós em 2 conjuntos de modo que uma aresta entre nós do mesmo grupo sempre é positiva, se existe, e uma aresta entre nós de diferentes grupos sempre é negativa, se existe? – Caso **sim**, está em **equilíbrio**.



Equilíbrio estrutural em redes genéricas

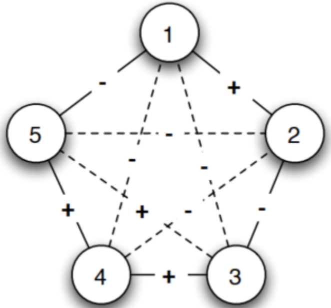
Ambas as formas de definir o equilíbrio são equivalentes!

Equilíbrio estrutural em redes genéricas

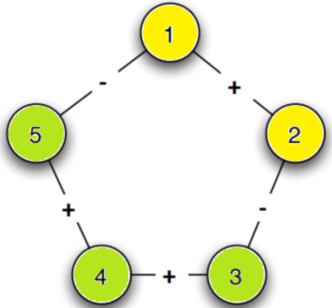
Ambas as formas de definir o equilíbrio são equivalentes! – Por quê?

Equilíbrio estrutural em redes genéricas

Ambas as formas de definir o equilíbrio são equivalentes! – Por quê?



$\Leftrightarrow$



Equilíbrio estrutural em redes genéricas

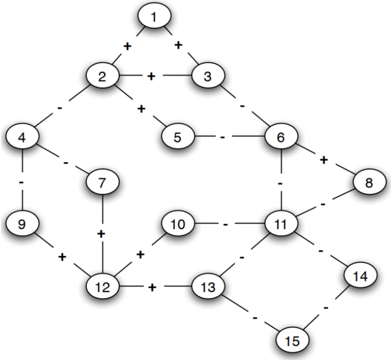
Como as duas formas de definir o equilíbrio **são equivalentes**, escolhemos uma delas:

Propriedade do equilíbrio estrutural

Um grafo com sinais G está em **equilíbrio estrutural** se podemos particionar os nós em dois grupos, X e Y, de modo que toda aresta entre nós do mesmo grupo sempre é positiva, e toda aresta entre nós de diferentes grupos sempre é negativa.

Equilíbrio estrutural em redes genéricas

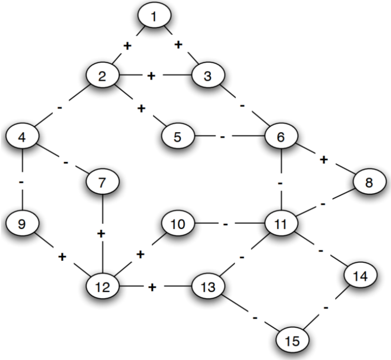
Perfeito! Mas como poderíamos verificar se um grafo está em **equilíbrio**?



Um **algoritmo força bruta** seria exponencial!

Equilíbrio estrutural em redes genéricas

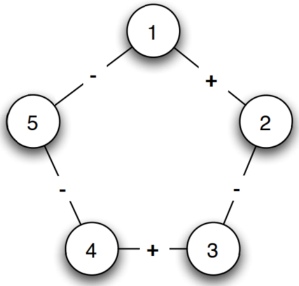
Perfeito! Mas como poderíamos verificar se um grafo está em **equilíbrio**?



Se o grafo **não está** em equilíbrio, que certificado podemos apresentar para provar isso?

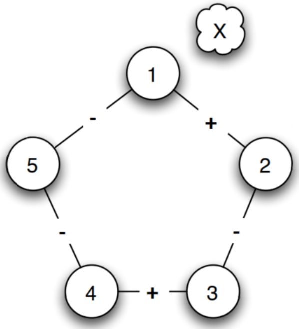
Equilíbrio estrutural em redes genéricas

O que pode **impedir** um grafo genérico de estar em equilíbrio?



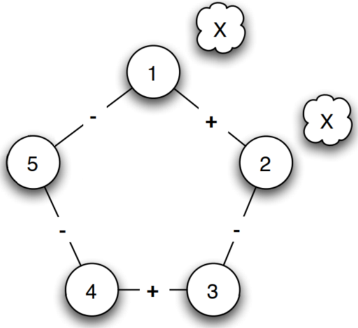
Equilíbrio estrutural em redes genéricas

O que pode **impedir** um grafo genérico de estar em equilíbrio?



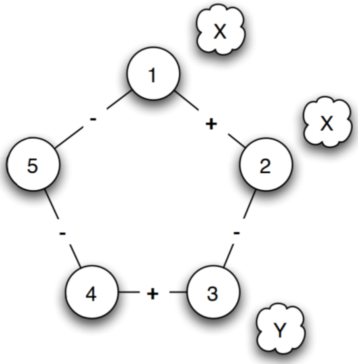
Equilíbrio estrutural em redes genéricas

O que pode **impedir** um grafo genérico de estar em equilíbrio?



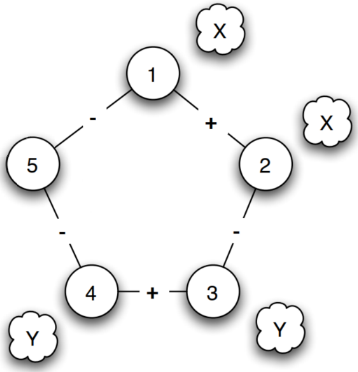
Equilíbrio estrutural em redes genéricas

O que pode **impedir** um grafo genérico de estar em equilíbrio?



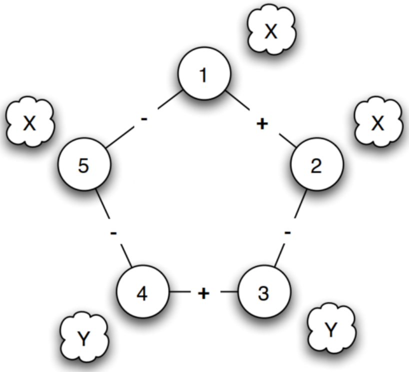
Equilíbrio estrutural em redes genéricas

O que pode **impedir** um grafo genérico de estar em equilíbrio?



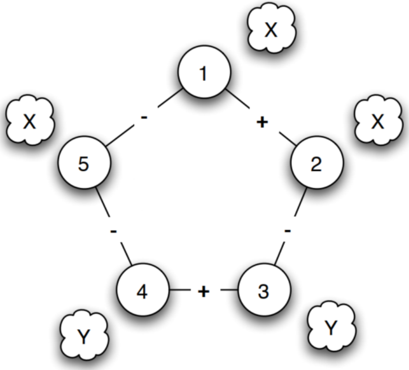
Equilíbrio estrutural em redes genéricas

O que pode **impedir** um grafo genérico de estar em equilíbrio?



Equilíbrio estrutural em redes genéricas

Conclusão: se existe um ciclo com um número ímpar de arestas negativas, então **não existe nenhuma maneira** de atribuir os vértices aos grupos ⇒ **não há equilíbrio**.



Equilíbrio estrutural em redes genéricas

Será essa condição necessária, e não apenas suficiente para não ter equilíbrio. . .

Equilíbrio estrutural em redes genéricas

Será essa condição necessária, e não apenas suficiente para não ter equilíbrio. . .

Definição: ciclo negativo

Um ciclo negativo em um grafo com sinais G é um ciclo que contém uma quantidade ímpar de arestas negativas.

Equilíbrio estrutural em redes genéricas

Será essa condição necessária, e não apenas suficiente para não ter equilíbrio...

Definição: ciclo negativo

Um ciclo negativo em um grafo com sinais G é um ciclo que contém uma quantidade ímpar de arestas negativas.

Um ciclo ser negativo não tem nada a ver com o comprimento (quantidade de arestas) do ciclo! Tem a ver apenas com a quantidade de arestas negativas.

Equilíbrio estrutural em redes genéricas

Será essa condição necessária, e não apenas suficiente para não ter equilíbrio...

Definição: ciclo negativo

Um ciclo negativo em um grafo com sinais G é um ciclo que contém uma quantidade ímpar de arestas negativas.

Um ciclo ser negativo não tem nada a ver com o comprimento (quantidade de arestas) do ciclo! Tem a ver apenas com a quantidade de arestas negativas.

Da mesma forma, um ciclo positivo em um grafo com sinais G é um ciclo que contém uma quantidade par de arestas negativas.

Equilíbrio estrutural em redes genéricas

Será essa condição necessária, e não apenas suficiente para não ter equilíbrio...

Definição: ciclo negativo

Um ciclo negativo em um grafo com sinais G é um ciclo que contém uma quantidade ímpar de arestas negativas.

Um ciclo ser negativo não tem nada a ver com o comprimento (quantidade de arestas) do ciclo! Tem a ver apenas com a quantidade de arestas negativas.

Da mesma forma, um ciclo positivo em um grafo com sinais G é um ciclo que contém uma quantidade par de arestas negativas.

Munidos dessas definições, **podemos caracterizar o equilíbrio** em grafos genéricos.

Equilíbrio estrutural em redes genéricas

Teorema (Equilíbrio em grafos genéricos)

Um grafo com sinais G está em equilíbrio estrutural **se e somente se** ele não contém um ciclo negativo.

Equilíbrio estrutural em redes genéricas

Teorema (Equilíbrio em grafos genéricos)

Um grafo com sinais G está em equilíbrio estrutural **se e somente se** ele não contém um ciclo negativo.

Os ciclos negativos são o único obstáculo para estar em equilíbrio!

Equilíbrio estrutural em redes genéricas

Teorema (Equilíbrio em grafos genéricos)

Um grafo com sinais G está em equilíbrio estrutural **se e somente se** ele não contém um ciclo negativo.

Prova: A prova será feita por meio de um algoritmo. Esse algoritmo tem apenas duas saídas possíveis, a divisão dos vértices em dois grupos, X e Y, que respeitam o equilíbrio, ou um ciclo negativo que impede essa divisão:

Equilíbrio estrutural em redes genéricas

Teorema (Equilíbrio em grafos genéricos)

Um grafo com sinais G está em equilíbrio estrutural **se e somente se** ele não contém um ciclo negativo.

Prova: A prova será feita por meio de um algoritmo. Esse algoritmo tem apenas duas saídas possíveis, a divisão dos vértices em dois grupos, X e Y, que respeitam o equilíbrio, ou um ciclo negativo que impede essa divisão:

- Se o algoritmo retornou 2 grupos X e Y que respeitam o equilíbrio, então não há ciclo negativo: se tivesse, já vimos que a divisão é impossível (sentido $\Rightarrow$).

Equilíbrio estrutural em redes genéricas

Teorema (Equilíbrio em grafos genéricos)

Um grafo com sinais G está em equilíbrio estrutural **se e somente se** ele não contém um ciclo negativo.

Prova: A prova será feita por meio de um algoritmo. Esse algoritmo tem apenas duas saídas possíveis, a divisão dos vértices em dois grupos, X e Y, que respeitam o equilíbrio, ou um ciclo negativo que impede essa divisão:

- Se o algoritmo retornou 2 grupos X e Y que respeitam o equilíbrio, então não há ciclo negativo: se tivesse, já vimos que a divisão é impossível (sentido $\Rightarrow$).
- Se cada vez que o algoritmo não detecta um ciclo negativo, ele retorna 2 grupos em equilíbrio, então grafos sem ciclos negativos estão em equilíbrio (sentido $\Leftarrow$).

Equilíbrio estrutural em redes genéricas

Resumo do algoritmo que detecta os grupos em equilíbrio em grafos genéricos:

1. Encontrar os supernós (componentes considerando apenas arestas positivas);

Equilíbrio estrutural em redes genéricas

Resumo do algoritmo que detecta os grupos em equilíbrio em grafos genéricos:

1. Encontrar os supernós (componentes considerando apenas arestas positivas);
2. Construir o grafo reduzido usando apenas as arestas negativas;

Equilíbrio estrutural em redes genéricas

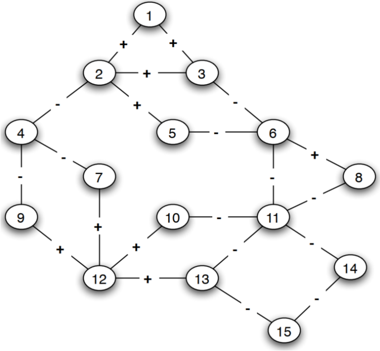
Resumo do algoritmo que detecta os grupos em equilíbrio em grafos genéricos:

1. Encontrar os supernós (componentes considerando apenas arestas positivas);
2. Construir o grafo reduzido usando apenas as arestas negativas;
3. Determinar se o grafo reduzido é bipartido:
   - Executar uma busca em largura (**BFS**) a partir de qualquer nó, e
   - Verificar se não há arestas entre dois nós no mesmo nível de profundidade.

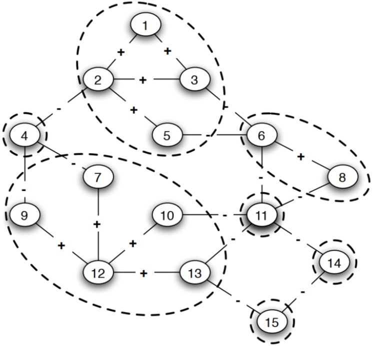
Equilíbrio estrutural em redes genéricas

1. Encontrar os supernós.

Fazer uma busca a partir de cada nó usando apenas arestas positivas.



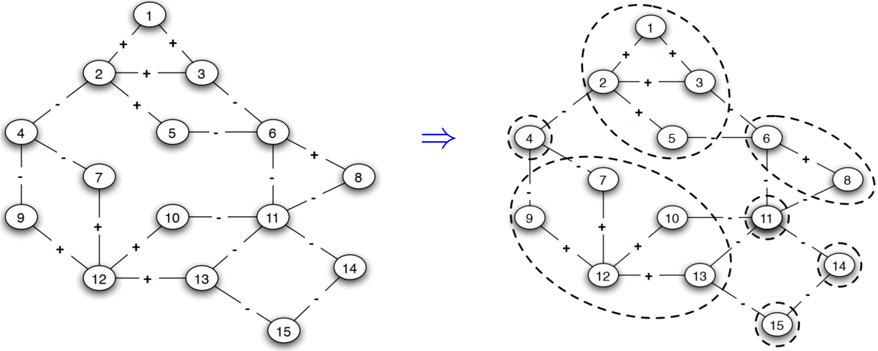
$\Rightarrow$



Equilíbrio estrutural em redes genéricas

1. Encontrar os supernós.

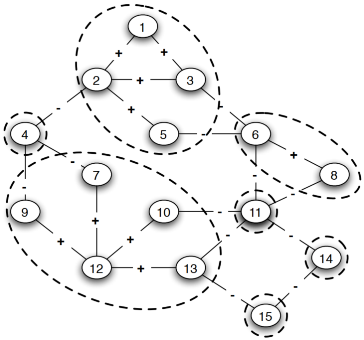
Nunca haverá arestas negativas dentro de cada supernó! – Por quê?



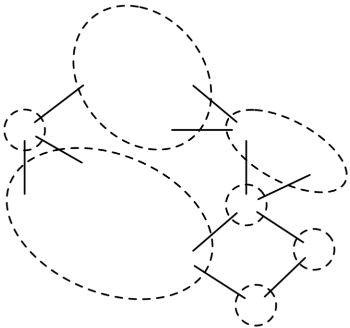
Equilíbrio estrutural em redes genéricas

2. Construir o grafo reduzido usando as arestas negativas.

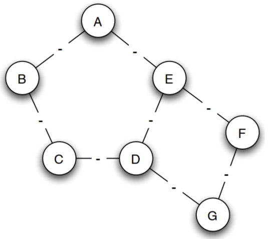
Cada supernó é um vértice, arestas negativas entre supernós são arestas do novo grafo.



$\Rightarrow$



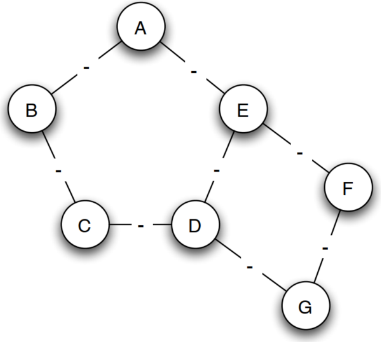
$\Rightarrow$



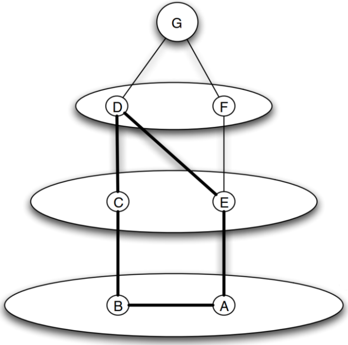
Equilíbrio estrutural em redes genéricas

3. Determinar se o grafo reduzido é bipartido.

Executar um BFS e checar se não há arestas entre nós no mesmo nível de profundidade.

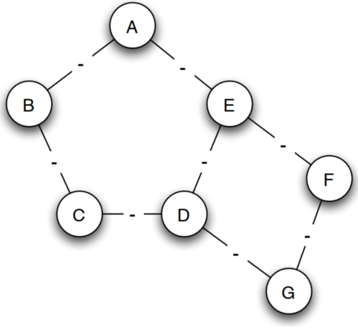


$\Rightarrow$

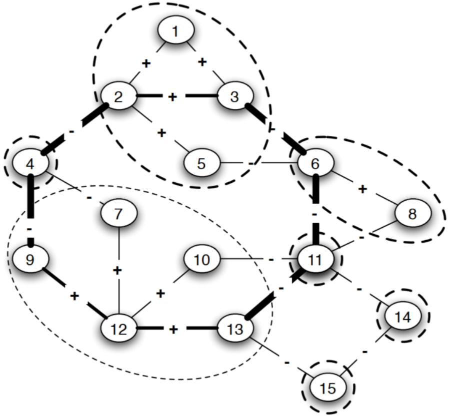


Equilíbrio estrutural em redes genéricas

Existe ciclo negativo entre supernós $\Leftrightarrow$ Existe ciclo negativo no grafo original.



$\Leftrightarrow$



Equilíbrio estrutural em redes genéricas

Este algoritmo, e algumas das suas modificações, podem ser usadas para encontrar **grupos ou comunidades antagônicas** em qualquer grafo com sinais.

Equilíbrio estrutural em redes genéricas

Este algoritmo, e algumas das suas modificações, podem ser usadas para encontrar **grupos ou comunidades antagônicas** em qualquer grafo com sinais.

- **Aplicação**: uma rede em equilíbrio é um modelo de uma rede social **completamente polarizada**.

Equilíbrio estrutural em redes genéricas

Este algoritmo, e algumas das suas modificações, podem ser usadas para encontrar **grupos ou comunidades antagônicas** em qualquer grafo com sinais.

- **Aplicação**: uma rede em equilíbrio é um modelo de uma rede social **completamente polarizada**.
- Mas as redes reais geralmente não estão em um **perfeito equilíbrio**...

Resumo

1. Revisão do conteúdo e objetivo
2. Equilíbrio estrutural fraco
3. Equilíbrio estrutural em redes genéricas
4. Equilíbrio aproximado

Equilíbrio aproximado

O que ocorre se **não todos os triângulos ou ciclos** são balanceados?

Equilíbrio aproximado

Lembrando:

Teorema (do Equilíbrio)

Seja $G = (V, E, f)$, um grafo com sinais completo. Se todos os triângulos em G estão balanceados, então uma das seguintes afirmações é verdadeira:

1. Todas as arestas de G são positivas;
2. É possível particionar os nós em dois conjuntos não vazios, X e Y, de modo que:
   - Todas as arestas entre nós que estão no mesmo grupo são positivas, e
   - Todas as arestas entre nós de diferentes grupos são negativas.

Equilíbrio aproximado

Lembrando:

Teorema (do Equilíbrio)

Seja $G = (V, E, f)$, um grafo com sinais completo. Se todos os triângulos em G estão balanceados, então uma das seguintes afirmações é verdadeira:

1. Todas as arestas de G são positivas;
2. É possível particionar os nós em dois conjuntos não vazios, X e Y, de modo que:
   - Todas as arestas entre nós que estão no mesmo grupo são positivas, e
   - Todas as arestas entre nós de diferentes grupos são negativas.

Vamos "relaxar" a exigência de ter todos (100%) dos triângulos balanceados.

Equilíbrio aproximado

Vamos supor que:

- Temos um grafo com sinais completo;
- Escolhemos um valor ε suficientemente pequeno;
- A fração $1-\varepsilon$ dos triângulos estão balanceados;
- Por exemplo, se $\varepsilon = 0{,}001 = 0{,}1\%$, então $1-\varepsilon = 99{,}9\%$.

Equilíbrio aproximado

Teorema (do Equilíbrio aproximado)

Seja $G = (V, E, f)$, um grafo com sinais completo, e sejam ε, δ: $0 \leq \varepsilon < \frac{1}{8}$, $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$.

Equilíbrio aproximado

Teorema (do Equilíbrio aproximado)

Seja $G = (V, E, f)$, um grafo com sinais completo, e sejam ε, δ: $0 \leq \varepsilon < \frac{1}{8}$, $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$. Se ao menos a fração $1 - \varepsilon$ de todos os triângulos em G estão balanceados, então uma das seguintes afirmações é verdadeira:

Equilíbrio aproximado

Teorema (do Equilíbrio aproximado)

Seja $G = (V, E, f)$, um grafo com sinais completo, e sejam ε, δ: $0 \leq \varepsilon < \frac{1}{8}$, $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$. Se ao menos a fração $1 - \varepsilon$ de todos os triângulos em G estão balanceados, então uma das seguintes afirmações é verdadeira:

1. Existe um conjunto contendo ao menos $1 - \delta$ dos nós no qual ao menos $1 - \delta$ das arestas são positivas;

Equilíbrio aproximado

Teorema (do Equilíbrio aproximado)

Seja $G = (V, E, f)$, um grafo com sinais completo, e sejam ε, δ: $0 \leq \varepsilon < \frac{1}{8}$, $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$.
Se ao menos a fração $1 - \varepsilon$ de todos os triângulos em G estão balanceados, então uma das seguintes afirmações é verdadeira:

1. Existe um conjunto contendo ao menos $1 - \delta$ dos nós no qual ao menos $1 - \delta$ das arestas são positivas;
2. É possível particionar os nós em dois conjuntos não vazios, X e Y, de modo que:
   - Ao menos $1 - \delta$ das arestas entre nós que estão no mesmo grupo são positivas, e
   - Ao menos $1 - \delta$ das arestas entre nós de diferentes grupos são negativas.

Equilíbrio aproximado

Teorema (do Equilíbrio aproximado)

Seja $G = (V, E, f)$, um grafo com sinais completo, e sejam ε, δ: $0 \leq \varepsilon < \frac{1}{8}$, $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$. Se ao menos a fração $1 - \varepsilon$ de todos os triângulos em G estão balanceados, então uma das seguintes afirmações é verdadeira:

1. Existe um conjunto contendo ao menos $1 - \delta$ dos nós no qual ao menos $1 - \delta$ das arestas são positivas;
2. É possível particionar os nós em dois conjuntos não vazios, X e Y, de modo que:
   - Ao menos $1 - \delta$ das arestas entre nós que estão no mesmo grupo são positivas, e
   - Ao menos $1 - \delta$ das arestas entre nós de diferentes grupos são negativas.

Veja que no caso $\varepsilon = 0$, e o teorema torna-se igual ao Teorema do Equilíbrio.

Material bibliográfico

David Easley and Jon Kleinberg. *Networks, Crowds, and Markets: Reasoning about a Highly Connected World*, pp 118-135.

Dúvidas

Dúvidas?