

Nome: _____

RA: _____ Assinatura: _____

Observações:

- Leia com cuidado a pergunta antes de começar. Você pode solicitar esclarecimentos durante o teste.
- Explique e justifique a sua resposta.
- Você também pode obter pontos por uma resposta parcial.
- É proibido qualquer tipo de consulta bibliográfica.
- O teste é individual, qualquer detecção de fraude implicará em zerar a nota da disciplina.

Questão 1 Dado um vetor A de n elementos, dizemos que um elemento x de A é f -dominante (para $0 < f \leq 1$) se pelo menos $f \cdot n$ dos elementos do vetor são iguais a x .

Estamos interessados em, dados um vetor $A[1 \dots n]$ e um inteiro $k \in \{1 \dots, n\}$, determinar se A possui um elemento que seja $\frac{1}{k}$ -dominante. Ou seja, se existe algum valor que aparece em pelo menos em $\frac{n}{k}$ das posições do vetor. Por exemplo, para $k = 2$, o problema é verificar se há um elemento que aparece em pelo menos metade das posições do vetor.

- (a) **(5 pontos)** Suponha que os elementos de A são inteiros no intervalo $[1, n^3]$ e que operações básicas possuem complexidade constante (soma, subtração, multiplicação, divisão, resto da divisão). Projete um algoritmo de tempo linear que resolva o problema, explorando a saída de um algoritmo de ordenação. Justifique a correção e a complexidade do algoritmo, e explique por que é possível utilizar uma ordenação linear neste caso.

Dicas: Para realizar a ordenação, seria possível aplicar mais de uma vez uma ordenação estável sobre os elementos? Quais seriam as chaves utilizadas em cada uma dessas ordenações estáveis?

- (b) **(5 pontos)** Agora suponha que $k = 3$ e que os elementos de A podem assumir valores arbitrários (não necessariamente inteiros). Projete um algoritmo linear que resolva o mesmo problema sem utilizar ordenação. Justifique a correção e a complexidade do seu algoritmo.

Dica: Se a resposta for positiva, existe um conjunto de posições que o elemento ocuparia caso o vetor estivesse ordenado? Seria possível reduzir a verificação a “poucos” valores (isto é, a um número constante de candidatos a $\frac{1}{3}$ -dominante)?