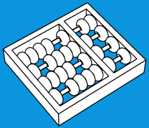
Cortes, conexidade, árvores e grafos bipartidos

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

02

08/24



Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

UNICAMP

“Os grafos importantes são aqueles onde algumas coisas não estão conectadas a outras.”

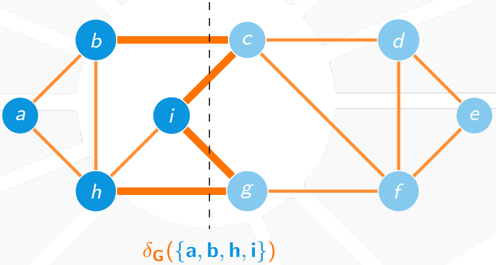
Eliezer Yudkowsky

Cortes e conexidade

Cortes

Seja $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ um grafo e seja $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$.

O **CORTE** de G induzido por $\mathbf{S}$ é o conjunto de arestas de G com um extremo em $\mathbf{S}$ e outro em $\mathbf{V} \setminus \mathbf{S}$ e o denotamos por $\delta_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$.



Se $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ e $\mathbf{t} \in \mathbf{V} \setminus \mathbf{S}$, então dizemos que $\delta_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ **SEPARA** $\mathbf{s}$ de $\mathbf{t}$.

Caminhos versus cortes

Lema

Seja G um grafo e sejam $\mathbf{s,t}$ vértices distintos de G. Então, exatamente uma das seguintes afirmações é verdadeira:

(a) *Existe um caminho de $\mathbf{s}$ a $\mathbf{t}$ em G, ou*

(b) *existe um corte $\delta_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ que separa $\mathbf{s}$ de $\mathbf{t}$ tal que $\delta_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}) = \emptyset$.*

Caminhos versus cortes. Demonstração

Suponha que **(a)** vale (em G existe um caminho de $\mathbf{s}$ a $\mathbf{t}$):

- **(b)** não pode valer (em G não existe um corte $\delta_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}) = \emptyset$ que separa $\mathbf{s}$ de $\mathbf{t}$). Por quê?

Suponha que **(a)** não vale (em G não existe um caminho de $\mathbf{s}$ a $\mathbf{t}$):

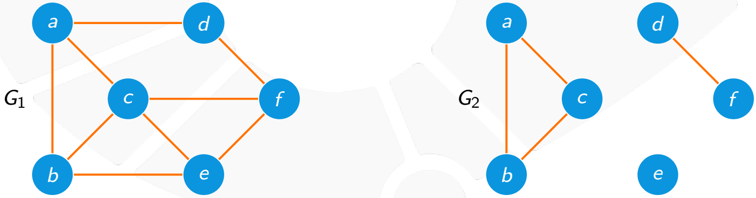
- Seja $\mathbf{S}$ o conjunto dos vértices alcançáveis por $\mathbf{s}$ em G.
- Temos que $\mathbf{t} \in \mathbf{V} \setminus \mathbf{S}$ e $\delta_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}) = \emptyset$.

Conexidade

Dizemos que um grafo G é **CONEXO** se, para qualquer par de vértices **u** e **v** de G, existe um caminho de **u** a **v** em G.

Caso contrário, dizemos que G é **DESCONEXO**.

Podemos particionar o grafo em **COMPONENTES**, tal que dois vértices **u** e **v** estão na mesma componente se em G há um caminho de **u** a **v**.

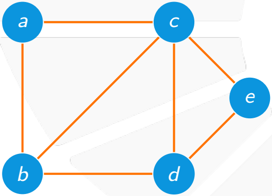


Subgrafos geradores e induzidos

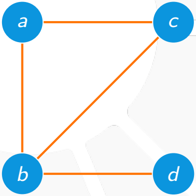
Subgrafo e subgrafo gerador

- Um **SUBGRAFO** $H = (\mathbf{V}', \mathbf{E}')$ de um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é um grafo tal que $\mathbf{V}' \subseteq \mathbf{V}$ e $\mathbf{E}' \subseteq \mathbf{E}$.

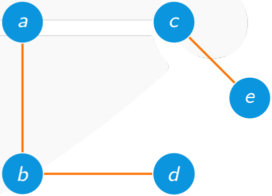
- Se $\mathbf{V}' = \mathbf{V}$, então H é um **SUBGRAFO GERADOR** de G.



G



Subgrafo de G



Subgrafo gerador de G

Grafos obtidos a partir de outros grafos

Considere um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$, uma aresta $\mathbf{e}$ e um vértice $\mathbf{v}$:

- $G - \mathbf{e}$ é o grafo obtido de G removendo-se $\mathbf{e}$:

$$G - \mathbf{e} = (\mathbf{V}, \mathbf{E} \setminus \{\mathbf{e}\})$$

- $G - \mathbf{v}$ é o grafo obtido de G removendo-se $\mathbf{v}$ e todas as arestas que incidem em $\mathbf{v}$:

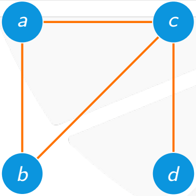
$$G - \mathbf{v} = (\mathbf{V} \setminus \{\mathbf{v}\}, \mathbf{E} \setminus \delta(\{\mathbf{v}\}))$$

Subgrafo induzido

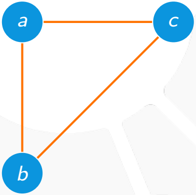
Considere um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ e um subconjunto de vértices $\mathbf{S}$:

- O subgrafo de G **INDUZIDO** por $\mathbf{S}$, denotado por $G[\mathbf{S}]$, é o grafo formado por $\mathbf{S}$ e todas as arestas entre vértices $\mathbf{S}$:

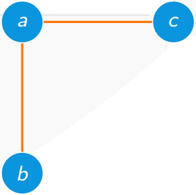
$$G[\mathbf{S}] = (\mathbf{S}, \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{E} : \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{S}\})$$



G



Subgrafo induzido

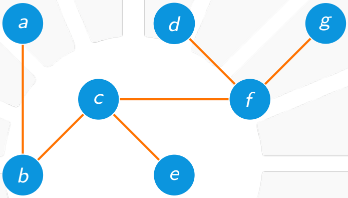


Subgrafo não induzido

Árvores

Definição

Um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é uma **ÁRVORE** se ele for conexo e não possuir ciclos.



- Um grafo sem ciclos é chamado de **ACÍCLICO**.
- Uma **FOLHA** de uma árvore G é um vértice de grau 1.
- Toda árvore com dois ou mais vértices tem pelo menos duas folhas. Por quê?

Caracterização de árvores

Teorema

As seguintes afirmações são equivalentes:

- *G é uma árvore.*
- *G é conexo e possui exatamente $|V| - 1$ arestas.*
- *G é conexo e a remoção de qualquer aresta desconecta o grafo, i.e, ele é conexo minimal.*
- *Para todo par de vértices u, v de G, existe um único caminho de u a v em G.*

Demonstre esse teorema como exercício.

Grafos bipartidos

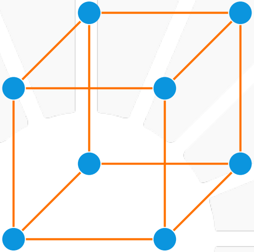
Definição

Uma **BIPARTIÇÃO** de um conjunto V é um par (A, B) tal que:

- $A \cap B = \emptyset$ e
- $A \cup B = V$.

Um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é **BIPARTIDO** se existe uma partição $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ de $\mathbf{V}$ tal que toda aresta de G tem um extremo em $\mathbf{A}$ e outro em $\mathbf{B}$.

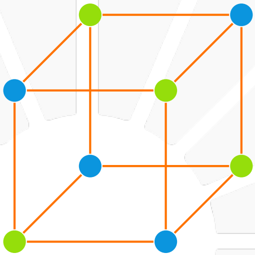
Exemplo



Esse grafo é bipartido?

Podemos indicar cada parte com uma cor: **azul** ou **verde**.

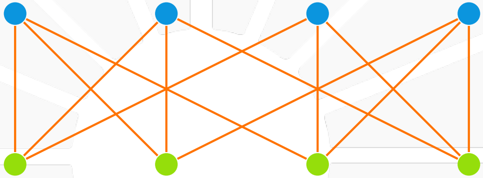
Exemplo



É bipartido!

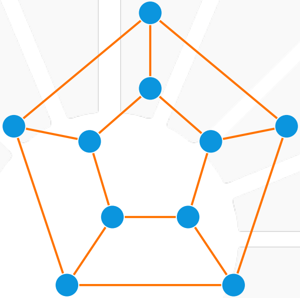
Um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é bipartido se for possível colorir os vértices de G com **DUAS CORES** de modo que vértices adjacentes tenham cores distintas.

Exemplo



Isto pode ser visto melhor com outro desenho.

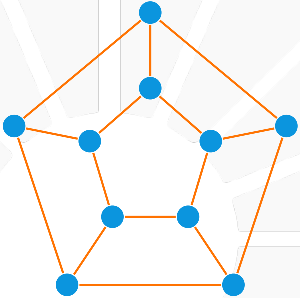
Exemplo



Este grafo **NÃO** é bipartido.

Podemos apresentar uma justificativa simples?

Condição necessária para um grafo ser bipartido



Um grafo bipartido não pode conter ciclos de comprimento ímpar!

Essa é uma condição suficiente? basta não ter ciclos ímpares?

Condição necessária e suficiente

Teorema

Seja G um grafo. Então G é bipartido se e somente se G não possuir um ciclo ímpar.

Demonstração:

- Já vimos que se G tem um ciclo ímpar, ele não é bipartido.
- Assim, resta demonstrar a recíproca.
- Podemos supor que G é conexo. Por quê?
- Antes de continuar a prova, vejamos outros resultados...

Árvore geradora

Propriedade

Fato (1)

Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.

Provar o fato a partir do seguinte resultado (exercício):

Lema

Seja G um grafo conexo e seja C um ciclo de G. Se **e** *é uma aresta de C então $G -$* **e** *é conexo.*

A recíproca também vale:

Lema

Seja G um grafo conexo e seja **e** *uma aresta de G. Se $G -$* **e** *é conexo então* **e** *pertence a algum ciclo de G.*

Árvores e grafos bipartidos

Fato (2)

Toda árvore $T = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é um grafo bipartido.

É possível provar por indução em $|\mathbf{V}|$. Demonstre como exercício.

Árvore geradora

Fato (3)

Seja $T = (\mathbf{V}, \mathbf{E'})$ *uma árvore geradora de um grafo* $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$*.*
Então para toda aresta $\mathbf{e} \in \mathbf{E} \setminus \mathbf{E'}$ *existe um único ciclo em* $T + \mathbf{e} = (\mathbf{V}, \mathbf{E'} \cup \{\mathbf{e}\})$*.*

Demonstração:

- Sejam **u,v** os extremos de **e**.
- Como T é árvore, existe um único caminho P de **u** a **v** em T.
- Portanto, $P + \mathbf{e}$ é o único ciclo em $T + \mathbf{e}$.

O único ciclo de $T + \mathbf{e}$ é chamado de **CICLO FUNDAMENTAL**.

Demonstração do teorema

Agora estamos prontos para demonstrar a segunda parte do teorema:

Teorema

Seja G um grafo. Então G é bipartido se e somente se G não possuir um ciclo ímpar.

Demonstração:

- Resta mostrar que se G não tem ciclo ímpar, ele é bipartido.
- Lembre, podemos supor que G seja conexo.
- Suponha que G não contenha um ciclo ímpar.
- Construiremos uma bipartição $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ de $\mathbf{V}$ tal que toda aresta de G tem um extremo em $\mathbf{A}$ e outro em $\mathbf{B}$.

Demonstração do teorema

- Pelo Fato 1, G contém uma árvore geradora $T = (\mathbf{V}, \mathbf{E'})$.
- Pelo Fato 2, T possui uma uma bipartição $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ de $\mathbf{V}$ tal que toda aresta de T tem um extremo em $\mathbf{A}$ e outro em $\mathbf{B}$.
- Mostraremos que toda aresta de $\mathbf{E} \setminus \mathbf{E'}$ tem um extremo em $\mathbf{A}$ e outro em $\mathbf{B}$.

Demonstração do teorema

Seja **e** uma aresta de $\mathbf{E} \setminus \mathbf{E'}$:

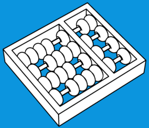
- Pelo Fato 3, existe um único ciclo C em $T + \mathbf{e}$ que contém **e**.
- Se os extremos de **e** são da mesma parte (**A** ou **B**),
- então C é um ciclo ímpar, o que é uma **CONTRADIÇÃO**!
- Portanto, os extremos de **e** estão em partes distintas.

Cortes, conexidade, árvores e grafos bipartidos

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

08/24

02



Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

UNICAMP