Recursão ... novamente!?

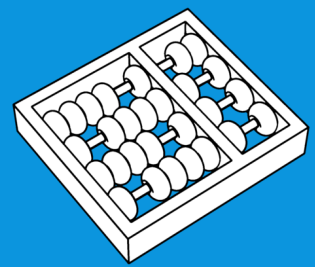
MC102 - Algoritmos e Programação de Computadores

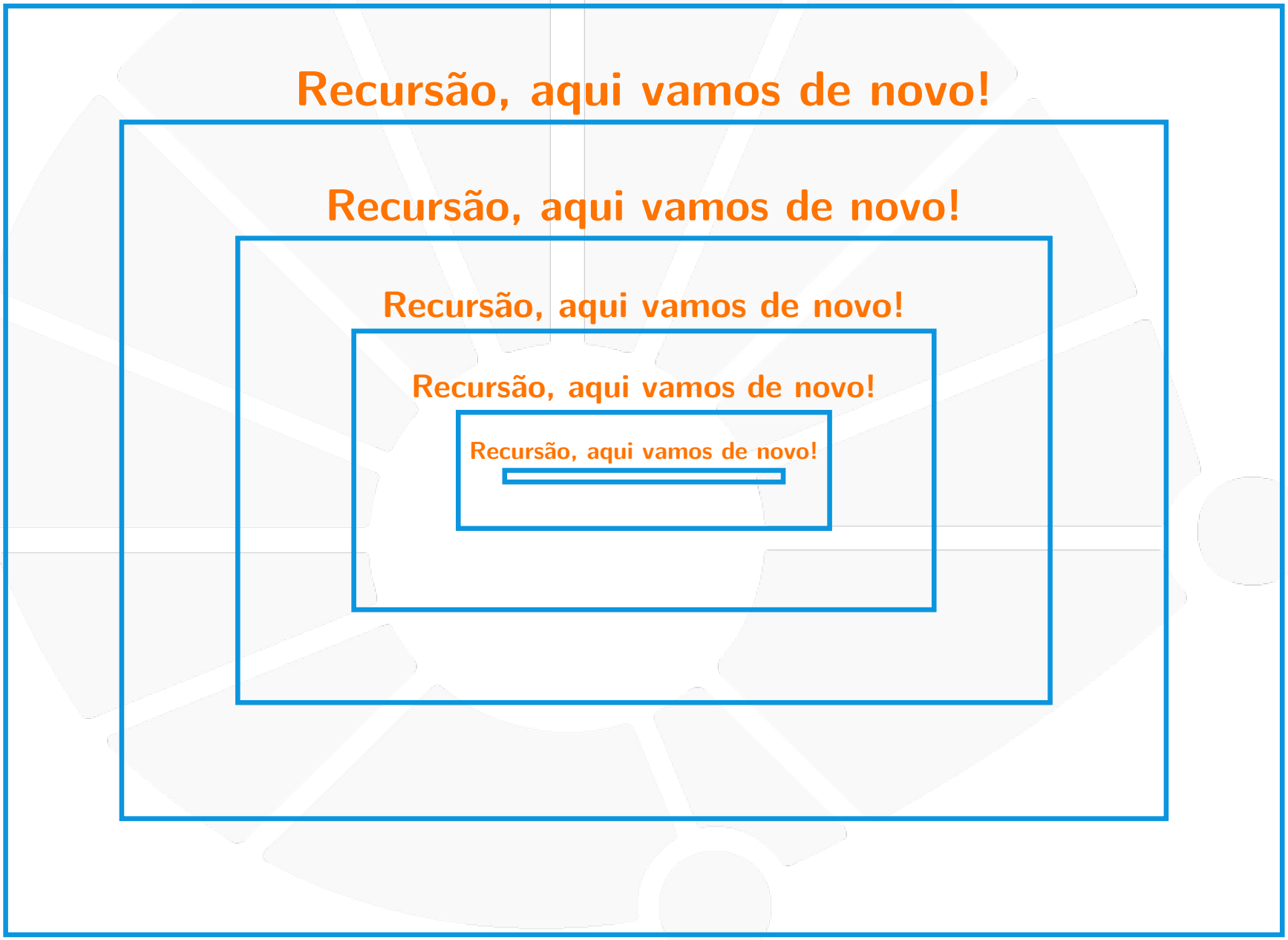
06/24

23

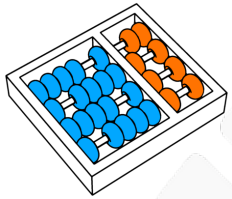
Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

UNICAMP




Recursão, aqui vamos de novo!
Recursão, aqui vamos de novo!
Recursão, aqui vamos de novo!
Recursão, aqui vamos de novo!
Recursão, aqui vamos de novo!
Recursão, aqui vamos de novo!
Recursão, aqui vamos de novo!

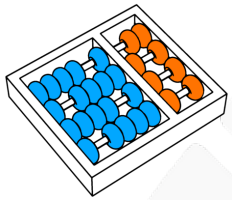
Dúvidas da aula anterior



Dúvidas selecionadas

- Por que o Quick Sort é o mais demorado quando o vetor já está ordenado?
- Como dizer se uma lista tá ordenada "o suficiente"pra um algoritmo insertion ou bubble ser mais eficiente que um quick ou merge? E é assim que o Python decide se vai usar o Quick ou o insertion?
- Existe uma forma de fazer as ordenações vistas em aula com iteração ? Acredito que pela função fica muito mais fácil abranger todos os casos, seja uma lista com 10 ou 1000 elementos
- Pode dar exemplo de um algoritmo que é pensado recursivamente e implementado usando iteração?
- Como que o quick sort lida com uma lista com todos os elementos iguais?
- Ainda não entendi muito bem para quais casos o merge sort é útil.
- Eu ouvi dizer que dependendo do pivô que você escolhe no selection sort, o tempo de execução muda muito, pode falar um pouco sobre, por favor?
- no caso do quick_sort, existe algum algoritmo para escolher o pivô? Pois se o pivô for o maior ou menor numero, o algoritmo de ordenação fica bem ineficiente.
- Em que ocasião da pra usar o merge sort, já que ele precisa de um pré requisito que é a lista estar ordenada em 2 partes
- Qual a aplicação de ordenar somente uma parte da lista?
- Existe algum algoritmo de ordenação que geralmente é mais rápido que O(n*logn)?
- Por que alguns algoritmos são mais recursivos do que outros? É que quando você tava explicando recursão V.S. iteração, deu a entender que tem uns algoritmos que são ontologicamente recursivos, mas eu não sei se essa é a ideia.
- Se for necessário ordenar dois vetores quaisquer (não necessariamente ordenados), acaba sendo mais fácil/rápido juntar as duas listas e usar quick-sort ou ordenar os dois separadamente e usar merge-sort?

Uma solução recursiva



Torres de Hanoi

Dadas três torres e **n** discos, onde:

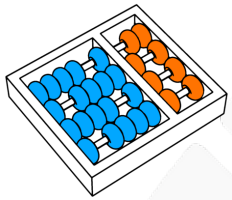
- Cada disco tem tamanho diferente.
- Todos os discos estão empilhados na primeira torre, de forma tal que um disco maior não está em cima de um menor.

O objetivo:

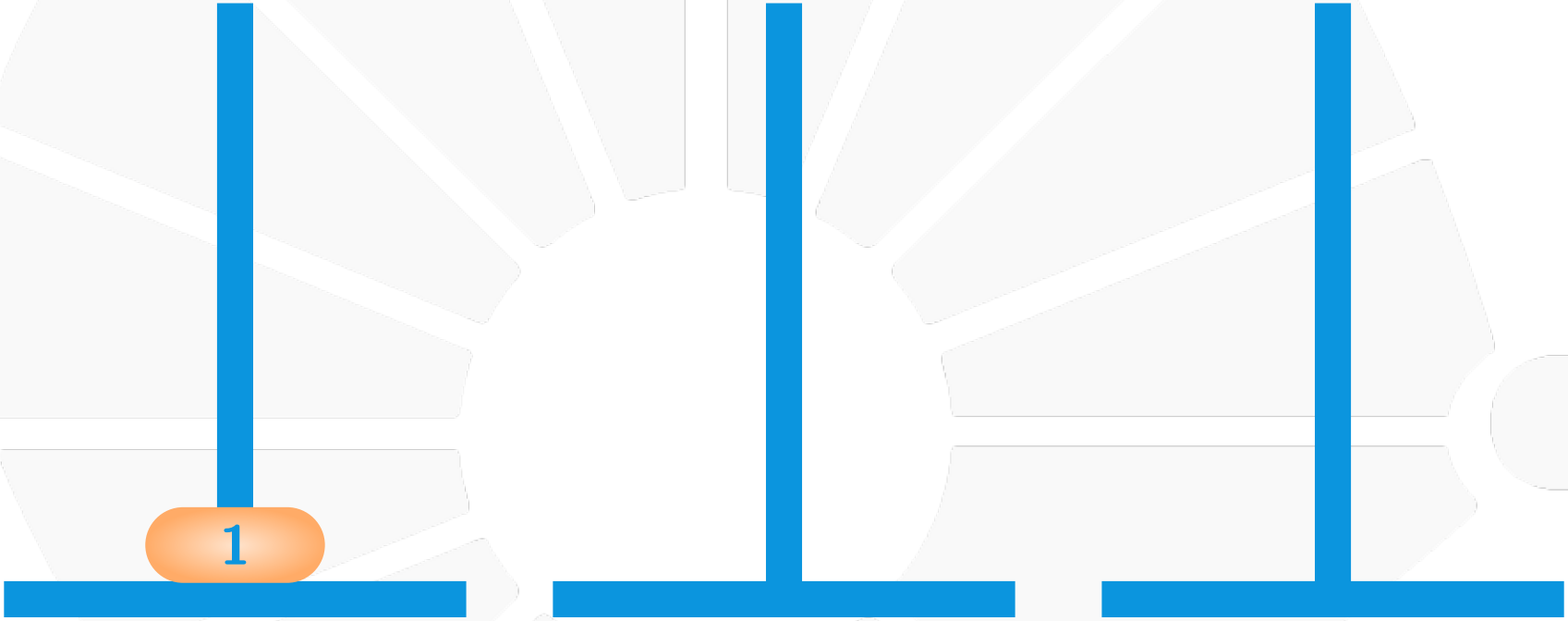
- Mover os discos da primeira torre até a terceira.

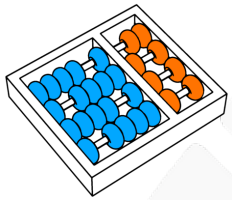
Restrições:

- Apenas é possível mover um disco por vez.
- Um disco maior nunca deve ser colocado em cima de um menor.

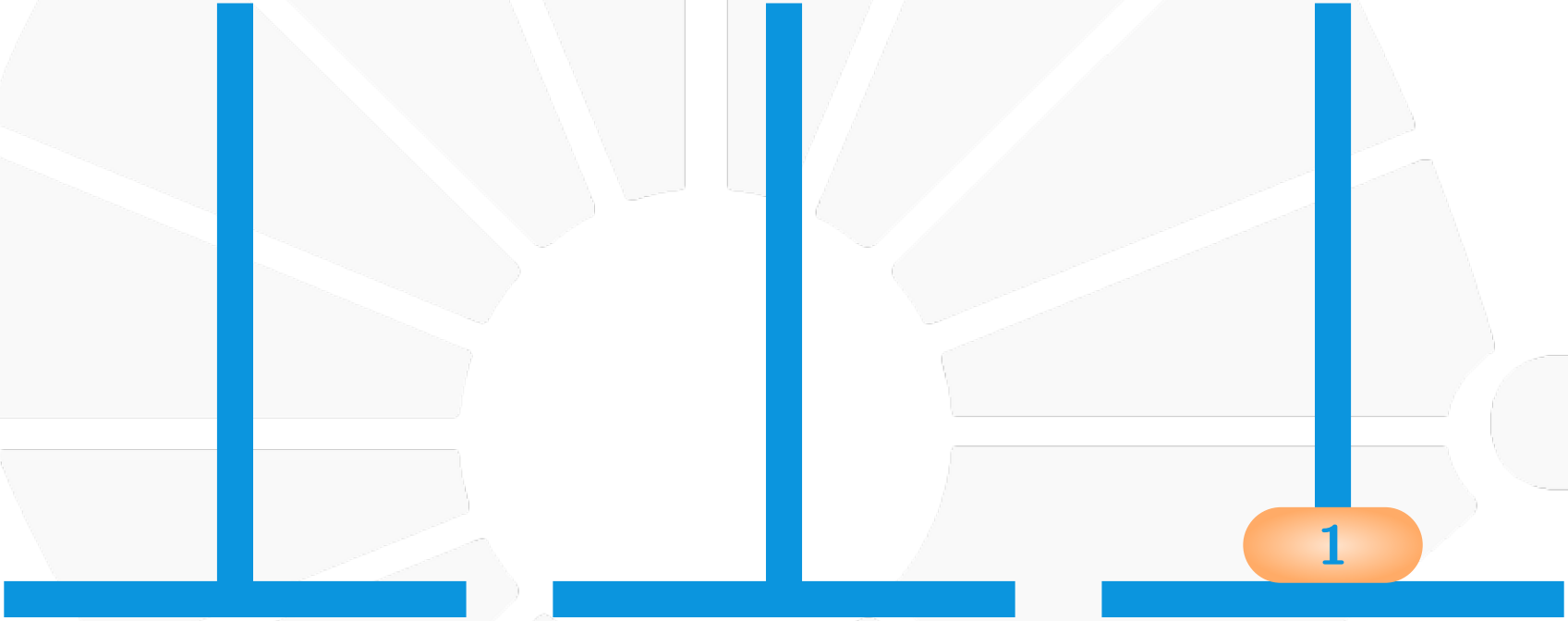


Torres de Hanoi – 1 discos

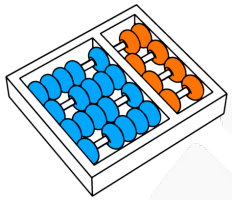




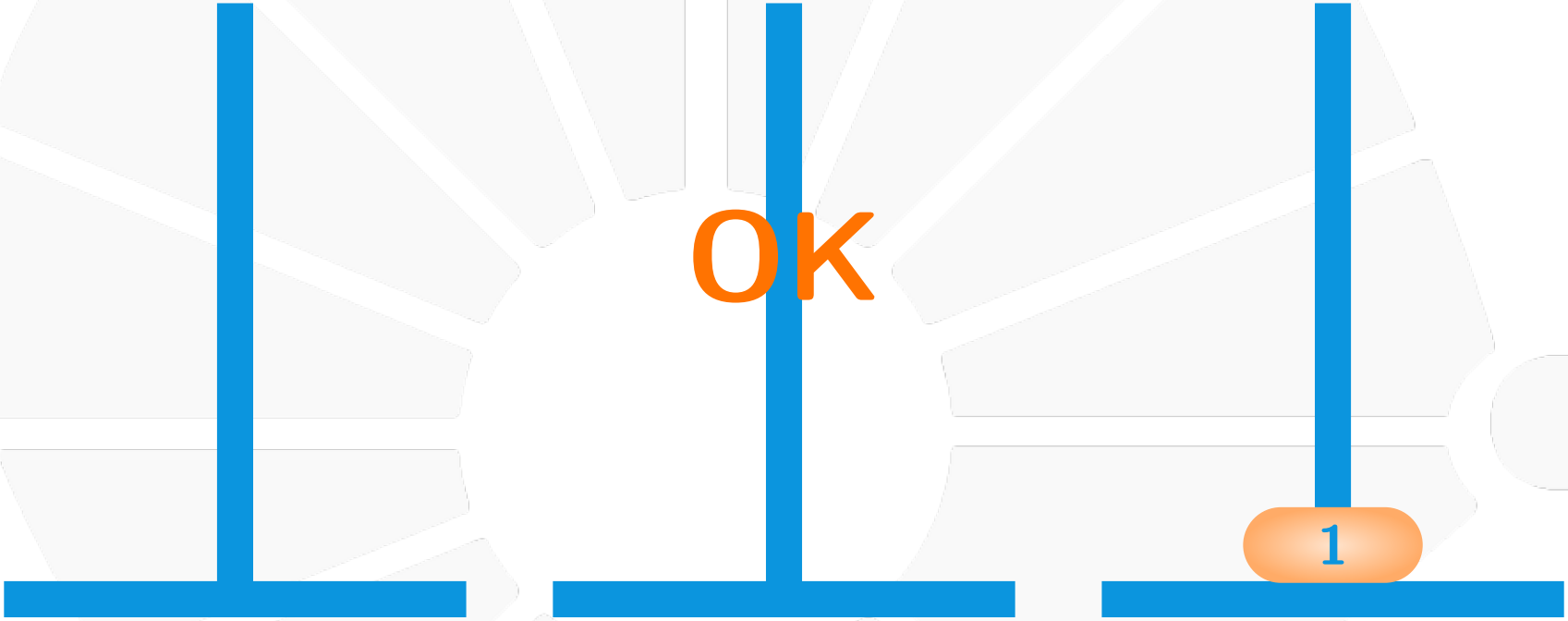
Torres de Hanoi – 1 discos

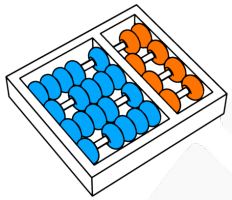


Mover o disco da torre 1 para a 3.

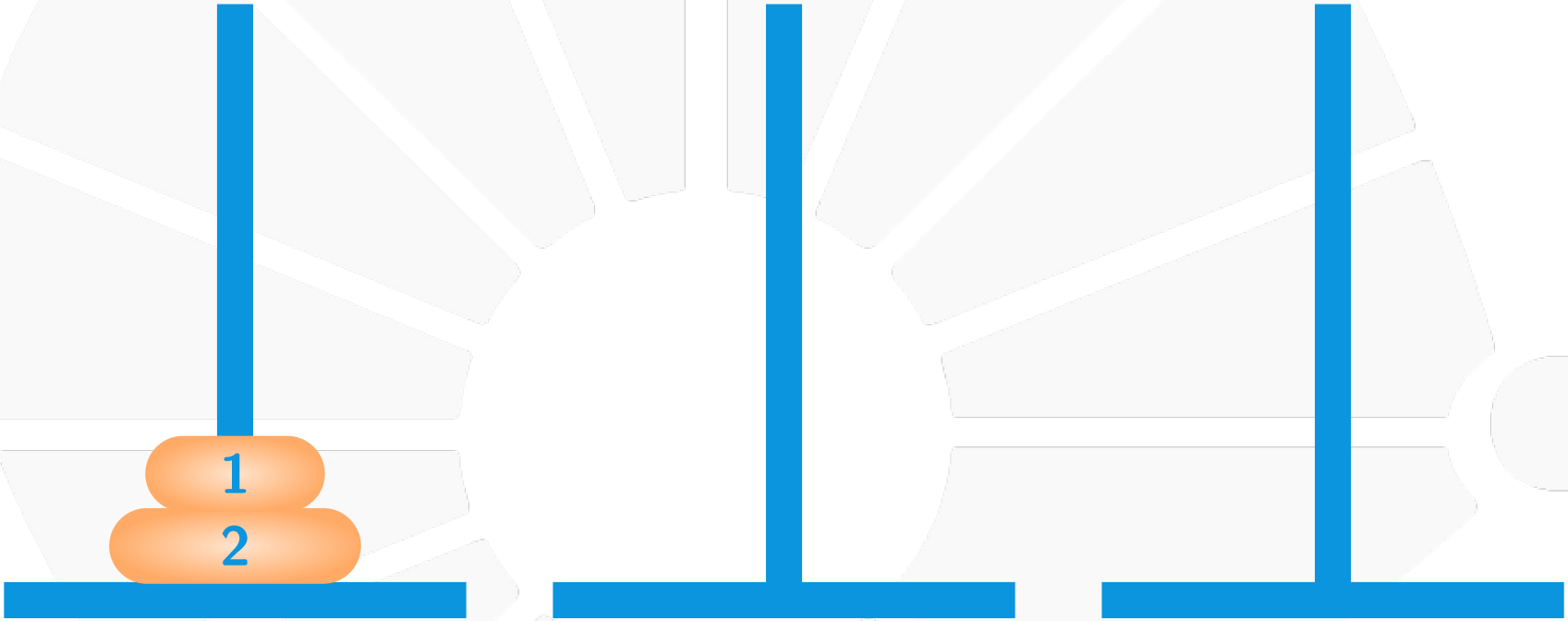


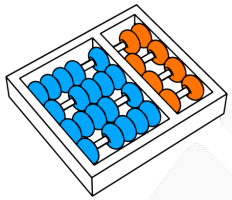
Torres de Hanoi – 1 discos



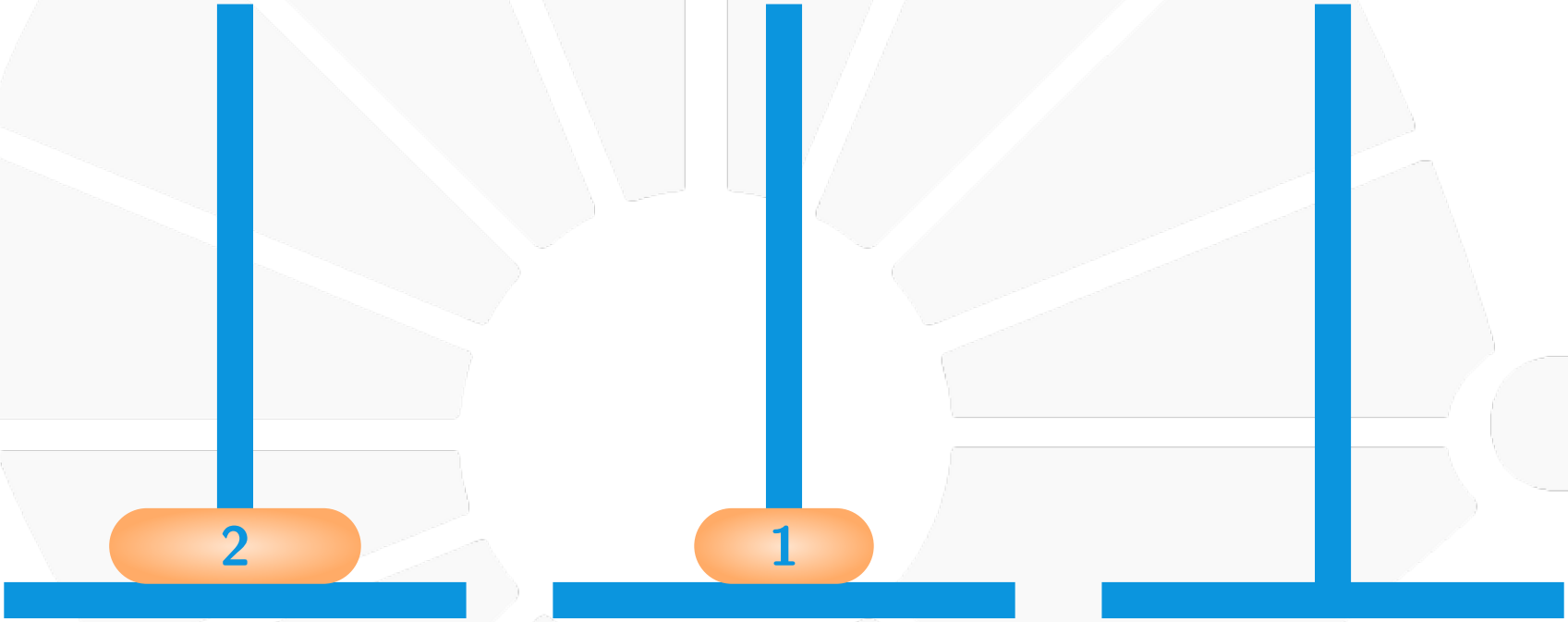


Torres de Hanoi – 2 discos

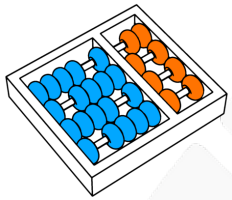




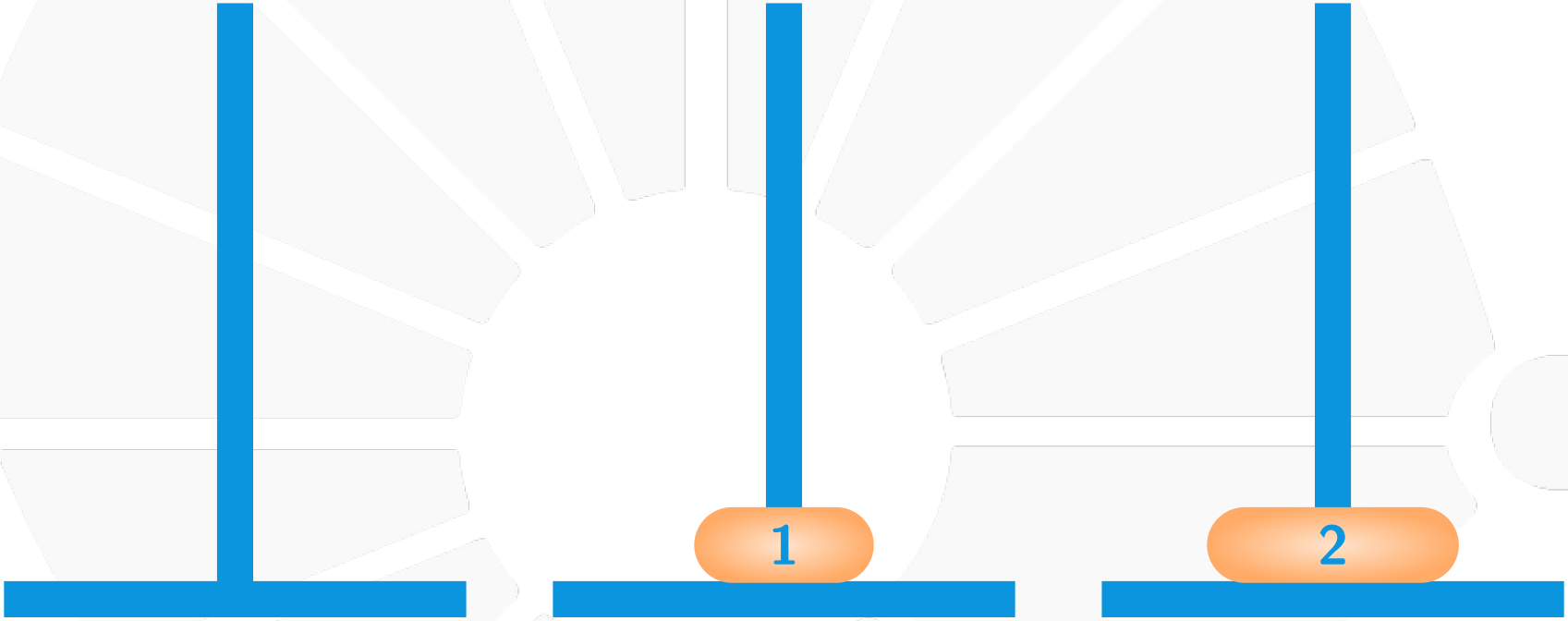
Torres de Hanoi – 2 discos



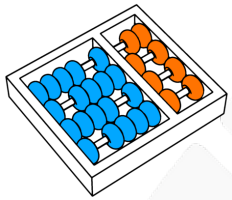
Mover o disco da torre 1 para a 2.



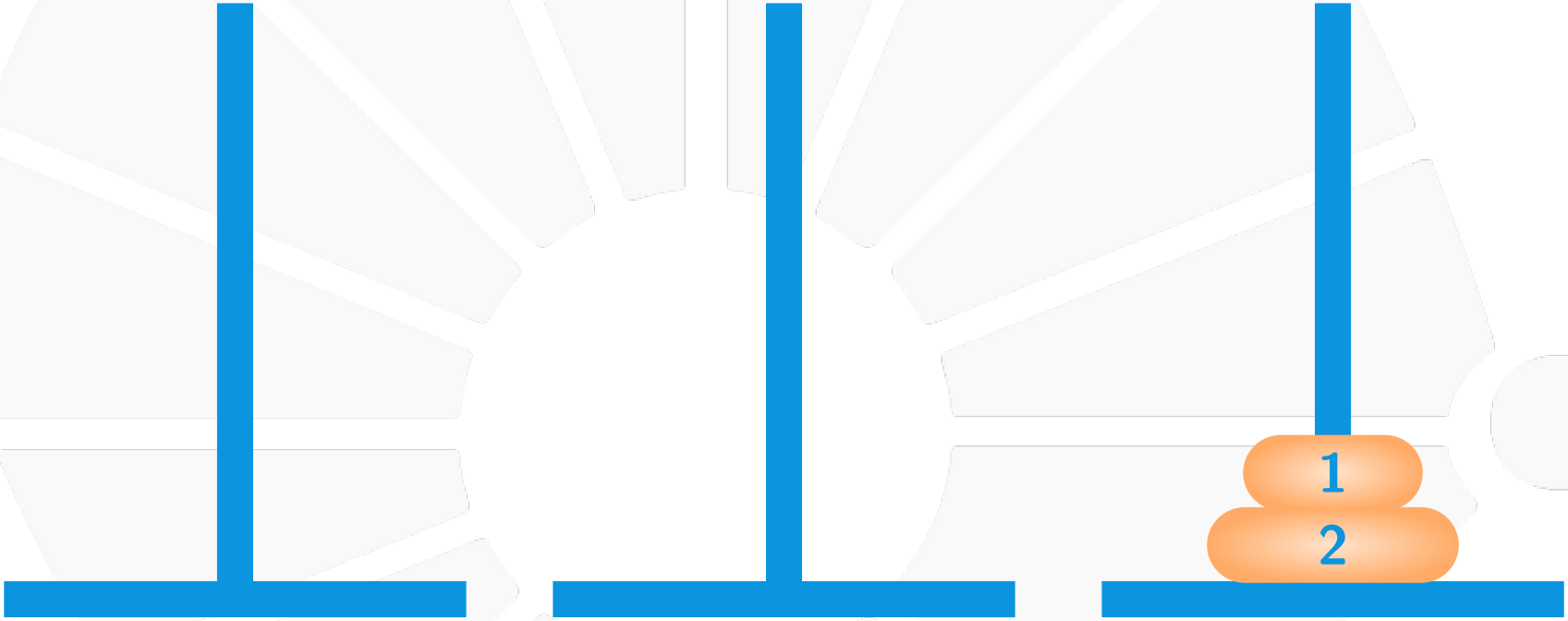
Torres de Hanoi – 2 discos



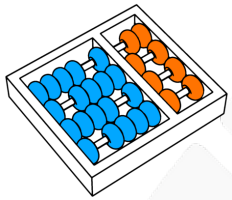
Mover o disco da torre 1 para a 3.



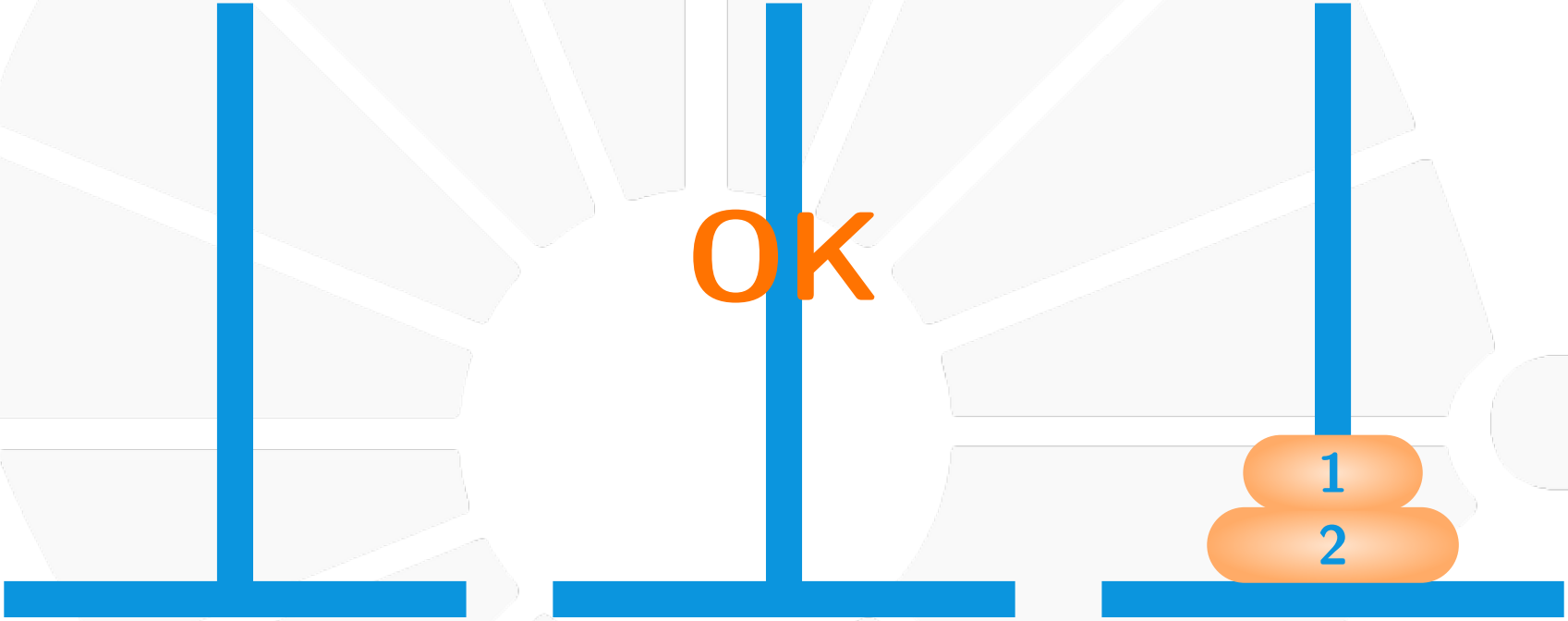
Torres de Hanoi – 2 discos

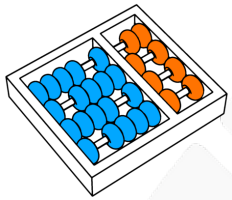


Mover o disco da torre 2 para a 3.

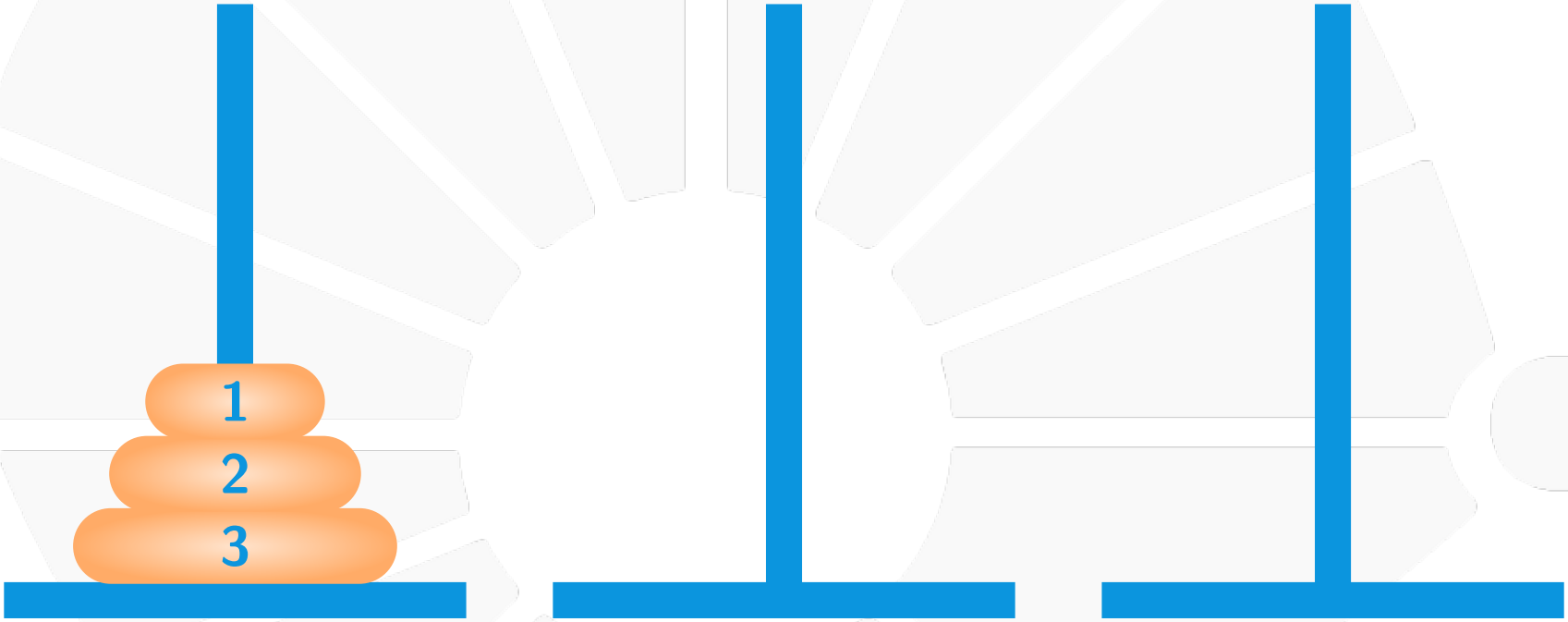


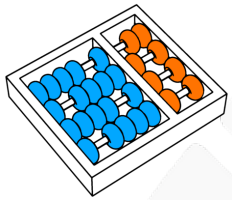
Torres de Hanoi – 2 discos



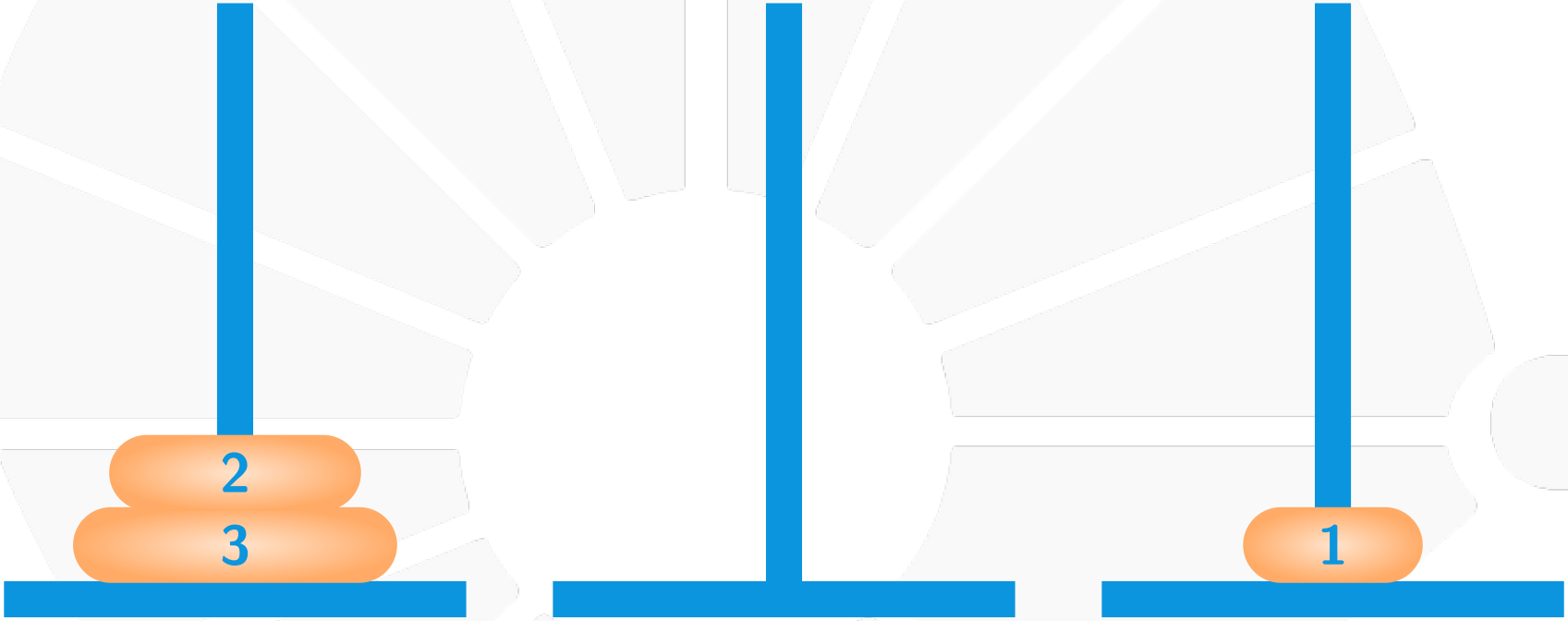


Torres de Hanoi – 3 discos

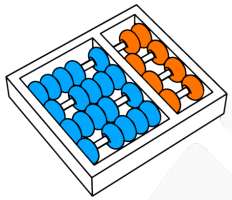




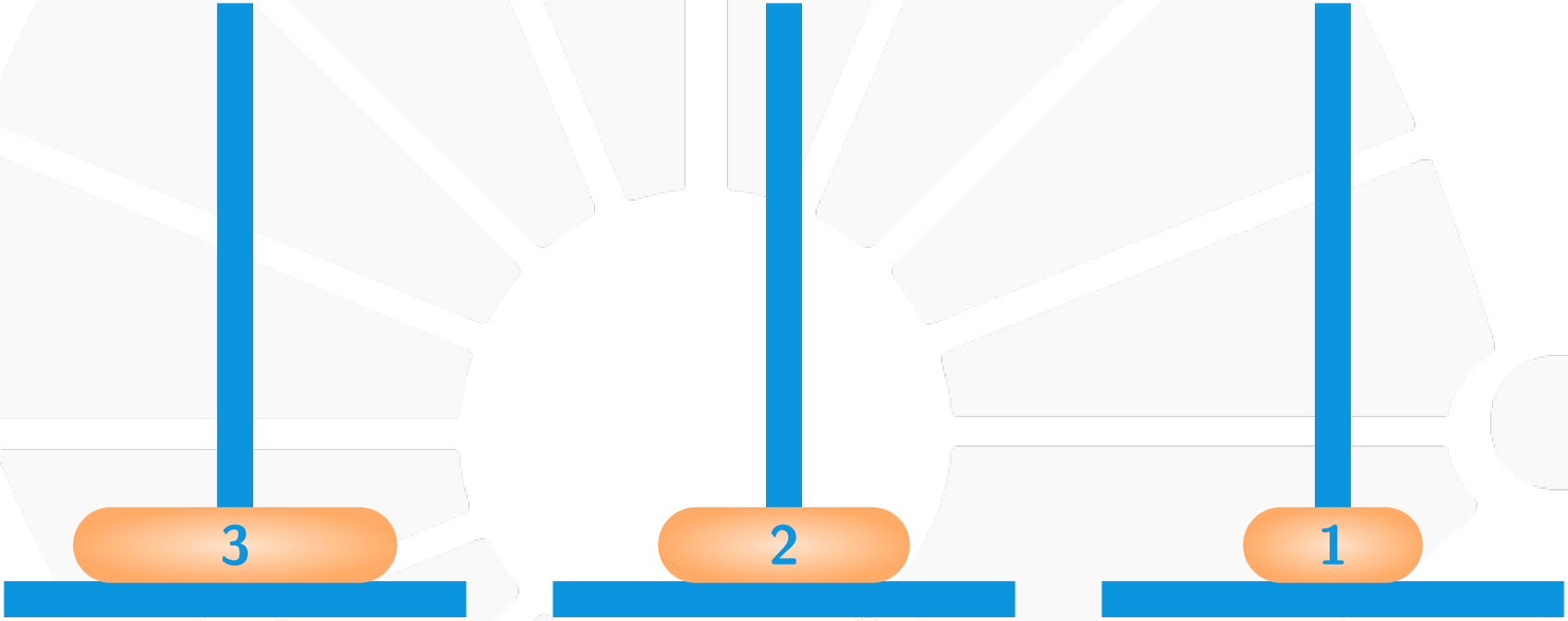
Torres de Hanoi – 3 discos



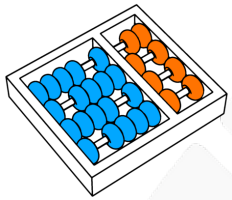
Mover o disco da torre 1 para a 3.



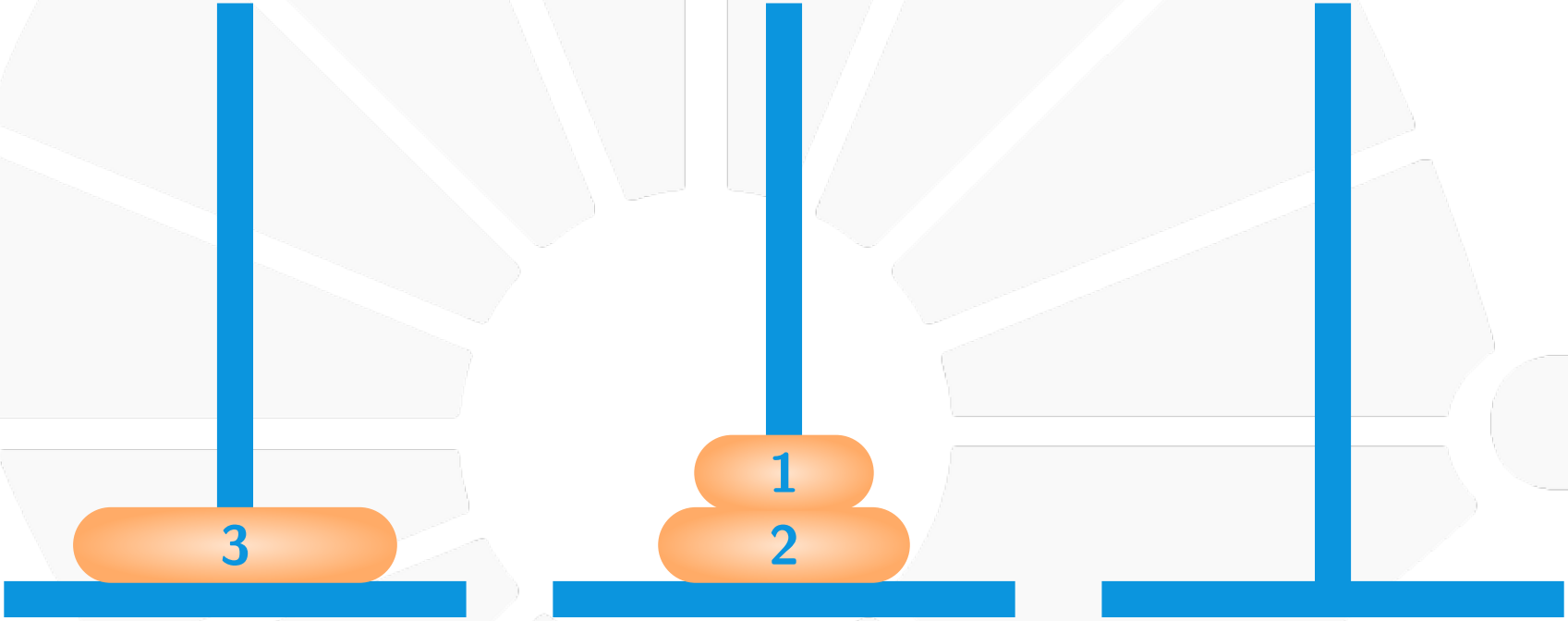
Torres de Hanoi – 3 discos



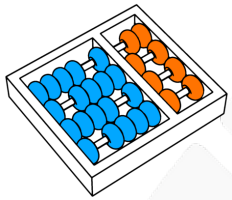
Mover o disco da torre 1 para a 2.



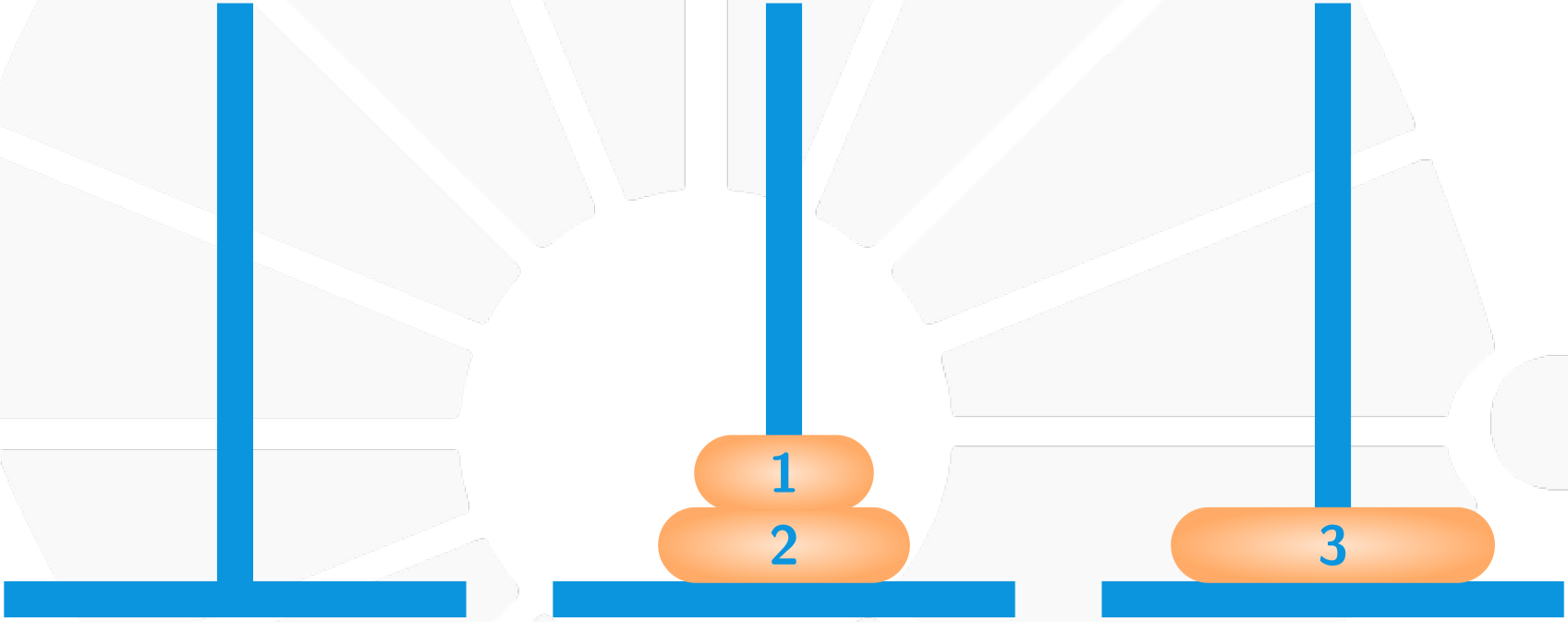
Torres de Hanoi – 3 discos



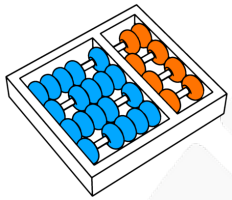
Mover o disco da torre 3 para a 2.



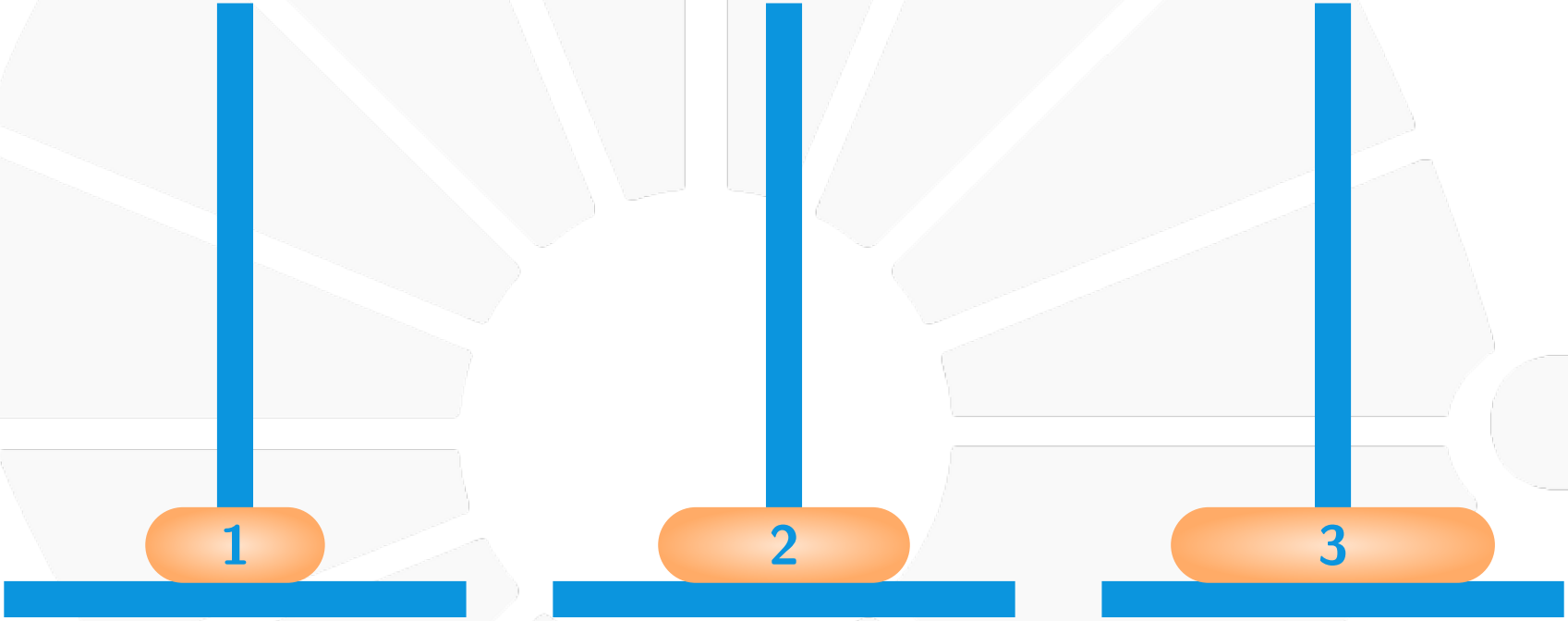
Torres de Hanoi – 3 discos



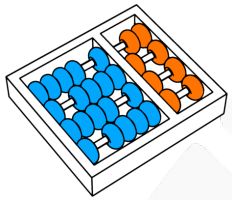
Mover o disco da torre 1 para a 3.



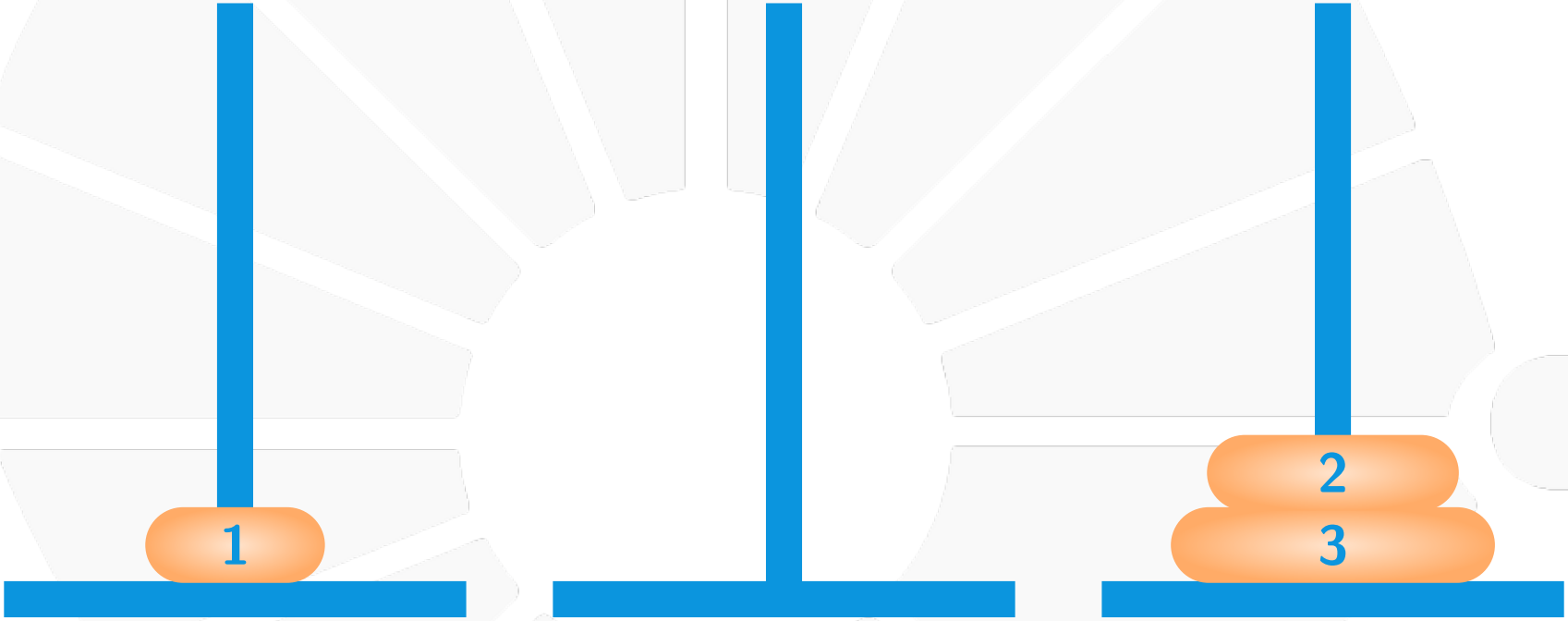
Torres de Hanoi – 3 discos



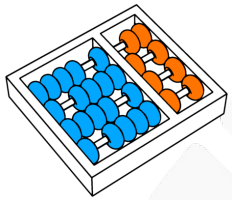
Mover o disco da torre 2 para a 1.



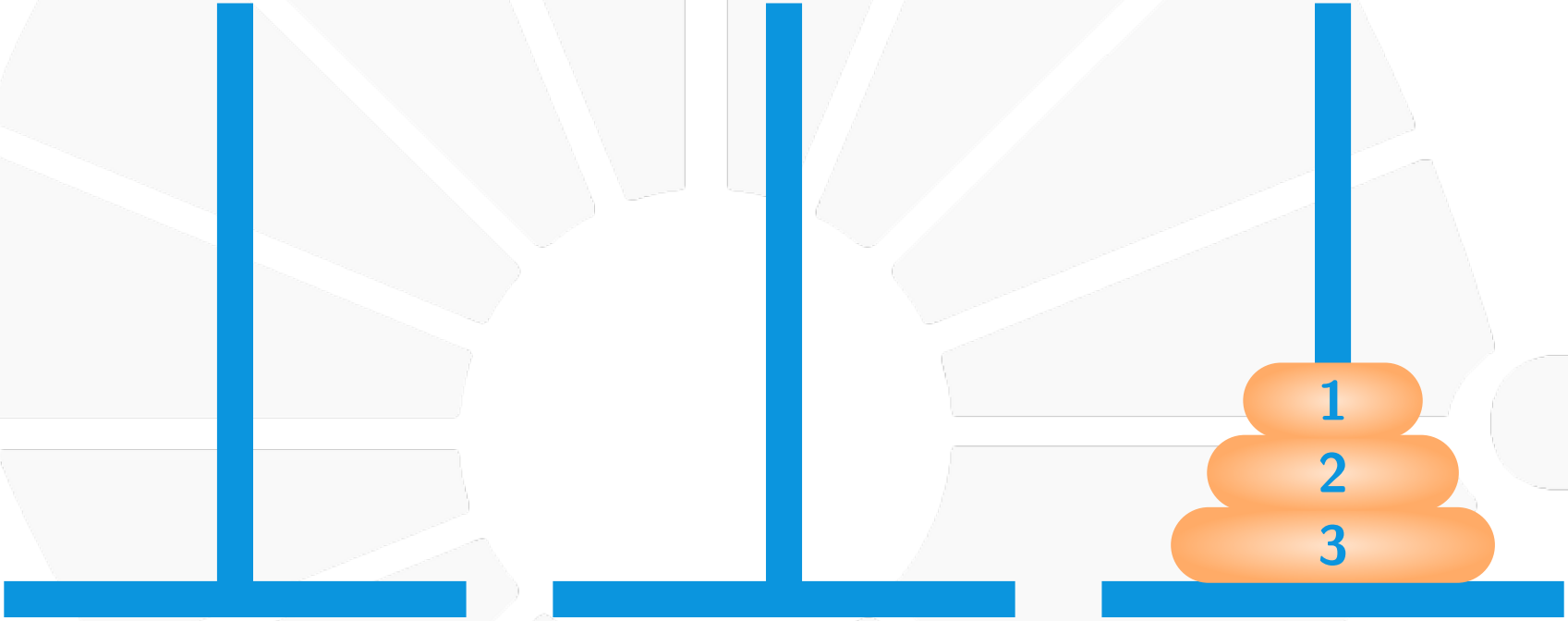
Torres de Hanoi – 3 discos



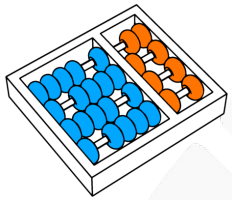
Mover o disco da torre 2 para a 3.



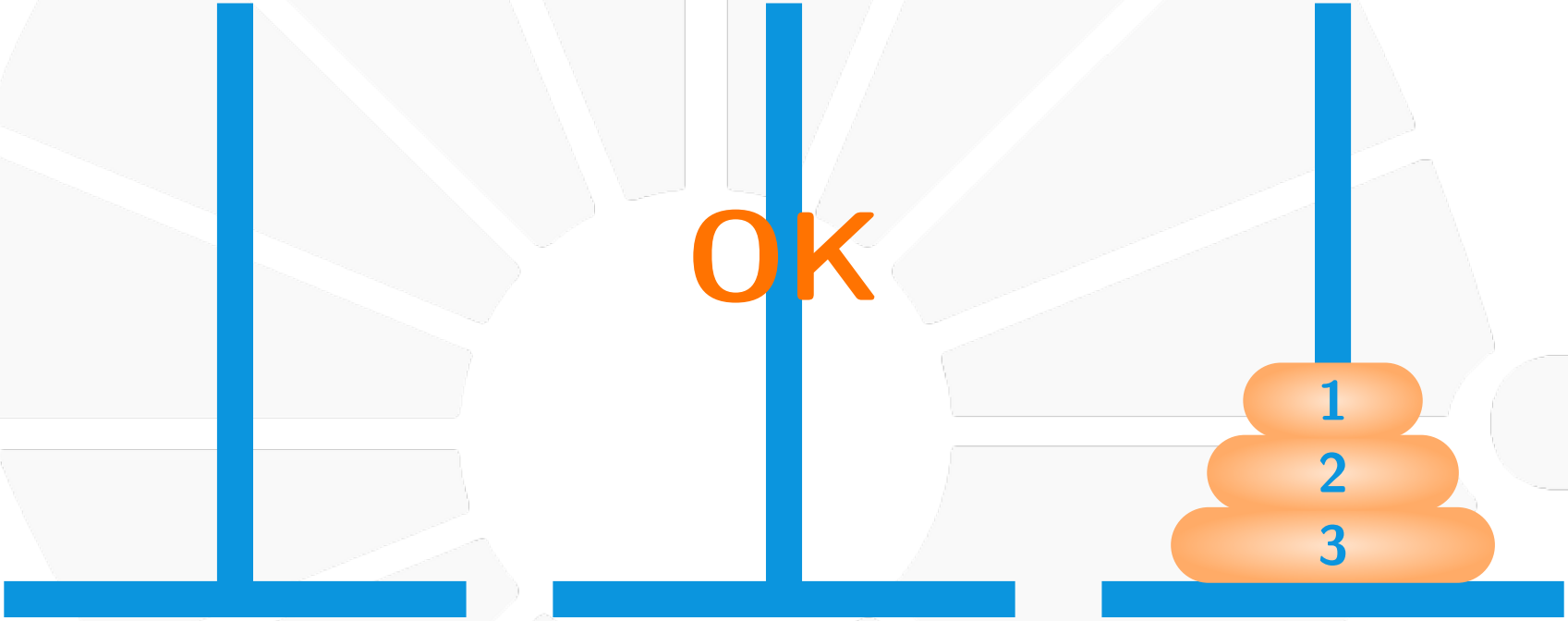
Torres de Hanoi – 3 discos

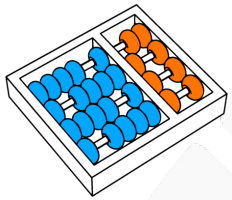


Mover o disco da torre 1 para a 3.

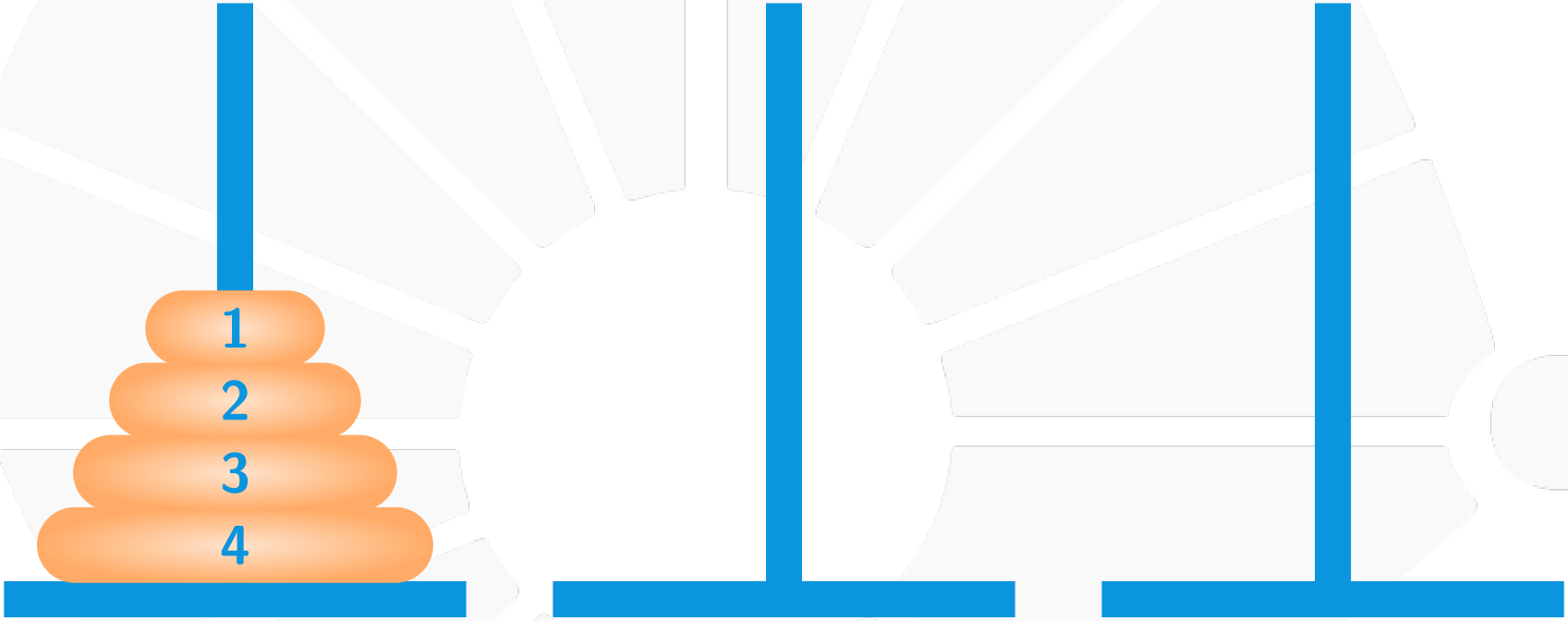


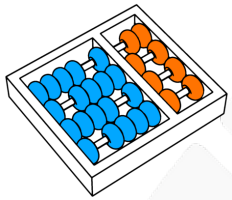
Torres de Hanoi – 3 discos



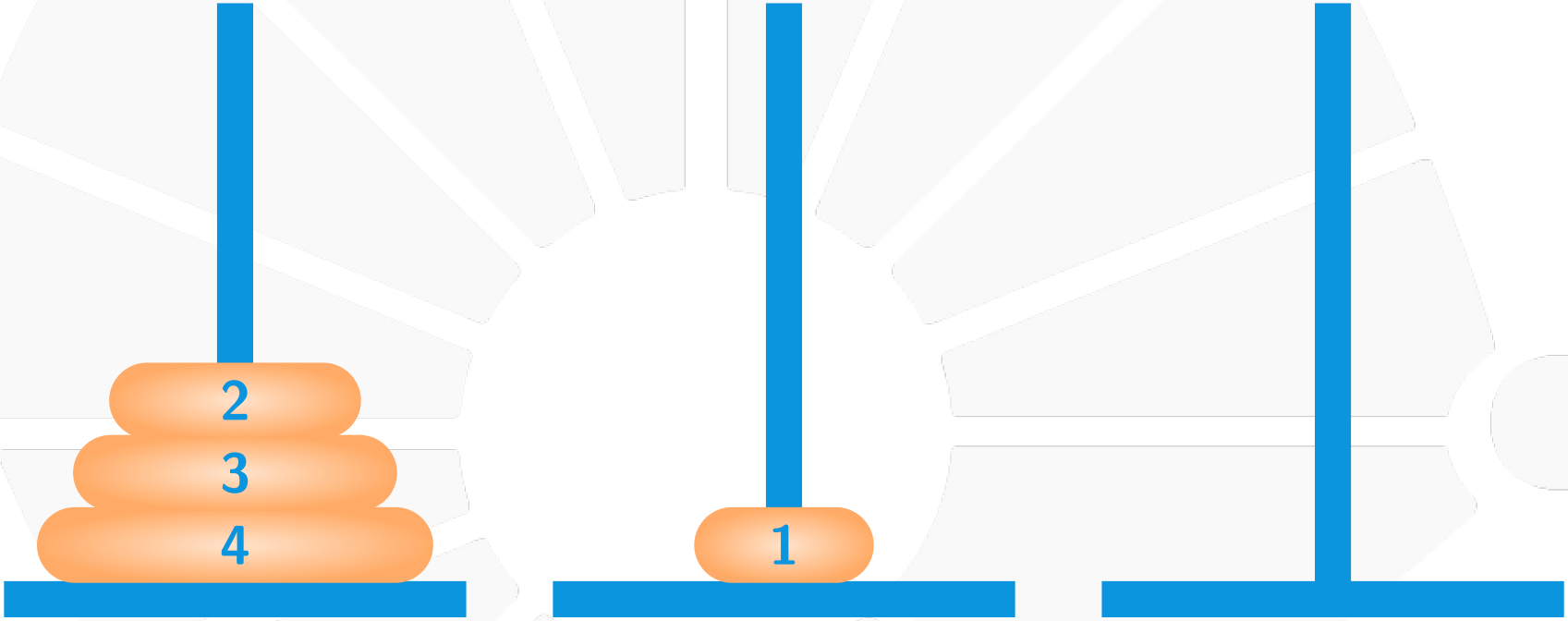


Torres de Hanoi – 4 discos

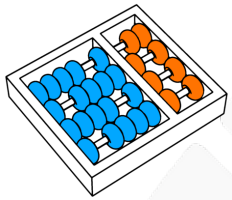




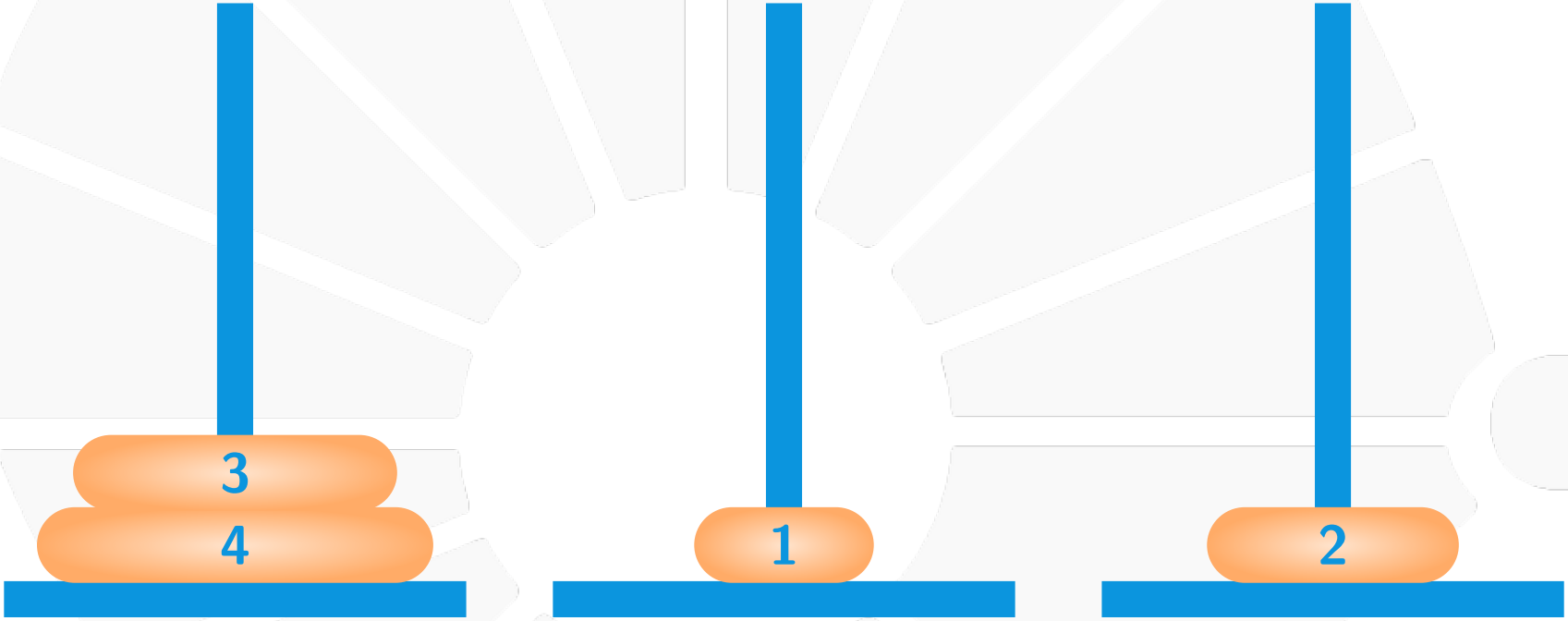
Torres de Hanoi – 4 discos



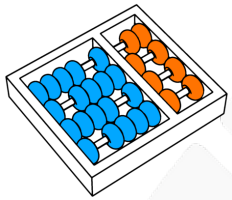
Mover o disco da torre 1 para a 2.



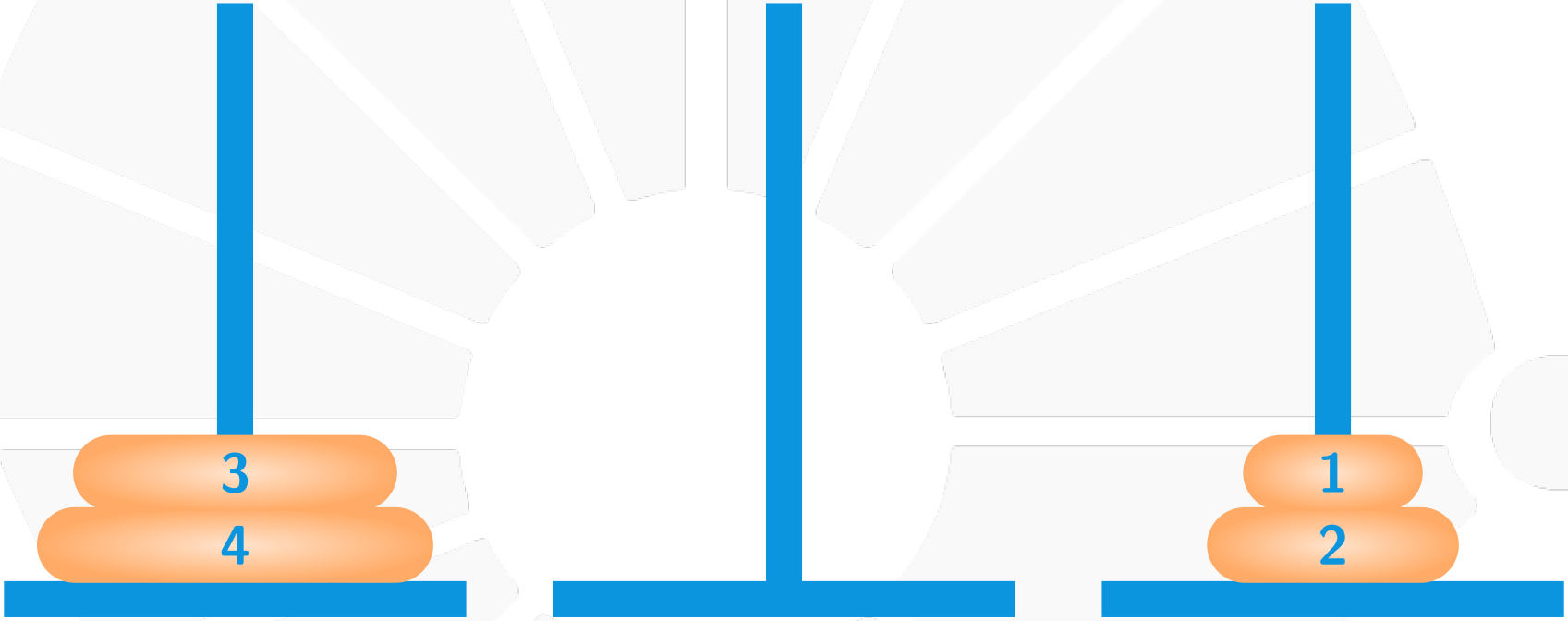
Torres de Hanoi – 4 discos



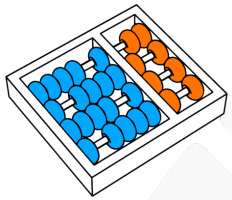
Mover o disco da torre 1 para a 3.



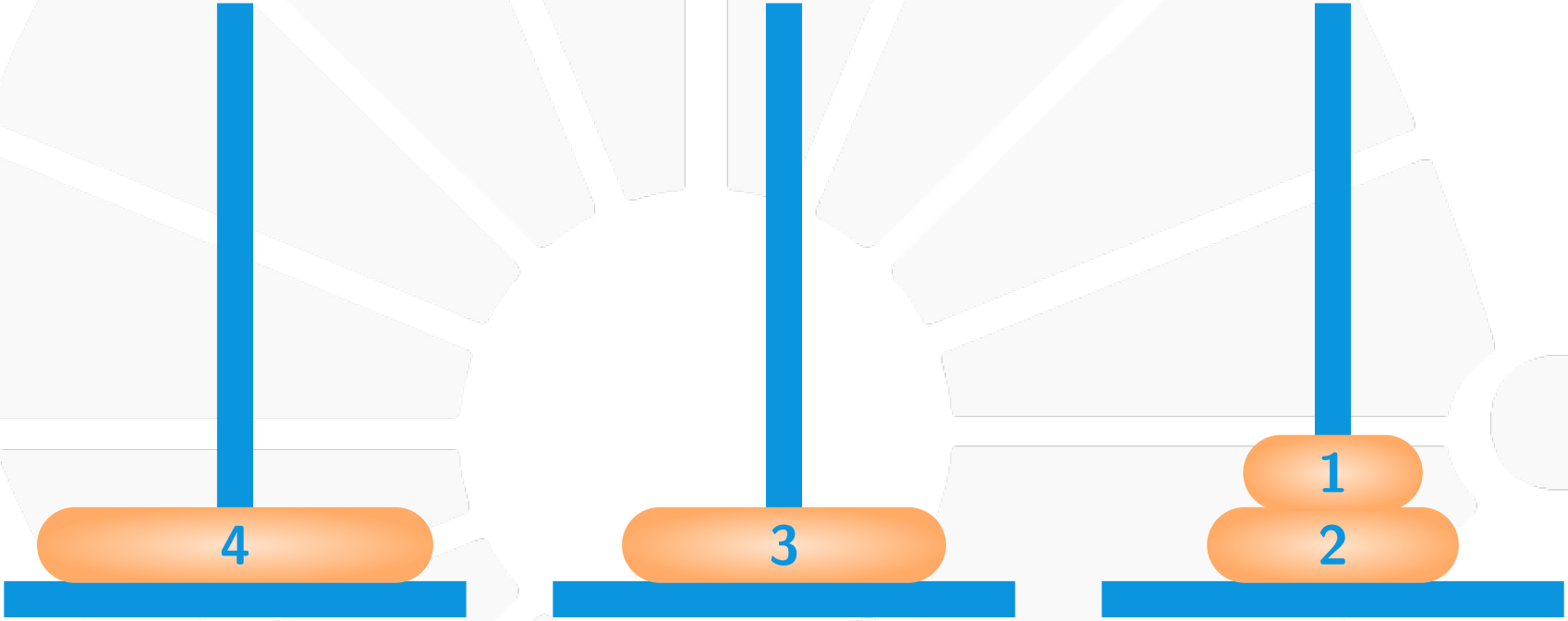
Torres de Hanoi – 4 discos



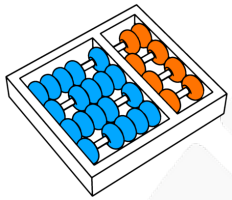
Mover o disco da torre 2 para a 3.



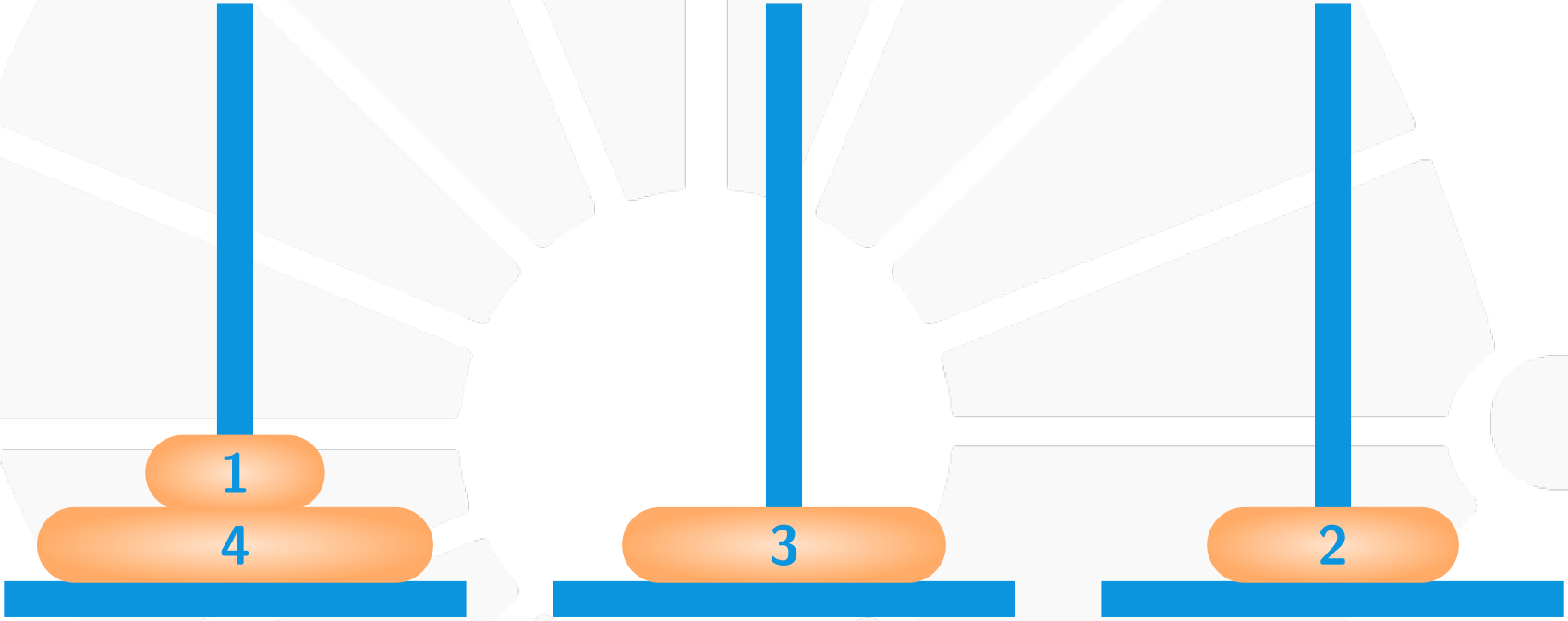
Torres de Hanoi – 4 discos



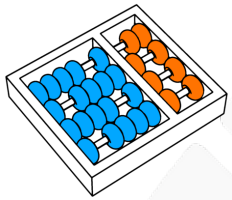
Mover o disco da torre 1 para a 2.



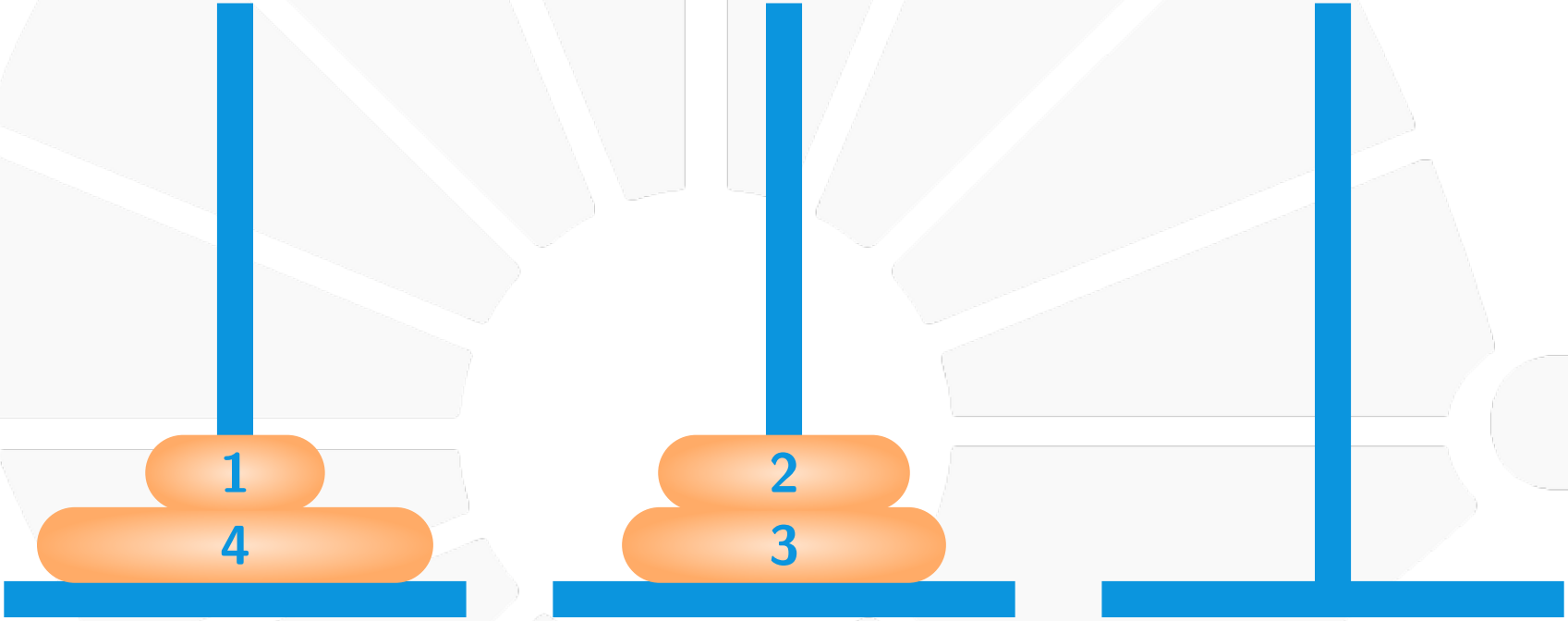
Torres de Hanoi – 4 discos



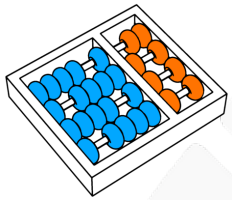
Mover o disco da torre 3 para a 1.



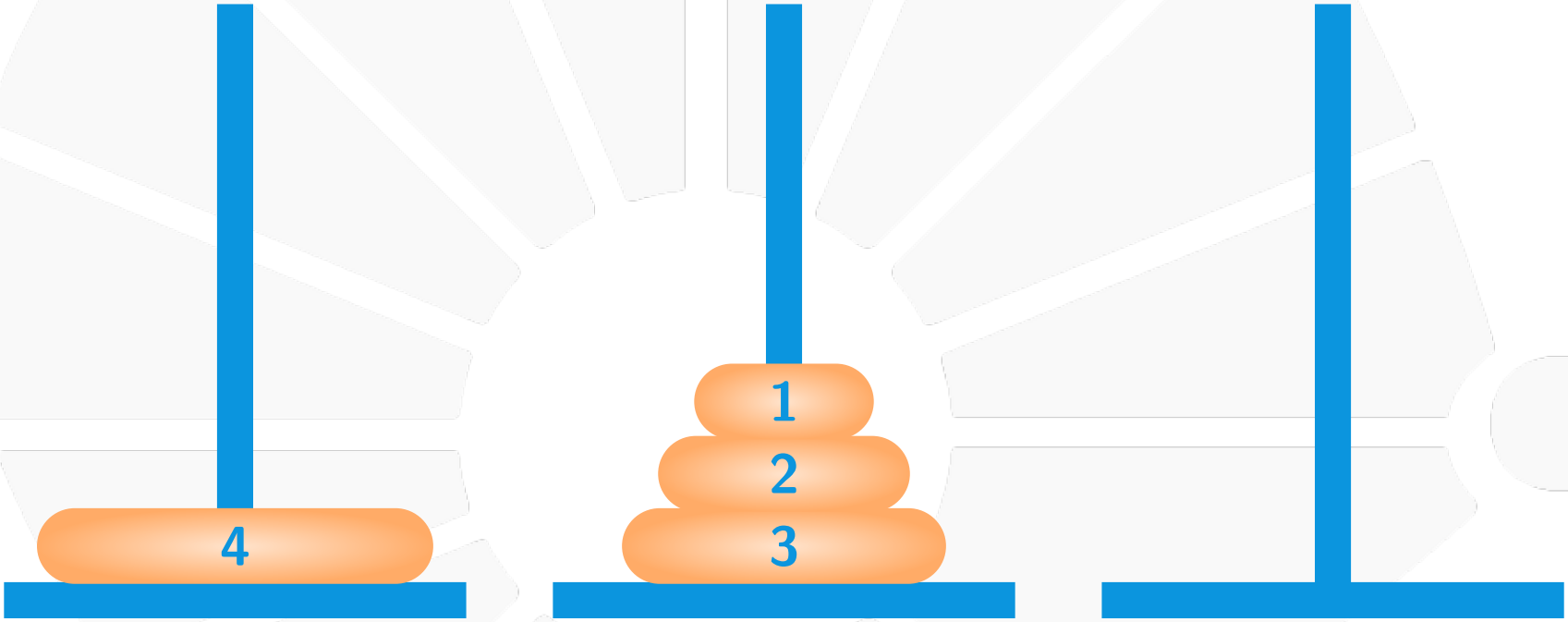
Torres de Hanoi – 4 discos



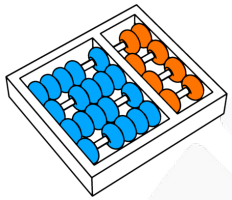
Mover o disco da torre 3 para a 2.



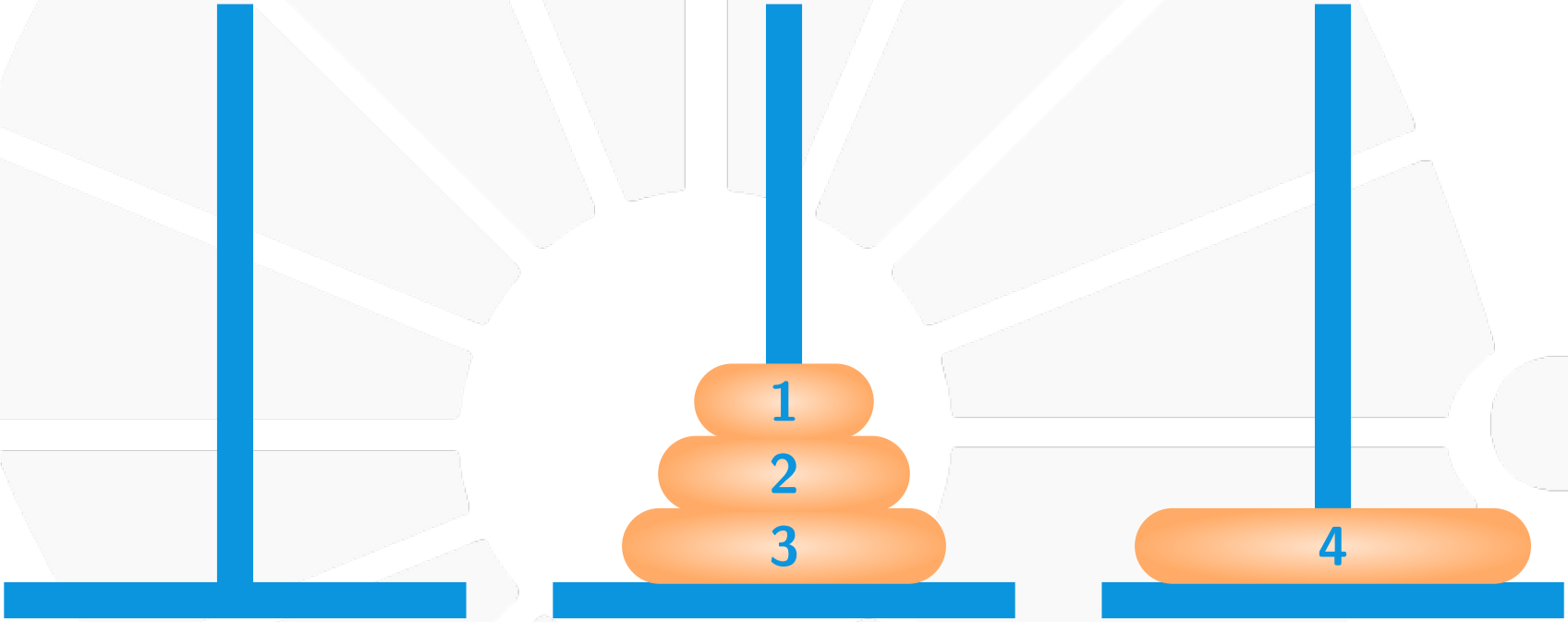
Torres de Hanoi – 4 discos



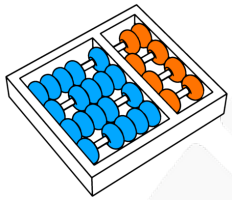
Mover o disco da torre 1 para a 2.



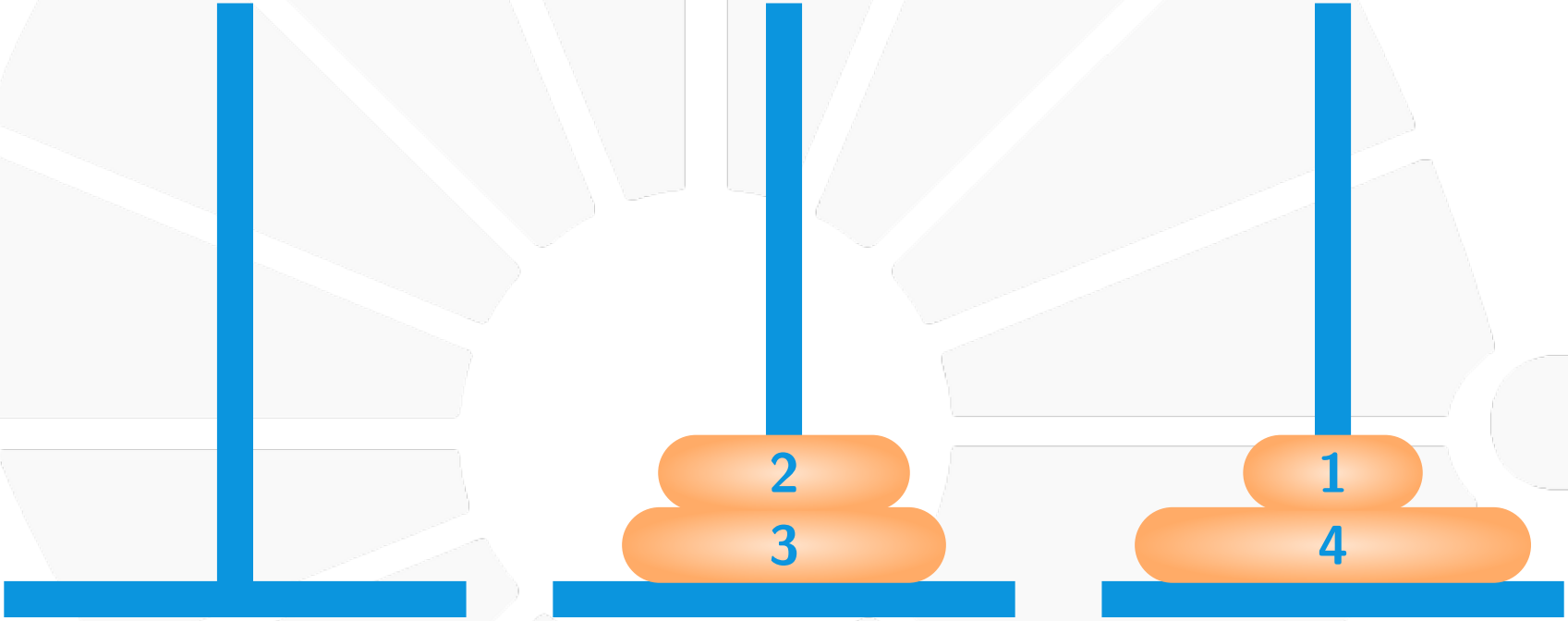
Torres de Hanoi – 4 discos



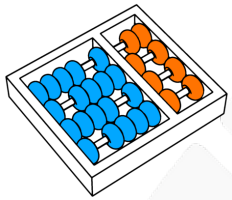
Mover o disco da torre 1 para a 3.



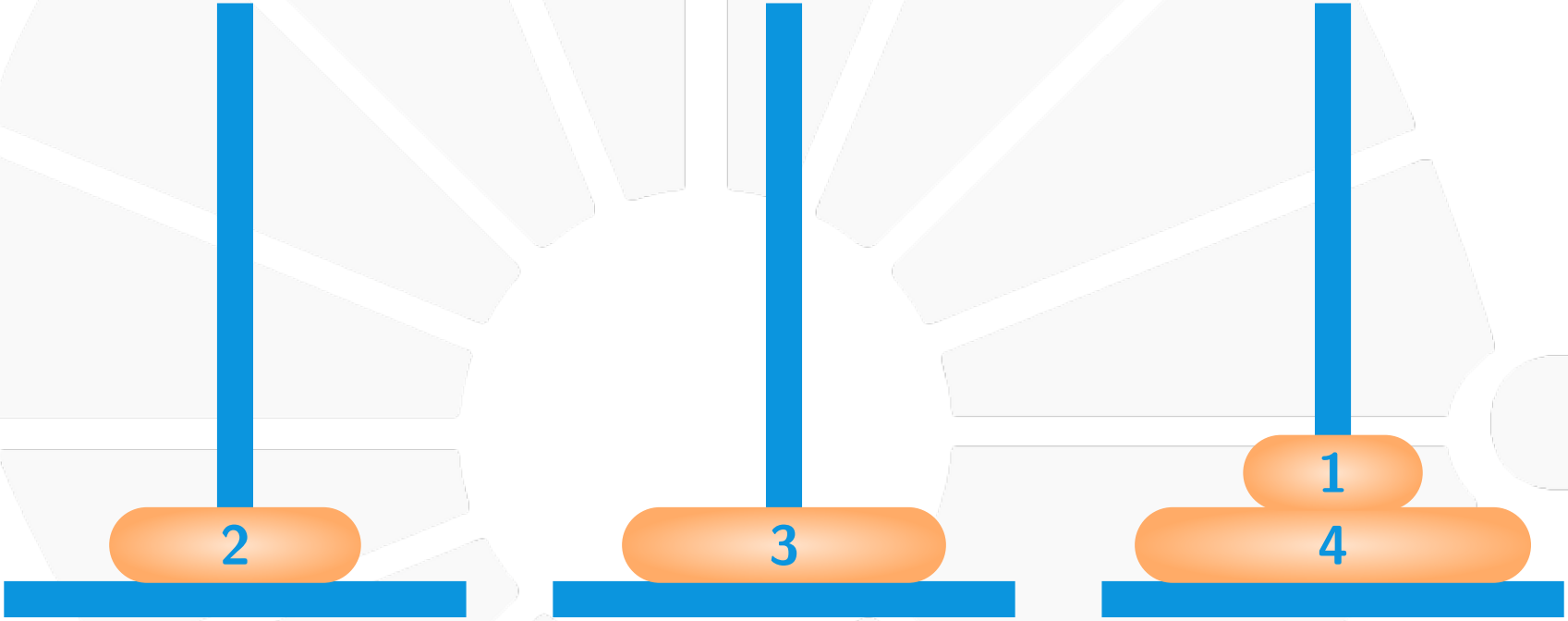
Torres de Hanoi – 4 discos



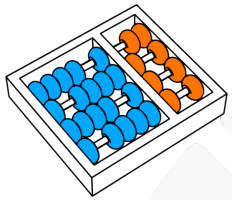
Mover o disco da torre 2 para a 3.



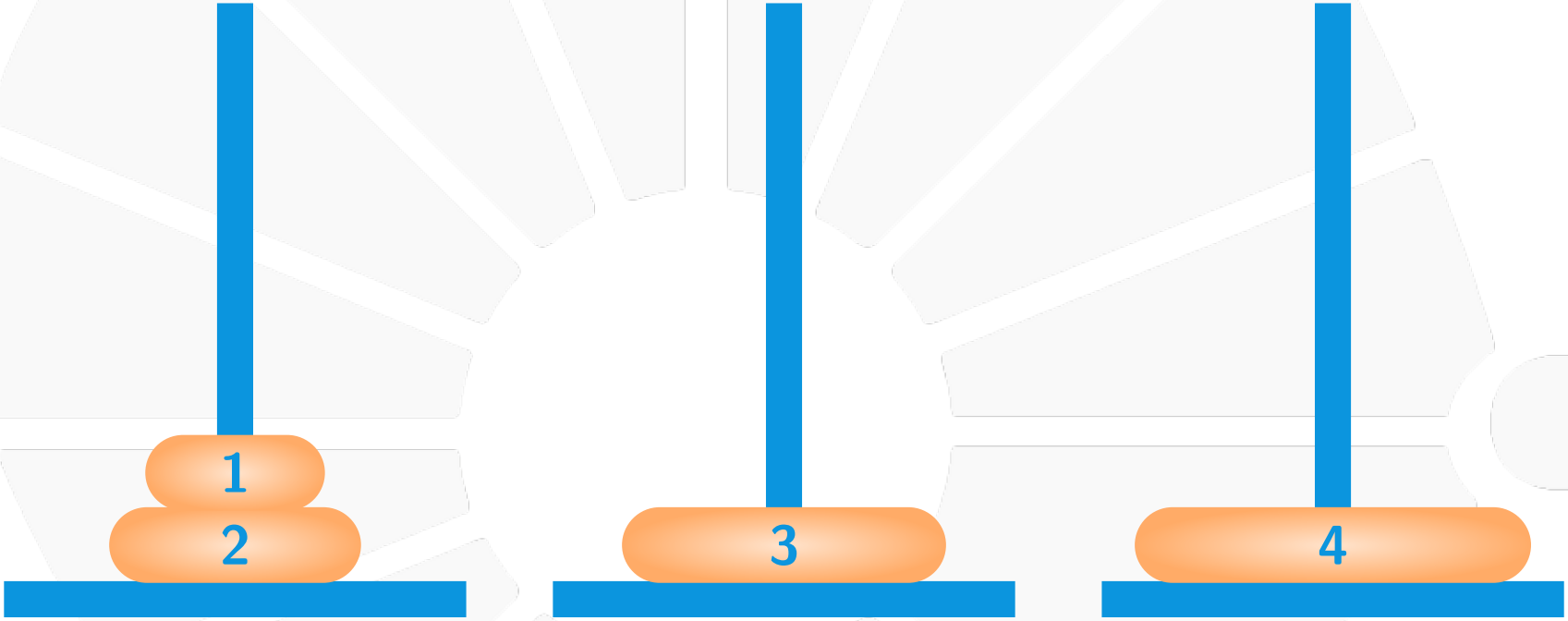
Torres de Hanoi – 4 discos



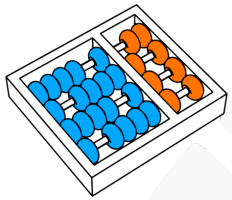
Mover o disco da torre 2 para a 1.



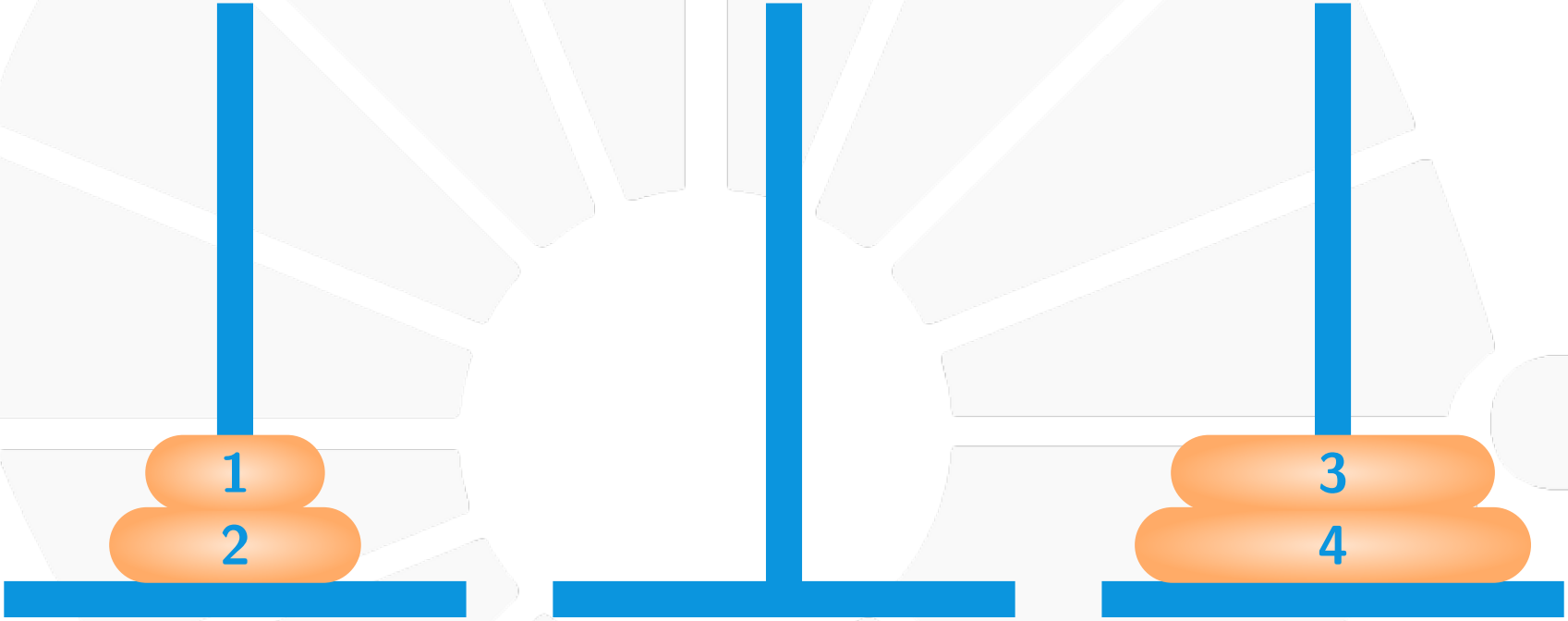
Torres de Hanoi – 4 discos



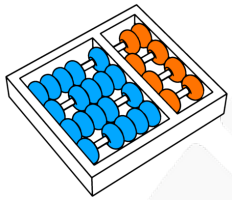
Mover o disco da torre 3 para a 1.



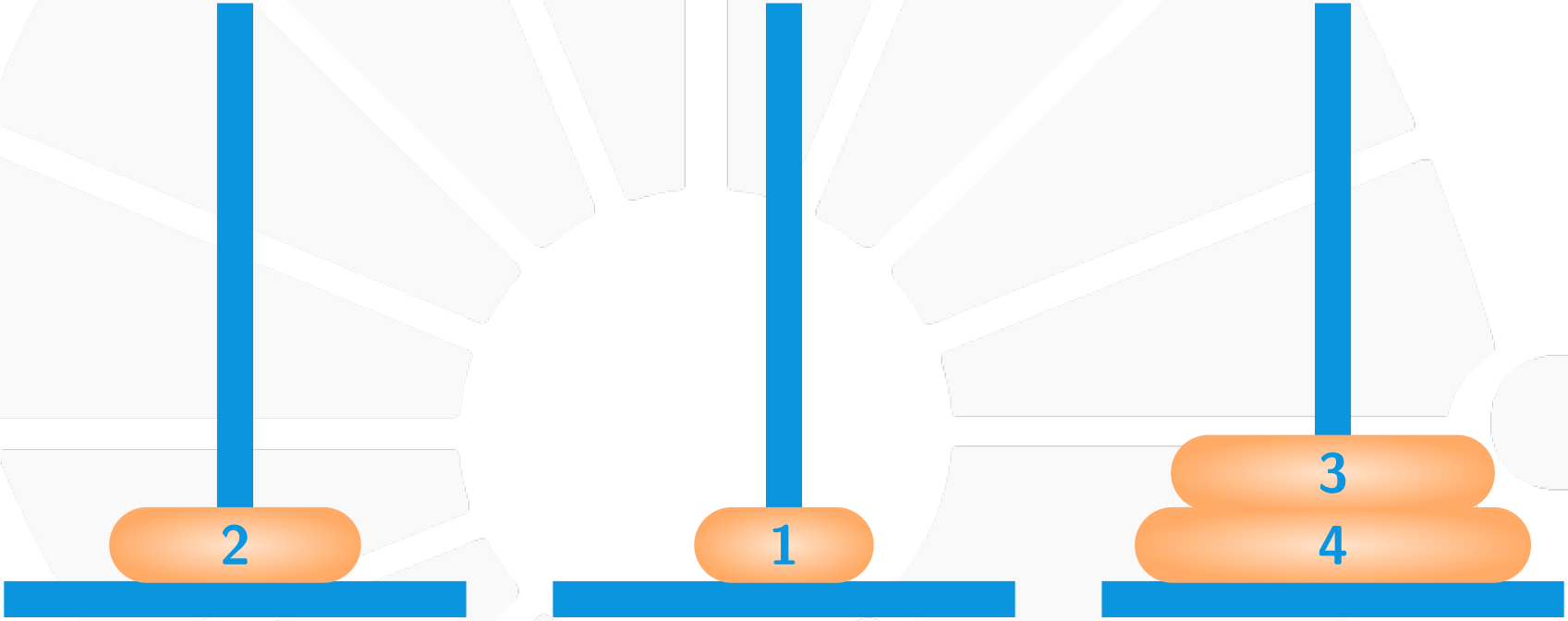
Torres de Hanoi – 4 discos



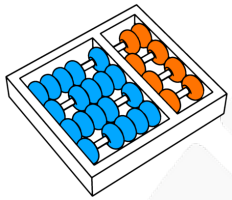
Mover o disco da torre 2 para a 3.



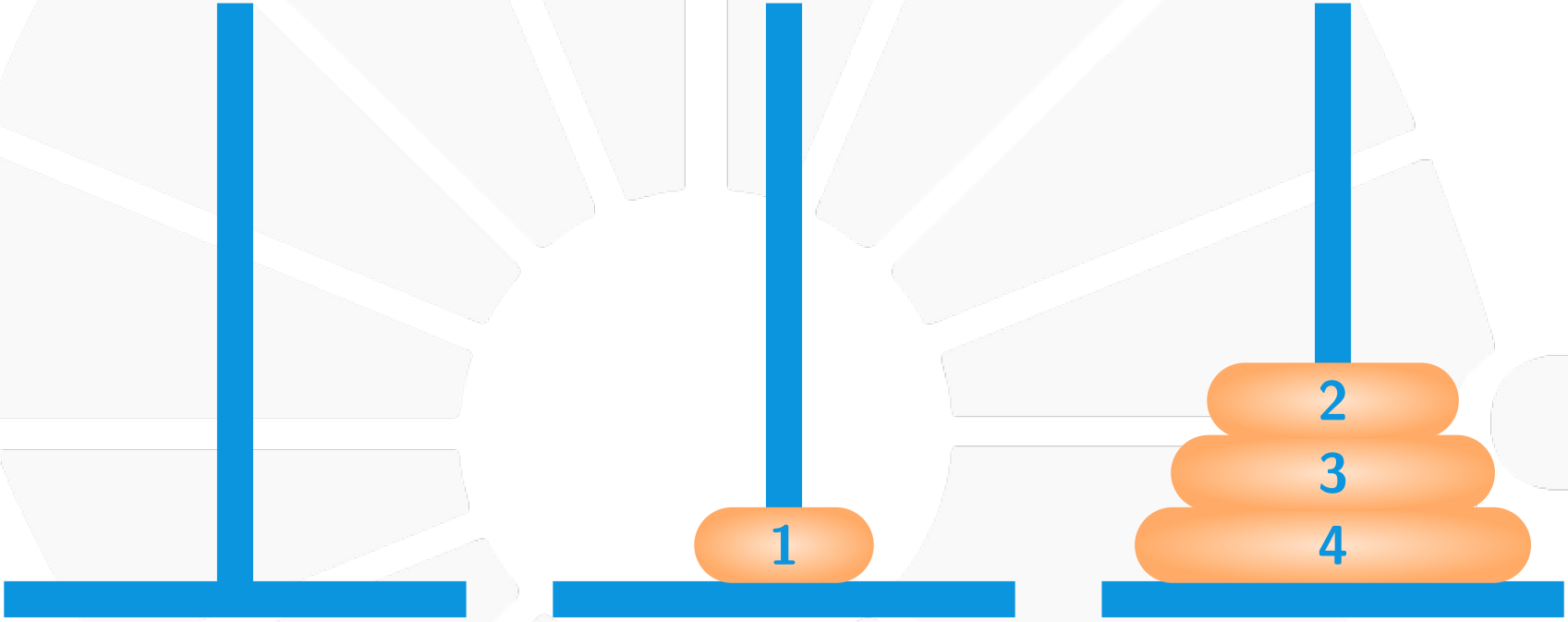
Torres de Hanoi – 4 discos



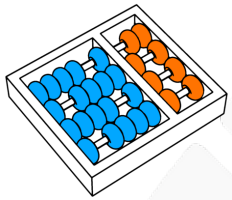
Mover o disco da torre 1 para a 2.



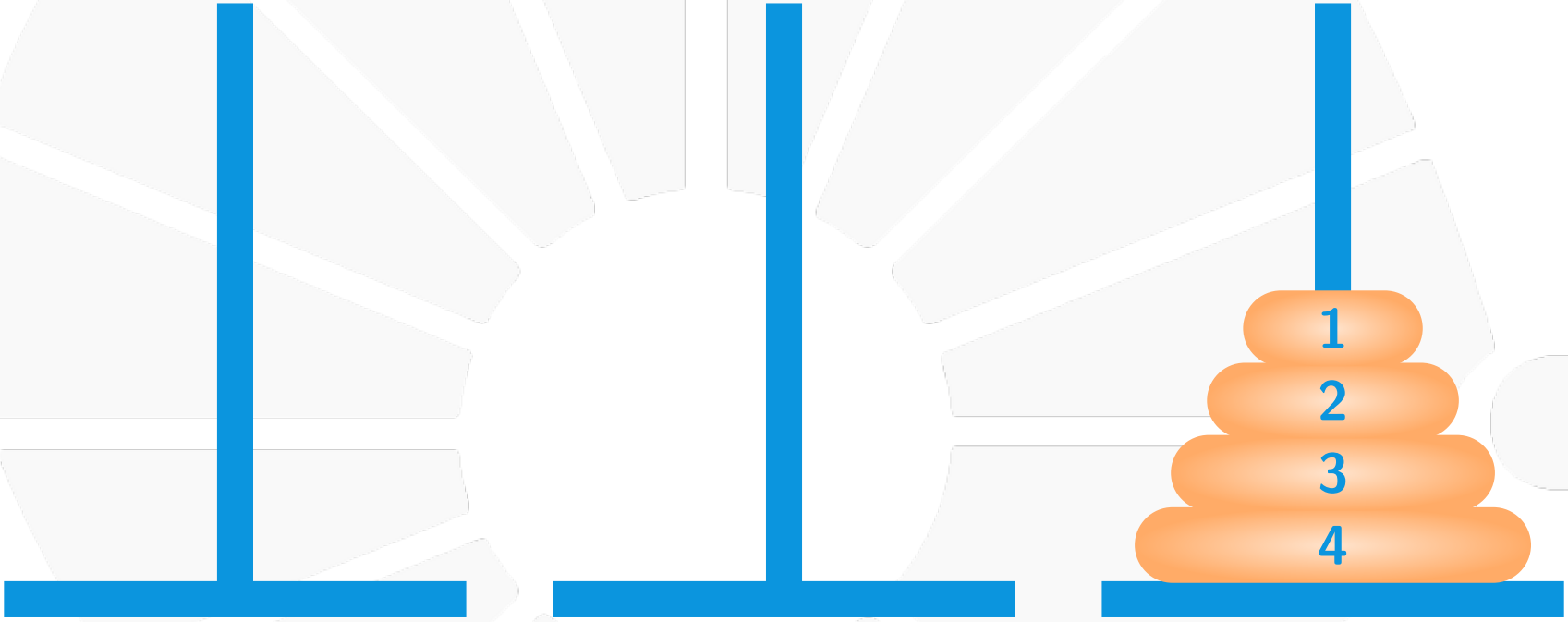
Torres de Hanoi – 4 discos



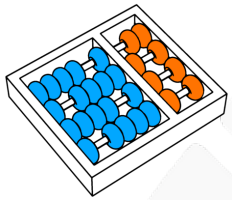
Mover o disco da torre 1 para a 3.



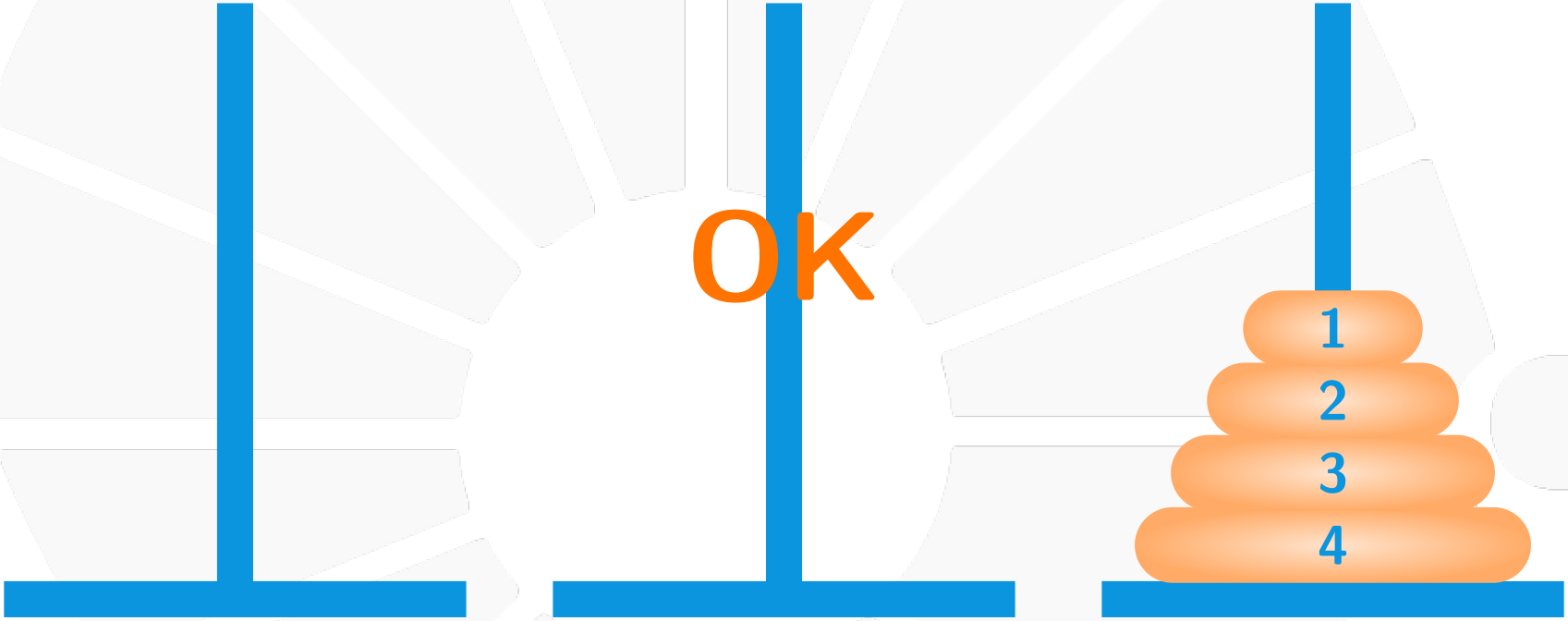
Torres de Hanoi – 4 discos

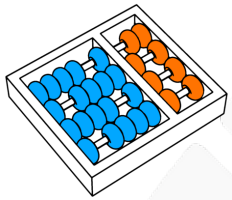


Mover o disco da torre 2 para a 3.

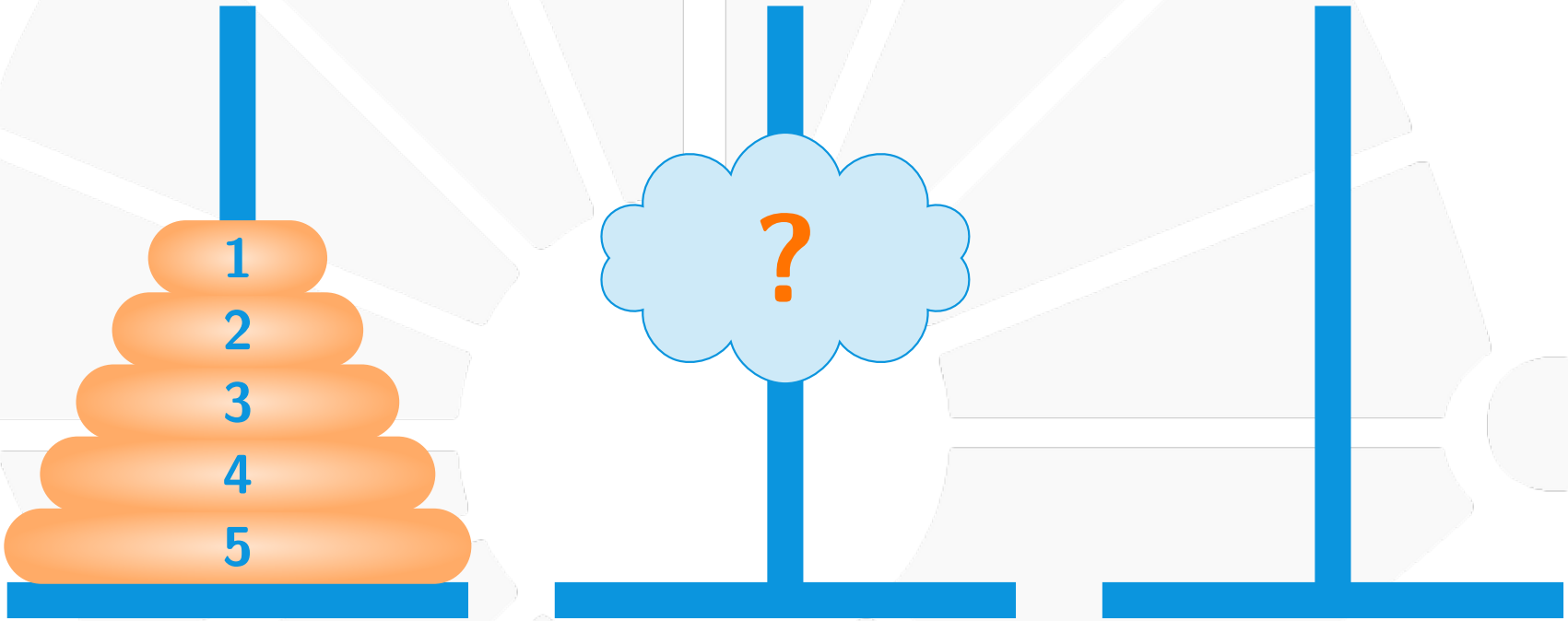


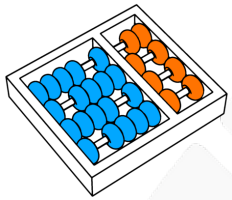
Torres de Hanoi – 4 discos





Torres de Hanoi – 5 discos

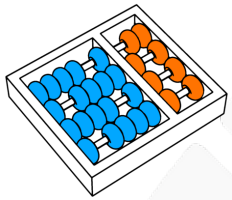




Torres de Hanoi

Suponha que desejamo levar **n** discos da torre **i** até a **j**, usando a torre **k** como auxiliar:

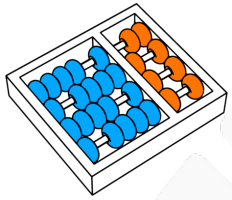
- **Base:** Solucionar o problema sem discos é trivial não precisamos fazer nada.
- **Geral:** Se houver mais $n \geq 1$ discos:
  - O disco **n** deve ser colocado na torre **j** antes dos outros.
  - Para isso, primeiro os **n-1** discos menores devem ser movimentados da torre **i** até a **k**.
  - Depois o disco **n** pode ser movido de **i** para **j**.
  - Finalmente, os **n-1** discos menores devem ser ir da torre **k** até a **j**.



Torres de Hanoi

```
1  def hanoi(n, i, j, k):
2      if n >= 1:
3          hanoi(n - 1, i, k, j)
4          print('Mover o disco', n,
5                'da torre', i, 'para a', j)
6          hanoi(n - 1, k, j, i)
```

Enumerando



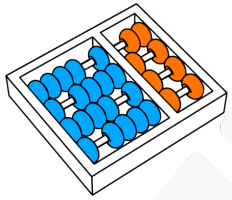
Enumerando

Recursão pode ser útil também para enumerar:

- Gerar todas as possíveis senhas de acordo com uma regra.
- Gerar todas as permutações de elementos.
- Gerar todos os subconjuntos de um conjunto.
- Etc...

Para tanto, precisamos construir a informação passo a passo:

- Armazenando ela em alguma estrutura de dados.



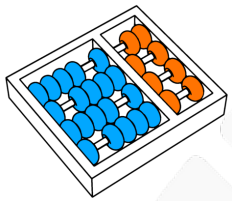
Exemplo: Sequências

Como imprimir todas as sequências de tamanho **k** de números entre **1** e **n**?

Exemplo para **k=3** e **n=4**:

111	131	211	231	311	331	411	431
112	132	212	232	312	332	412	432
113	133	213	233	313	333	413	433
114	134	214	234	314	334	414	434
121	141	221	241	321	341	421	441
122	142	222	242	322	342	422	442
123	143	223	243	323	343	423	443
124	144	224	244	324	344	424	444

Toda sequência que começa com **i** é seguida de uma sequência de tamanho **k** **1** de números entre **1** e **n**.



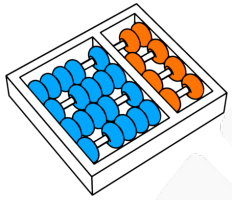
Exemplo: Sequências

- Armazenamos o prefixo da sequência que estamos construindo.
- Completamos com todos os possíveis sufixos recursivamente.

Recursão:

- **Base**: Se o tamanho do prefixo for k, imprime a sequência.
- **Geral**: Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, gere todas as sequências de $n-1$ dígitos colocando i na frente.

```
1  def sequencias_rec(mem, k, n):
2      if len(mem) == k:  # temos k números
3          print(' '.join(mem))
4      else:
5          for i in range(1, n + 1):
6              mem.append(str(i))  # coloca o número no final do prefixo
7              sequencias_rec(mem, k, n)
8              mem.pop()  # retira o número do final do prefixo
9
10 def sequencias(k, n):
11     mem = []
12     sequencias_rec(mem, k, n)
```

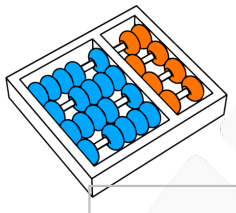


Exemplo: Sequências sem repetições

E se quisermos imprimir todas as sequências de tamanho **k** de números entre **1** e **n** sem repetições?

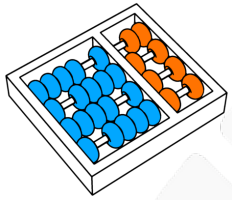
Primeiro algoritmo:

- Já temos um algoritmo que gera todas as sequências com repetições.
- Testar se uma sequência tem repetição é fácil.
- Basta imprimir as sequências que passarem no teste!



Exemplo: Sequências sem repetições

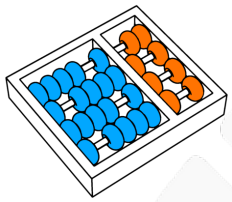
```
1  def tem_repeticao(mem):
2      for i in rang(len(mem)):
3          for j in range(i + 1, len(mem)):
4              if mem[i] == mem[j]: # verifica se mem[i] aparece depois
5                  return True
6      return False
7
8  def sequencias_rec(mem, k, n):
9      if len(mem) == k:  # temos k números
10         if not tem_repeticao(mem): # imprime se não tiver repetições
11             print(' '.join(mem))
12     else:
13         for i in range(1, n + 1):
14             mem.append(str(i))  # coloca o número no final do prefixo
15             sequencias_rec(mem, k, n)
16             mem.pop()  # retira o número do final do prefixo
17
18 def sequencias(k, n):
19     mem = []
20     sequencias_rec(mem, k, n)
```



Exemplo: Sequências sem repetições

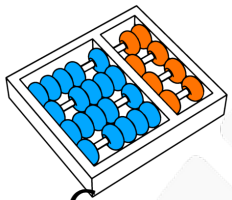
Outra solução:

- Ter uma lista de **n** valores indicando se o número **i** foi já usado.
- Somente adicionar o número (e fazer o chamado recursivo) se ele não estiver usado.



Exemplo: Sequências sem repetições

```
 1  def sequencias_rec(mem, k, n, usados):
 2      if len(mem) == k:  # temos k números
 3          print(' '.join(mem))
 4      else:
 5          for i in range(1, n + 1):
 6              if not usados[i]: # adiciona se o número não foi usado
 7                  mem.append(str(i))  # coloca o número no final
 8                  usados[i] = True # indica que agora está usado
 9                  sequencias_rec(mem, k, n)
10                  mem.pop()  # retira o número do final do prefixo
11                  usados[i] = False # o número não está mais na memória
12
13  def sequencias(k, n):
14      mem = []
15      usados = [False] * n # inicialmente nenhum número é usado
16      sequencias_rec(mem, k, n, usados)
```

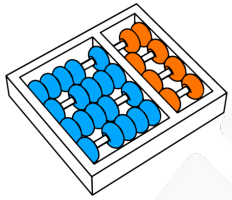


Exemplo: Senhas numéricas

Como gerar todas as senhas numéricas de n dígitos?

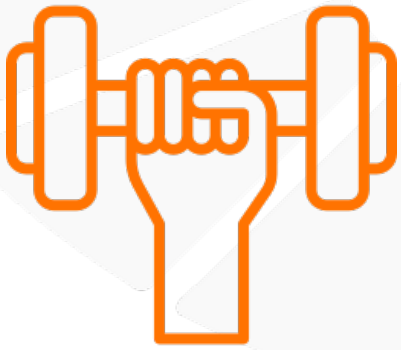
- **Base**: Se $n = 0$, não temos nada a fazer.
- **Geral**: Para cada $i \in \{0, \ldots, 9\}$, gere todas as senhas de $n - 1$ dígitos colocando i na frente.

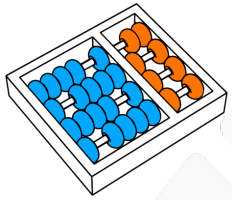
```
1  def senhas_rec(mem, n):
2      if len(mem) == n:  # temos n digitos
3          print(''.join(mem), end=' ')
4      else:
5          for i in range(10):
6              mem.append(str(i))  # coloca o dígito na memória
7              senhas_rec(mem, n)
8              mem.pop()  # retira o dígito da memória
9
10 def senhas(n):
11     mem = []
12     senhas_rec(mem, n)
```



Sobre enumerar

Vamos fazer alguns exercícios?

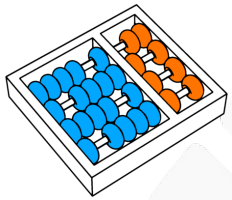




Exercícios

1. Faça uma função recursiva que, dado um inteiro positivo n, imprime todas as permutações de elementos de 1 a n.
2. Faça uma função recursiva que dado um inteiro n, imprime todas as combinações com n pares de parênteses balanceados.
3. Faça uma função recursiva que, dada uma lista l e um inteiro positivo r, imprime todas as combinações de r elementos de l.

Backtracking



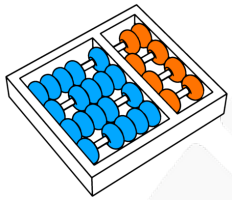
Backtracking - Retrocesso

Resolver um problema de forma recursiva, podendo tomar decisões erradas:

- Nesse caso, escolhemos outra decisão.

Construímos soluções passo-a-passo, **retrocedendo** se a solução parcial atual não é válida:

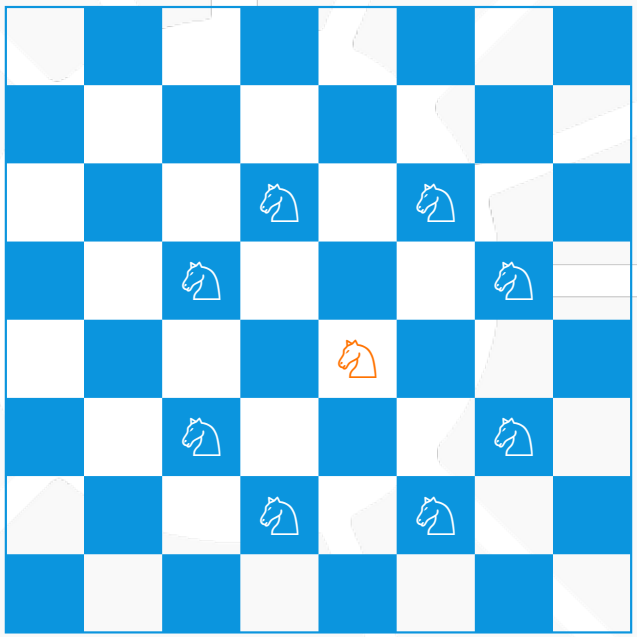
- Começamos com uma solução parcial vazia.
- Enquanto for possível, adicionamos um elemento à solução parcial.
- Se encontrarmos uma solução completa, terminamos.
- Se não é possível adicionar mais nenhum elemento à solução parcial, **retrocedemos**:
  - Removemos um ou mais elementos da solução parcial.
  - Tomamos decisões diferentes das que foram tomadas.



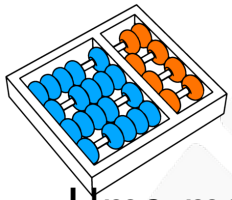
Exemplo: Passeio do cavalo

Movimento do cavalo no xadrez - formato de L:

- Dois quadrados horizontalmente e um verticalmente, ou
- dois quadrados verticalmente e um horizontalmente.



Dado um tabuleiro de xadrez **n**×**n** e uma posição **(x, y)** do tabuleiro queremos encontrar um passeio de um cavalo que visite cada casa exatamente uma vez.



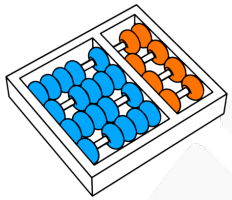
Exemplo: Passeio do cavalo

Uma matriz **m** armazenará os movimentos do cavalo:

- **m[l][c]=0** se a posição **(l,c)** não foi visitada ainda.
- **m[l][c]=i>0** se a posição **(l,c)** foi visitada no passo **i**.

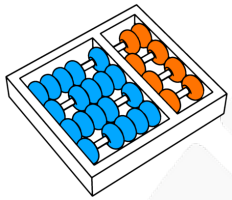
52	47	56	45	54	5	22	13
57	44	53	4	23	14	25	6
48	51	46	55	26	21	12	15
43	58	3	50	41	24	7	20
36	49	42	27	62	11	16	29
59	2	37	40	33	28	19	8
38	35	32	61	10	63	30	17
1	60	39	34	31	18	9	64

- **Base:** Última posição visitada recebeu **n×n**.
- **Geral:** Para cada possível movimento, realiza o movimento e verifica se soluciona (recursivamente), em caso contrário, retrocede.



Exemplo: Passeio do cavalo

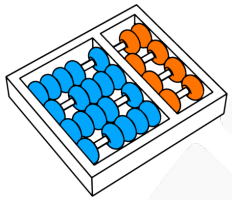
```
1  MOVS = ((2,1),(1,2),(-1,2),(-2,1),(-2,-1),(-1,-2),(1,-2),(2,-1))
2
3  def passeio_cavalo_rec(m, l, c):
4      if m[l][c] == len(m) * len(m):
5          return True
6      for mov in MOVS:
7          i = l + mov[0]
8          j = c + mov[1]
9          if 0 <= i < len(m) and 0 <= j < len(m) and m[i][j] == 0:
10             m[i][j] = 1 + m[l][c] # faz o movimento
11             if passeio_cavalo_rec(m, i, j): # tenta resolver
12                 return True
13             m[i][j] = 0 # se não consegue resolver, retrocede
14     return False
15
16 def passeio_cavalo(n, x, y):
17     m = [[0] * n for _ in range(n)] # cria matriz de zero
18     m[x][y] = 1 # coloca 1 na posição que o cavalo começa
19     passeio_cavalo_rec(m, x, y)
```



Aplicações para Backtracking

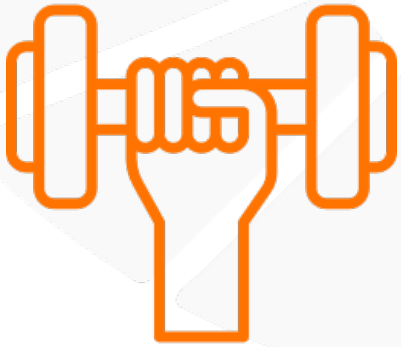
Para aplicar Backtracking é necessário que o problema tenha um conceito de solução parcial.

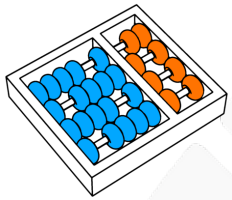
- Problemas de satisfação de restrições:
  - Encontrar uma solução que satisfaça as restrições.
  - Como o Sudoku, por exemplo.
- Problemas de Otimização Combinatória:
  - Conseguimos enumerar as soluções do problema.
  - Queremos encontrar uma de valor mínimo/máximo.



Sobre backtracking

Vamos fazer alguns exercícios?





Exercícios

1. Dado um jogo de Sudoku, encontre uma solução se ela existir. Considere que as casas não preenchidas tem o valor **0**.
2. Dado um inteiro **n**, determine se é possível colocar **n** rainhas (do xadrez) em um tabuleiro **n**×**n**, se que elas se ameacem.

Recursão ... novamente!?

MC102 - Algoritmos e Programação de Computadores

06/24

23

Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

UNICAMP