Redes complexas – MO804 (MC908)
Breve revisão da teoria de grafos, com alguns aditivos

Prof. Dr. Ruben Interian

Instituto de Computação, UNICAMP

Resumo

Objetivo

- Fazer uma breve revisão de conceitos de teoria de grafos que serão usados durante o curso.

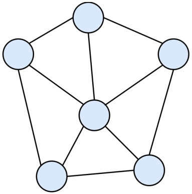
Resumo

1. Definições iniciais
2. Conexidade
3. Passeios aleatórios
4. Componentes e árvores
5. Distribuições de graus

Teoria de grafos

Um **grafo** (ou **grafo não direcionado**):
é um par $G = (V, E)$, onde:

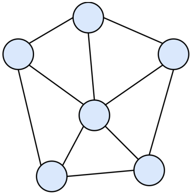
- V é um conjunto finito de elementos chamados **vértices** (nós), e
- E é um conjunto finito de pares não ordenados de vértices chamados **arestas**.



Teoria de grafos

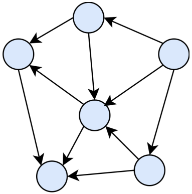
Um **grafo** (ou **grafo não direcionado**):
é um par $G = (V, E)$, onde:

- V é um conjunto finito de elementos chamados **vértices** (nós), e
- E é um conjunto finito de pares não ordenados de vértices chamados **arestas**.



Um **grafo direcionado**:
é um par $G = (V, A)$, onde:

- V é um conjunto finito de elementos chamados **vértices** (nós), e
- A é um conjunto finito de pares ordenados de vértices chamados **arcos (ou arestas)**.



Teoria de grafos

Seja uma aresta (a, b) (par **não ordenado** de vértices).

- Os vértices a e b são **adjacentes**.
- Os vértices a e b são os **extremos** da aresta.
- A aresta é **incidente** aos dois vértices.

- Pares não ordenados: $(a, b) = (b, a)$.

Teoria de grafos

Seja uma aresta (a, b) (par **não ordenado** de vértices).

- Os vértices a e b são **adjacentes**.
- Os vértices a e b são os **extremos** da aresta.
- A aresta é **incidente** aos dois vértices.

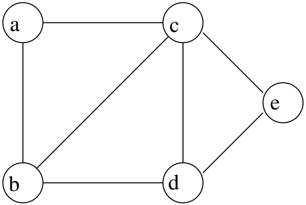
- Pares não ordenados: $(a, b) = (b, a)$.

Seja um arco (a, b) (par **ordenado** de vértices).

- O vértice b é **adjacente** ao vértice a.
- Os vértices a e b são os **extremos** do arco.
- O arco **sai** do vértice a, e **entra** no vértice b.
- Pares ordenados: $(a, b) \neq (b, a)$.

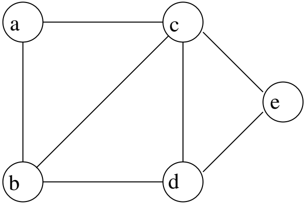
Teoria de grafos

O **grau** $d(v)$ de um vértice v é **o número de arestas incidentes** a v.

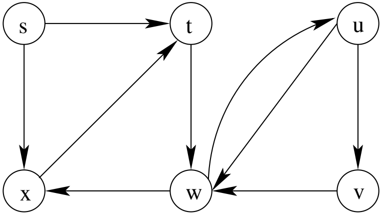


Teoria de grafos

O **grau** $d(v)$ de um vértice v é **o número de arestas incidentes** a v.

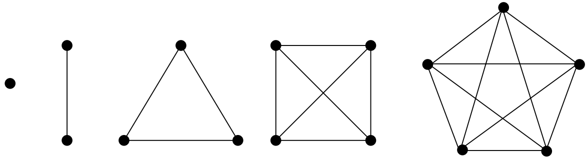


Grau de saída $d^+(v)$: número de arcos que saem de v.
Grau de entrada $d^-(v)$: número de arcos que entram em v.



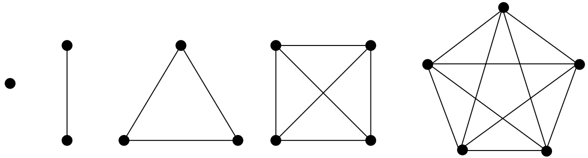
Teoria de grafos

Grafo completo: grafo **não direcionado** no qual todo par de vértices diferentes são adjacentes.



Teoria de grafos

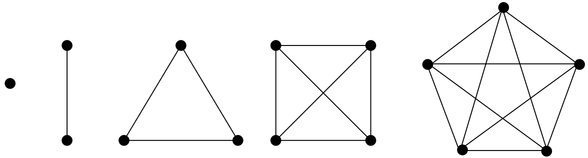
Grafo completo: grafo **não direcionado** no qual todo par de vértices diferentes são adjacentes.



Quantas arestas tem um grafo completo com n vértices?

Teoria de grafos

Grafo completo: grafo **não direcionado** no qual todo par de vértices diferentes são adjacentes.



Quantas arestas tem um grafo completo com n vértices? $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

É o número de subconjuntos de 2 elementos em um conjunto com n elementos.

Teoria de grafos

Densidade de um grafo não direcionado:

$$D = \frac{|E|}{\binom{n}{2}} = \frac{2|E|}{n(n-1)}$$

Teoria de grafos

Densidade de um grafo não direcionado:

$$D = \frac{|E|}{\binom{n}{2}} = \frac{2|E|}{n(n-1)}$$

Densidade de um grafo completo?

Teoria de grafos

Densidade de um grafo não direcionado:

$$D = \frac{|E|}{\binom{n}{2}} = \frac{2|E|}{n(n-1)}$$

Densidade de um grafo completo?

Grafo esparso: $|E| = O(|V|)$. Grafo denso: $|E| = \Omega(|V|^2)$.

Teoria de grafos

Densidade de um grafo não direcionado:

$$D = \frac{|E|}{\binom{n}{2}} = \frac{2|E|}{n(n-1)}$$

Densidade de um grafo completo?

Grafo esparso: $|E| = O(|V|)$. Grafo denso: $|E| = \Omega(|V|^2)$.

Densidade de um grafo direcionado:

$$D = \frac{|E|}{n(n-1)}$$

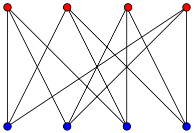
Teoria de grafos

Grafo bipartido: grafo não direcionado $G = (V, E)$ no qual V pode ser particionado em dois conjuntos, X e Y, tais que cada aresta tem um extremo em X e outro em Y.

Teoria de grafos

Grafo bipartido: grafo não direcionado $G = (V, E)$ no qual V pode ser particionado em dois conjuntos, X e Y, tais que cada aresta tem um extremo em X e outro em Y.

Em outras palavras, G é bipartido se é possível colorir os vértices de G com duas cores diferentes, de modo que vértices adjacentes tenham cores distintas.



Operações com grafos

Seja um grafo $G = (V, E)$. Notação para **operações com o grafo**:

- Remover uma aresta e: $G - e$ (as vezes denotado $G \setminus e$).
  - $G - e$ significa $(V, E - \{e\})$.

Operações com grafos

Seja um grafo $G = (V, E)$. Notação para **operações com o grafo**:

- Remover uma aresta e: $G - e$ (as vezes denotado $G \setminus e$).
  - $G - e$ significa $(V, E - \{e\})$.
- Remover um vértice v: $G - v$.
  - $G - v$ significa $(V - \{v\}, E - \{e : v \in e\})$.

Operações com grafos

Seja um grafo $G = (V, E)$. Notação para **operações com o grafo**:

- Remover uma aresta e: $G - e$ (as vezes denotado $G \setminus e$).
  - $G - e$ significa $(V, E - \{e\})$.
- Remover um vértice v: $G - v$.
  - $G - v$ significa $(V - \{v\}, E - \{e : v \in e\})$.
- Adicionar uma aresta e: $G + e = (V, E \cup \{e\})$.

Operações com grafos

Seja um grafo $G = (V, E)$. Notação para **operações com o grafo**:

- Remover uma aresta e: $G - e$ (as vezes denotado $G \setminus e$).
  - $G - e$ significa $(V, E - \{e\})$.
- Remover um vértice v: $G - v$.
  - $G - v$ significa $(V - \{v\}, E - \{e : v \in e\})$.
- Adicionar uma aresta e: $G + e = (V, E \cup \{e\})$.
- Adicionar um vértice v: $G + v = (V \cup \{v\}, E)$. Vértice v é **isolado**, $d(v) = 0$.

Subgrafo e supergrafo

Um grafo $H = (V', E')$ é **subgrafo** de $G = (V, E)$, se: **(i)** $V' \subseteq V$, **(ii)** $E' \subseteq E$.

Veja que: $G - e$, $G - v$ são **subgrafos** de G.

Subgrafo e supergrafo

Um grafo $H = (V', E')$ é **subgrafo** de $G = (V, E)$, se: **(i)** $V' \subseteq V$, **(ii)** $E' \subseteq E$.

Veja que: $G - e$, $G - v$ são **subgrafos** de G.

G é **supergrafo** de H se e somente se H é **subgrafo** de G.

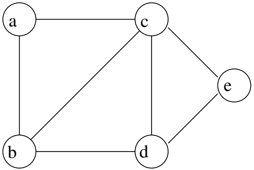
Subgrafo e supergrafo

Um grafo $H = (V', E')$ é **subgrafo** de $G = (V, E)$, se: **(i)** $V' \subseteq V$, **(ii)** $E' \subseteq E$.

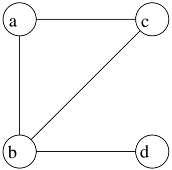
Veja que: $G - e$, $G - v$ são **subgrafos** de G.

G é **supergrafo** de H se e somente se H é **subgrafo** de G.

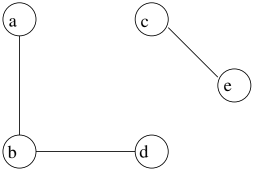
Exemplos:



G



H



H

Resumo

Passeio

Passeio

Um passeio em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência:

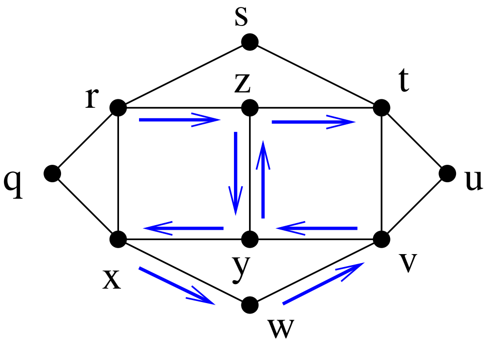
$$W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell),$$

onde $v_0, v_1, \ldots, v_\ell$ são vértices de G e $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ são arestas de G para todo $i = 1, 2, \ldots, \ell$.

Geralmente precisamos **escrever apenas os vértices**:

$$W = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, v_\ell)$$

Passeio



Passeio $W = (r, z, y, x, w, v, y, z, t)$

Passeio

Seja $W = (v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ um **passeio** em G:

- Dizemos que W e um passeio de v_0 a v_ℓ.

Passeio

Seja $W = (v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ um **passeio** em G:

- Dizemos que W e um passeio de v_0 a v_ℓ.
- O comprimento $|W|$ do passeio W é o seu número de arestas.

Passeio

Seja $W = (v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ um **passeio** em G:

- Dizemos que W e um passeio de v_0 a v_ℓ.
- O comprimento $|W|$ do passeio W é o seu número de arestas.
- O passeio W é chamado de ímpar se $|W|$ é ímpar, e par, se $|W|$ é par.

Passeio

Seja $W = (v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ um **passeio** em G:

- Dizemos que W e um passeio de v_0 a v_ℓ.
- O comprimento $|W|$ do passeio W é o seu número de arestas.
- O passeio W é chamado de ímpar se $|W|$ é ímpar, e par, se $|W|$ é par.
- O passeio W, com comprimento $|W| > 0$, é fechado, se $v_0 = v_\ell$.

Passeio

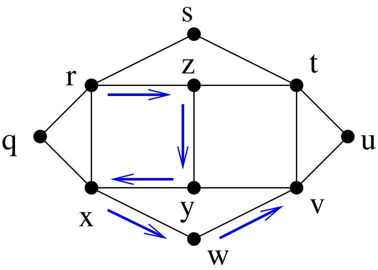
Seja $W = (v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ um **passeio** em G:

- Dizemos que W e um passeio de v_0 a v_ℓ.
- O comprimento $|W|$ do passeio W é o seu número de arestas.
- O passeio W é chamado de ímpar se $|W|$ é ímpar, e par, se $|W|$ é par.
- O passeio W, com comprimento $|W| > 0$, é fechado, se $v_0 = v_\ell$.
- Dizemos que v_ℓ é alcançável a partir de v_0 através de W.

Caminho

Caminho

Um caminho $P = (v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ em um grafo $G = (V, E)$ é um passeio em que nenhum vértice se repete.



Caminho $P = (r, z, y, x, w, v)$.

Distância

Distância

Seja um grafo $G = (V, E)$, e sejam $u, v \in V$ dois vértices. A **distância** de u a v em G é o **comprimento** de um caminho **mais curto** de u a v.

Distância

Distância

Seja um grafo $G = (V, E)$, e sejam $u, v \in V$ dois vértices. A **distância** de u a v em G é o **comprimento** de um caminho **mais curto** de u a v.

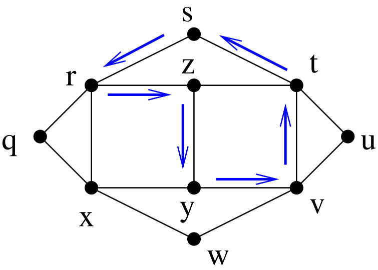
Notação:

- **Distância** de u a v em G: $dist_G(u, v)$
- Escrevemos $dist(u, v)$ se, pelo contexto, sabemos qual é o grafo.
- Se **não existe** caminho de u a v, escrevemos $dist(u, v) = +\infty$.

Ciclo

Ciclo

Um ciclo $C = (v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ em um grafo $G = (V, E)$ é um **passeio fechado** que não repete vértices nem arestas, exceto $v_0 = v_\ell$.



Ciclo $C = (r, z, y, v, t, s, r)$.

Conexidade

As definições de passeios, trilhas, caminhos, ciclos e distância são **análogas** para grafos direcionados.

Grafo conexo

Grafo conexo

Um grafo não direcionado $G = (V, E)$ é **conexo** se para **todo par** de vértices u, v **existe um caminho** de u a v em G.

Se G **não é conexo**, dizemos que G é desconexo.

Resumo

Passeio aleatório

Considere o procedimento a seguir:

Dado um grafo G e um nó inicial v_0:

1. Selecione aleatoriamente um vizinho v_1 do nó v_0 e mova-se para este vizinho;
2. Selecione aleatoriamente um vizinho v_2 do nó v_1 e mova-se para ele;
3. ... (continuar até atingir alguma condição de parada).

Passeio aleatório

Considere o procedimento a seguir:

Dado um grafo G e um nó inicial v_0:

1. Selecione aleatoriamente um vizinho v_1 do nó v_0 e mova-se para este vizinho;
2. Selecione aleatoriamente um vizinho v_2 do nó v_1 e mova-se para ele;
3. . . . (continuar até atingir alguma condição de parada).

Este procedimento é chamado de passeio aleatório no grafo G.

Passeio aleatório

Considere o procedimento a seguir:

Dado um grafo G e um nó inicial v_0:

1. Selecione aleatoriamente um vizinho v_1 do nó v_0 e mova-se para este vizinho;
2. Selecione aleatoriamente um vizinho v_2 do nó v_1 e mova-se para ele;
3. ... (continuar até atingir alguma condição de parada).

Este procedimento é chamado de passeio aleatório no grafo G.

Pergunta importante: Um passeio aleatório é um passeio?

Passeio aleatório

Considere o procedimento a seguir:

Dado um grafo G e um nó inicial v_0:

1. Selecione aleatoriamente um vizinho v_1 do nó v_0 e mova-se para este vizinho;
2. Selecione aleatoriamente um vizinho v_2 do nó v_1 e mova-se para ele;
3. . . . (continuar até atingir alguma condição de parada).

Este procedimento é chamado de passeio aleatório no grafo G.

Pergunta importante: Um passeio aleatório é um passeio? – Não! A sequência de nós visitados pelo passeio aleatório forma um passeio, mas o passeio aleatório é um processo estocástico (um algoritmo estocástico).

Passeio aleatório

Seja A_G a matriz de adjacência, e D uma matriz diagonal com $D_{i,i} = 1/d(v_i)$.

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{d(v_1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d(v_2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d(v_3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d(v_4)} \end{pmatrix}$$

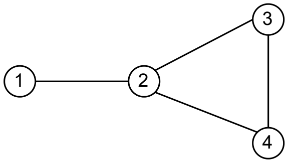
Passeio aleatório

Seja A_G a matriz de adjacência, e D uma matriz diagonal com $D_{i,i} = 1/d(v_i)$.

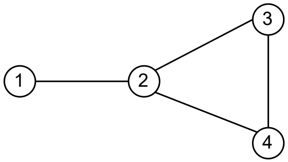
$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{d(v_1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d(v_2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d(v_3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d(v_4)} \end{pmatrix}$$

Então, a matriz $M = DA_G$ indica a probabilidade de se mover do nó v_i para o nó v_j, e é chamada de matriz de transição do grafo G.

Passeio aleatório – Exemplo

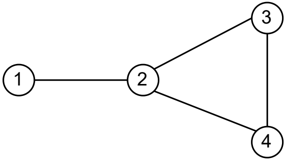


Passeio aleatório – Exemplo



$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

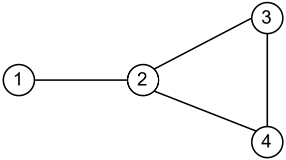
Passeio aleatório – Exemplo



$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Passeio aleatório – Exemplo



$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Propriedades da matriz de transição M:

- Todas as entradas são não-negativas;
- A soma de todas as linhas é igual a 1.

Passeio aleatório

Seja P_0 o vetor que indica o nó inicial v_j do passeio aleatório:

$$P_0[i] = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Passeio aleatório

Seja P_0 o vetor que indica o nó inicial v_j do passeio aleatório:

$$P_0[i] = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Vamos multiplicar a matriz de transição transposta M pelo vetor P_0, com $P_0[1] = 1$.

$$P_1 = M^T P_0.$$

O que indica o vetor P_1?

Passeio aleatório

Seja P_0 o vetor que indica o nó inicial v_j do passeio aleatório:

$$P_0[i] = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Vamos multiplicar a matriz de transição transposta M pelo vetor P_0, com $P_0[1] = 1$.

$$P_1 = M^T P_0.$$

O que indica o vetor P_1? – Indica a probabilidade de estar em cada vértice v_i após uma única iteração do passeio aleatório.

Passeio aleatório

Seja P_{t-1} o vetor que indica a probabilidade de estar no vértice v_i após $t-1$ iterações. Probabilidade de estar no vértice v_i no passo t do passeio aleatório:

$$P_t = M^T P_{t-1}$$

Passeio aleatório

Seja P_{t-1} o vetor que indica a probabilidade de estar no vértice v_i após $t-1$ iterações. Probabilidade de estar no vértice v_i no passo t do passeio aleatório:

$$P_t = M^T P_{t-1} = (M^T)^t P_0.$$

Passeio aleatório

Seja P_{t-1} o vetor que indica a probabilidade de estar no vértice v_i após $t-1$ iterações.
Probabilidade de estar no vértice v_i no passo t do passeio aleatório:

$$P_t = M^T P_{t-1} = (M^T)^t P_0.$$

Veja que cada vetor P_t é uma distribuição de probabilidade entre os nós do grafo.

Passeio aleatório

Seja P_{t-1} o vetor que indica a probabilidade de estar no vértice v_i após $t-1$ iterações.
Probabilidade de estar no vértice v_i no passo t do passeio aleatório:

$$P_t = M^T P_{t-1} = (M^T)^t P_0.$$

Veja que cada vetor P_t é uma distribuição de probabilidade entre os nós do grafo.
E se calculamos $P_0, P_1, P_2, P_3 \ldots$? Ou seja, se $t \to \infty$, o que ocorre com

$$\lim_{t\to\infty} P_t \text{ ?}$$

Passeio aleatório

Seja P_{t-1} o vetor que indica a probabilidade de estar no vértice v_i após $t-1$ iterações.
Probabilidade de estar no vértice v_i no passo t do passeio aleatório:

$$P_t = M^T P_{t-1} = (M^T)^t P_0.$$

Veja que cada vetor P_t é uma distribuição de probabilidade entre os nós do grafo.
E se calculamos $P_0, P_1, P_2, P_3 \ldots$? Ou seja, se $t \to \infty$, o que ocorre com

$$\lim_{t \to \infty} P_t \text{ ?}$$

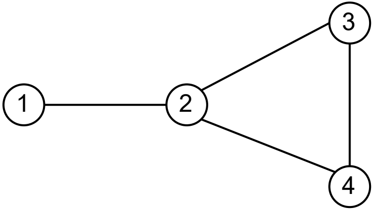
Propriedade **mais importante** dos passeios aleatórios:

- Se o grafo G é conexo e não é bipartido, então quando $t \to \infty$, a distribuição P_t vai tender a uma única distribuição, independentemente do nó inicial.

Passeio aleatório

Exercício:

Considerando o grafo apresentado, e o nó 1 sendo o nó inicial do passeio aleatório, calcule os vetores de distribuição de probabilidade P_i para $i = 1, \dots, 5$.



(*) Utilizar a fórmula $P_t = M^T P_{t-1}$, onde $M = DA_G$ é a matriz de transição.

Passeio aleatório

Definição

A distribuição P_0 é estacionária se $P_0 = M^T P_0$.

Passeio aleatório

Definição

A distribuição P_0 é estacionária se $P_0 = M^T P_0$.

- O vetor da distribuição estacionária é geralmente chamado π, e reflete a probabilidade de estar em cada vértice após muitas iterações do passeio aleatório.

Passeio aleatório

Definição

A distribuição P_0 é estacionária se $P_0 = M^T P_0$.

- O vetor da distribuição estacionária é geralmente chamado π, e reflete a probabilidade de estar em cada vértice após muitas iterações do passeio aleatório.
- Se existe a distribuição estacionária, ela é única (independe do nó inicial)!

Passeio aleatório

Definição

A distribuição P_0 é estacionária se $P_0 = M^T P_0$.

- O vetor da distribuição estacionária é geralmente chamado π, e reflete a probabilidade de estar em cada vértice após muitas iterações do passeio aleatório.
- Se existe a distribuição estacionária, ela é única (independe do nó inicial)!
- Se G é conexo e não bipartido, então quando $t \to \infty$, a distribuição P_t tende a uma distribuição estacionária.

Passeio aleatório

Definição

A distribuição P_0 é estacionária se $P_0 = M^T P_0$.

- O vetor da distribuição estacionária é geralmente chamado π, e reflete a probabilidade de estar em cada vértice após muitas iterações do passeio aleatório.
- Se existe a distribuição estacionária, ela é única (independe do nó inicial)!
- Se G é conexo e não bipartido, então quando $t \to \infty$, a distribuição P_t tende a uma distribuição estacionária.
- Em um grafo conexo e não bipartido, a distribuição a seguir é estacionária:

$$\pi[i] = \frac{d(v_i)}{2|E|}.$$

Passeio aleatório

O que acontece em um grafo bipartido? (Pense em um exemplo)

Passeio aleatório

Em grafos direcionados, tudo é bem mais complicado.

Resumo

Componentes conexas

Teorema

Seja $G = (V, E)$ um grafo não direcionado. A relação:

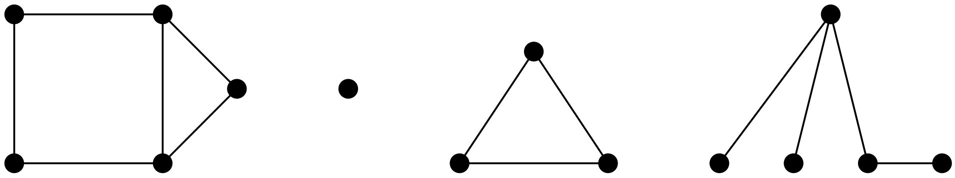
$$\mathcal{R} = \{(u, v) : \text{ existe um caminho de } u \text{ a } v \text{ em } G,\ u, v \in V\ \}$$

é uma **relação de equivalência**.

As **classes de equivalência** que essa relação define são chamadas **componentes**, ou **componentes conexas** do grafo G.

Componentes de um grafo

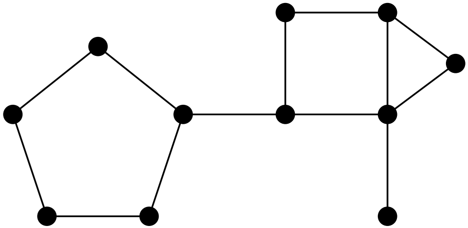
Componentes conexas de um grafo:



Notação: $c(G)$ é o **número de componentes** do grafo G.

Número de componentes

Se $G = (V, E)$ é um grafo, e $e \in E$, então $c(G) \leq c(G - e) \leq c(G) + 1$.



Ponte ou aresta-de-corte

Definição

Seja $G = (V, E)$ um grafo. A aresta $e \in E$ é uma ponte (ou aresta-de-corte) de G, se $c(G - e) = c(G) + 1$.

- Se G é conexo, dizemos que a remoção de e desconecta G.

Ponte ou aresta-de-corte

Definição

Seja $G = (V, E)$ um grafo. A aresta $e \in E$ é uma ponte (ou aresta-de-corte) de G, se $c(G - e) = c(G) + 1$.

- Se G é conexo, dizemos que a remoção de e desconecta G.

Caracterização das pontes

Seja $G = (V, E)$ um grafo, e seja $e \in E$. A aresta e é uma ponte de G se e somente se e não pertence a nenhum ciclo de G.

Árvores

Grafo acíclico

Um grafo G é acíclico se ele não contém ciclos.

Árvores

Grafo acíclico

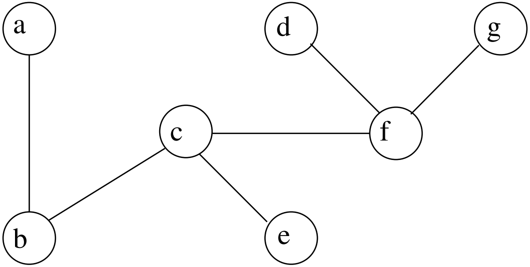
Um grafo G é acíclico se ele não contém ciclos.

Árvore

Uma árvore é um **grafo conexo** e **acíclico**.

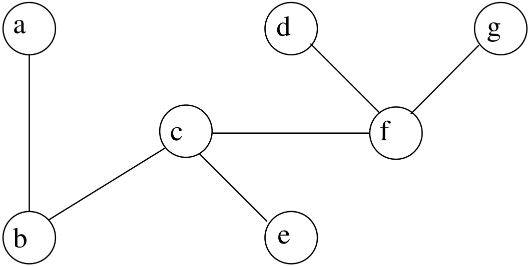
Árvores

Exemplo de uma **árvore**:



Árvores

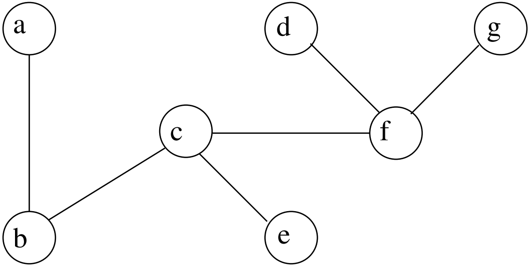
Exemplo de uma **árvore**:



- Uma **folha** de uma árvore G é um vértice de grau 1.

Árvores

Exemplo de uma **árvore**:



- Uma **folha** de uma árvore G é um vértice de grau 1.
- Se v é uma folha da árvore $G \Rightarrow G - v$ é uma árvore.

Árvores

- Todo **grafo conexo** $G = (V, E)$ possui **pelo menos** $|V| - 1 = n - 1$ arestas.
    - Veja que cada aresta pode conectar apenas 2 componentes. Precisamos colocar no mínimo $n - 1$ arestas em um grafo vazio para ter uma única componente.

Árvores

- Todo **grafo conexo** $G = (V, E)$ possui **pelo menos** $|V| - 1 = n - 1$ arestas.
  - Veja que cada aresta pode conectar apenas 2 componentes. Precisamos colocar no mínimo $n - 1$ arestas em um grafo vazio para ter uma única componente.
- A árvore sempre possui exatamente $n - 1$ arestas.

Caracterização das árvores

Teorema

Seja $G = (V, E)$ um grafo com $|V| = n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. G é uma **árvore** (G é **conexo** e **acíclico**),
2. G é **conexo** e $|E| = n - 1$,
3. G é **acíclico** e $|E| = n - 1$,
4. G é **conexo** e toda aresta é uma **aresta-de-corte**.

Floresta

Floresta

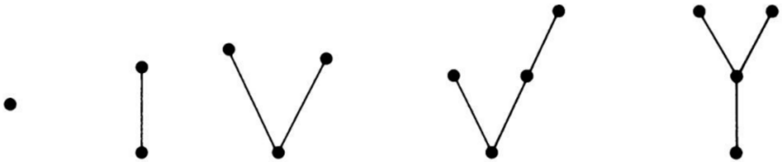
Um grafo acíclico (mas não necessariamente conexo) é uma **floresta**.

Floresta

Floresta

Um grafo acíclico (mas não necessariamente conexo) é uma **floresta**.

Veja que cada **componente da floresta** é uma **árvore**:



Resumo

Distribuição de graus

Distribuição de graus

A distribuição de graus do grafo G, para cada grau k, é a fração de nós do grafo cujo grau é k:

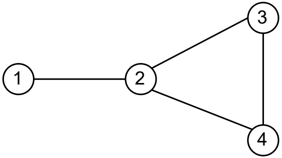
$$P(K = k) = p_k = \frac{n_k}{n}.$$

Distribuição de graus

Distribuição de graus

A distribuição de graus do grafo G, para cada grau k, é a fração de nós do grafo cujo grau é k:

$$P(K = k) = p_k = \frac{n_k}{n}.$$

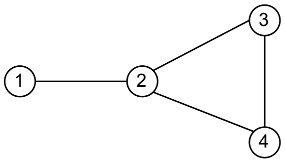


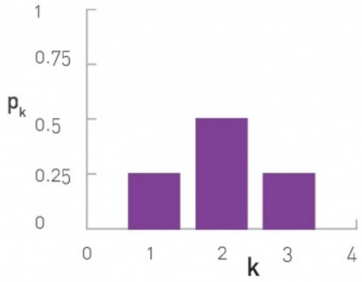
Distribuição de graus

Distribuição de graus

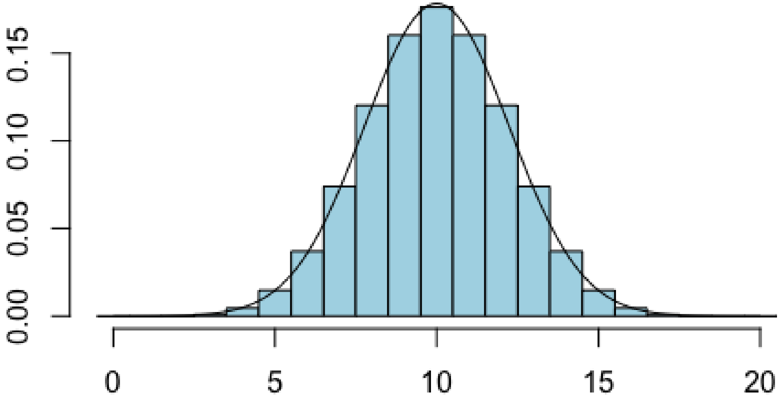
A distribuição de graus do grafo G, para cada grau k, é a fração de nós do grafo cujo grau é k:

$$P(K = k) = p_k = \frac{n_k}{n}.$$

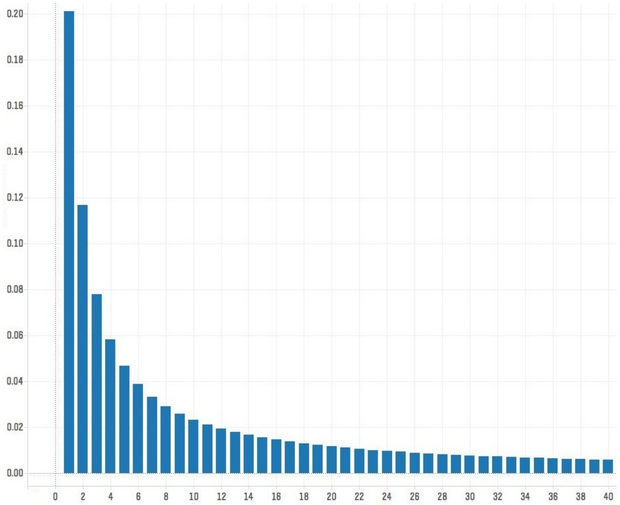




Distribuição de graus: Exemplo 1



Distribuição de graus: Exemplo 2



Lembrar: aula prática

A próxima aula será uma aula prática: **trazer notebook**!

Dúvidas

Dúvidas?