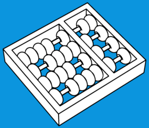
Componentes conexas e fortemente conexas

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

07

08/24

Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br



UNICAMP

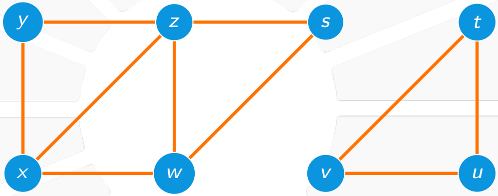
"Acho que todas as nossas melhores partes estão conectadas de alguma forma."

Nicola Yoon

Componentes conexas

Componentes conexas

Problema: Determinar as componentes conexas de um grafo.



Componentes conexas

Contando o número de componentes:

- Cada componente corresponde a uma árvore de busca.
- O número de componentes é o **NÚMERO DE CHAMADAS** a DFS-VISIT a partir de DFS.

Vamos modificar DFS:

- Identificamos cada componente por um número.
- Denotaremos por *comp*[**v**] a componente de **v**.

Algoritmo DFS modificado

Algoritmo: $\mathrm{DFS}(G)$

para cada $u \in V[G]$
    cor$[u] \leftarrow$ branco
$\ell \leftarrow 0$
para cada $u \in V[G]$
    se cor$[u] =$ branco
        $\ell \leftarrow \ell + 1$
        $\mathrm{DFS\text{-}VISIT}(u)$

ℓ é o número de chamadas a DFS-VISIT a partir de DFS.

Algoritmo $\textsc{DFS-Visit}$ modificado

Algoritmo: $\textsc{DFS-Visit}(u)$

cor$[u] \leftarrow$ cinza

para cada $v \in Adj[u]$

  se cor$[v] =$ branco

    $\textsc{DFS-Visit}(v)$

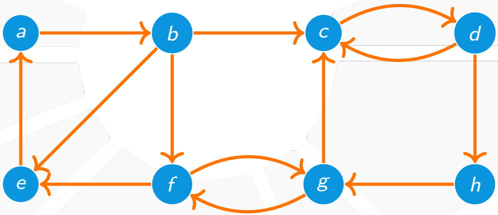
cor$[u] \leftarrow$ preto

$comp[u] \leftarrow \ell$

Componentes fortemente conexas

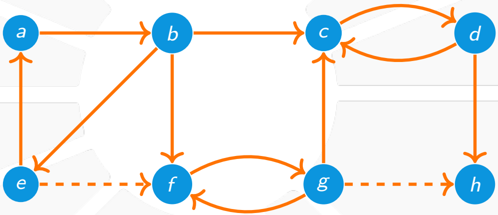
Grafo fortemente conexo

Um grafo direcionado $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é **FORTEMENTE CONEXO** se para todo par de vértices **u,v** de G, existe um caminho direcionado de **u** a **v**.



Grafo fortemente conexo

Nem todo grafo direcionado é fortemente conexo:



Componente fortemente conexa

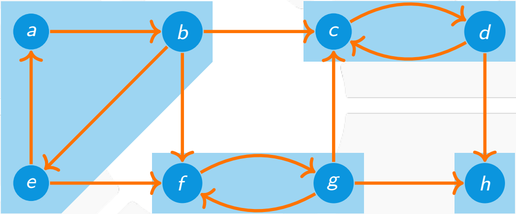
Uma **COMPONENTE FORTEMENTE CONEXA** de um grafo direcionado $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é um subconjunto de vértices $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{V}$ tal que:

(1) O subgrafo induzido por **C** é fortemente conexo e

(2) **C** é maximal com respeito à propriedade (1).

Componente fortemente conexa

Podemos **PARTICIONAR** um grafo direcionado em componentes fortemente conexas.

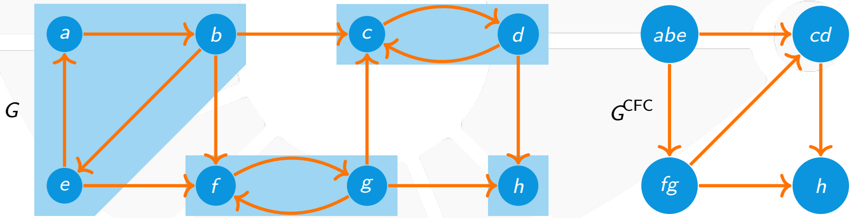


Como encontrar as componentes fortemente conexas?

Grafo componente

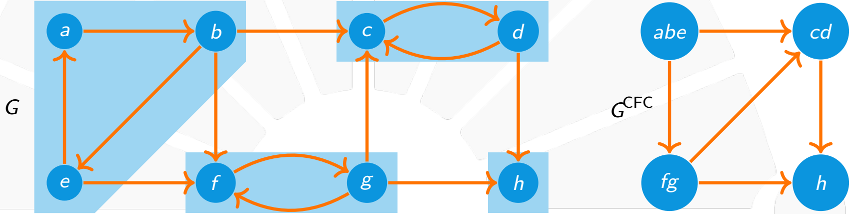
O **GRAFO COMPONENTE** de um grafo direcionado $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é um grafo direcionado, denotado por G^{CFC} em que:

- Cada vértice é uma componente fortemente conexa.
- Existe aresta **(C,D)** se houver **(u,v)** $\in$ **E** com **u** $\in$ **C** e **v** $\in$ **D**.



Note que G^{CFC} é acíclico. Por quê?

Grafo componente



Considere uma busca em profundidade sobre G:

- Se **u** for o último vértice finalizado,
- então **u** deve pertencer a uma fonte de G^{CFC}. Por quê?
- As componentes de G^{CFC} são visitadas em **ORDEM TOPOLÓGICA**.

Grafo transposto

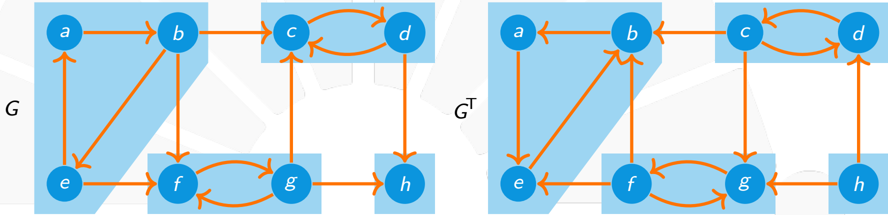
O **GRAFO TRANSPOSTO** de um grafo direcionado $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é um grafo direcionado, denotado por G^{T}, que:

- Tem o mesmo conjunto de vértices **V**.
- Tem uma aresta **(u,v)** se houver uma aresta **(v,u)** em G.

Observações:

- G^{T} é obtido invertendo-se as arestas de G.
- Podemos calcular G^{T} em tempo $O(V + E)$.

Grafo transposto



- Note que G e G^{T} têm as mesmas componentes. Por quê?
- Componentes fontes para G são sorvedouros para G^{T}.
- Se **u** for um vértice de uma fonte em G^{CFC}, então, em G^{T}, os **VÉRTICES ALCANÇÁVEIS** de **u** formam uma componente!

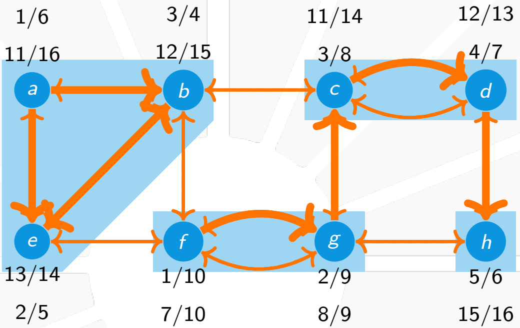
Algoritmo

Algoritmo: $\textsc{Componentes-Fortemente-Conexas}(G)$

execute $\mathrm{DFS}(G)$ e calcule $f[v]$ para cada $v \in V$
execute $\mathrm{DFS}(G^{\mathsf{T}})$ considerando os vértices em **ORDEM DECRESCENTE** de $f[v]$
devolva os conjuntos de vértices de cada árvore da floresta de busca encontrada

A complexidade de tempo é $O(V + E)$.

Exemplo



Execute $\mathrm{DFS}(G)$ e calcule $f[\mathbf{v}]$ para cada $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$.
Execute $\mathrm{DFS}(G^{\mathsf{T}})$ considerando os vértices em **ORDEM DECRESCENTE** de $f[\mathbf{v}]$.
devolva os conjuntos de vértices de cada árvore da floresta de busca encontrada.

Correção

Teorema

O algoritmo Componentes-Fortemente-Conexas *determina as componentes fortemente conexas de G em tempo $O(V + E)$.*

Antes da demonstração, precisamos de uma preparação.

Lema auxiliar

Lema (1)

*Sejam **C** e **D** duas componentes fortemente conexas e considere vértices **u,v** $\in$ **C** e **u',v'** $\in$ **D**.*

- *Se existe algum caminho **u** $\rightsquigarrow$ **u'**,*
- *então **NÃO** existe um caminho **v'** $\rightsquigarrow$ **v**.*

- A prova segue da maximalidade de **C** e **D**.
- O lema implica que G^{CFC} é **ACÍCLICO**.

Definições auxiliares

Adotaremos a seguinte convenção:

- Consideramos que em uma execução do algoritmo d e f referem-se à busca em profundidade da linha 1 (em G).
- Para cada subconjunto $\mathbf{U}$ de vértices, definimos:

$$d(\mathbf{U}) = \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \left\{ d[\mathbf{u}] \right\} \quad \text{e} \quad f(\mathbf{U}) = \max_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \left\{ f[\mathbf{u}] \right\}$$

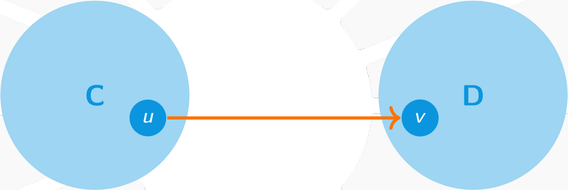
Em outras palavras:

- $d(\mathbf{U})$ é o **PRIMEIRO** instante em que um vértice de $\mathbf{U}$ é descoberto.
- $f(\mathbf{U})$ é o **ÚLTIMO** instante em que um vértice de $\mathbf{U}$ é finalizado.

Outro lema auxiliar

Lema (2)

Sejam $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *duas componentes fortemente conexas. Se existe aresta* **(u,v)** *tal que* $\mathbf{u} \in \mathbf{C}$ *e* $\mathbf{v} \in \mathbf{D}$*, então* $f(\mathbf{C}) > f(\mathbf{D})$*.*

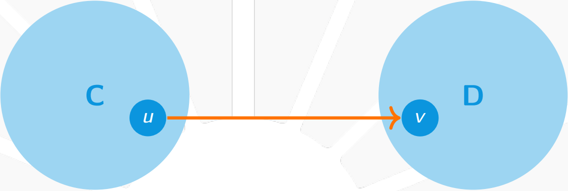


Corolário

Se G^T *tem aresta* **(u,v)** *tal que* $\mathbf{u} \in \mathbf{C}$ *e* $\mathbf{v} \in \mathbf{D}$*, então* $f(\mathbf{C}) < f(\mathbf{D})$*.*

Segue do fato de que G e G^T têm as mesmas componentes.

Demonstração do lema



Suponha que $d(\mathbf{C}) < d(\mathbf{D})$.

- Isso é, **C** foi descoberto antes de **D**.
- Seja **x** o primeiro vértice de **C** a ser descoberto ($d[\mathbf{x}] = d(\mathbf{C})$).
- No instante $d[\mathbf{x}]$, existia um caminho branco de **x** a cada um dos vértices em $\mathbf{C} \cup \mathbf{D}$.
- Então, todos os vértices de $\mathbf{C} \cup \mathbf{D}$ são descendentes de **x**.
- Portanto, $f(\mathbf{D}) < f[\mathbf{x}] \leq f(\mathbf{C})$.

Demonstração do lema

Agora, suponha que $d(\mathbf{C}) > d(\mathbf{D})$:

- Assim, o primeiro vértice a ser descoberto está em **D**.
- Logo, cada um dos vértices de **D** é finalizado antes de qualquer vértice de **C** ser descoberto.
- Portanto, $f(\mathbf{C}) > f(\mathbf{D})$.

Demonstração do teorema

Teorema

O algoritmo Componentes-Fortemente-Conexas *determina as componentes fortemente conexas de G em tempo $O(V + E)$.*

Demonstração:

- Provaremos que as **PRIMEIRAS** k árvores produzidas na linha 3 correspondem a componentes fortemente conexas.
- A prova é por indução em k.
- Quando $k = 0$, a afirmação é trivial, então tome $k \geq 1$.
- Suponha que as primeiras $k - 1$ árvores produzidas correspondem a componentes fortemente conexas.

Demonstração do teorema

Considere a k-ésima árvore produzida pelo algoritmo:

- Sejam **u** a raiz dessa árvore de busca e **C** a componente fortemente conexa que contém **u**.
- Mostraremos que a árvore produzida contém **TODOS** os vértices de **C** e **SOMENTE** os vértices de **C**.
- Isso completará a indução e a prova do teorema.

Demonstração do teorema

A árvore contém **TODOS** os vértices de **C**:

- Considere o instante $d[\mathbf{u}]$, em que **u** é descoberto.
- Por indução, nenhum vértice de **C** foi finalizado.
- Então, no instante $d[\mathbf{u}]$ os vértices de **C** são brancos.
- Portanto, todos os vértices de **C** tornam-se descendentes de **u** na árvore de busca de G^T.

A árvore contém **SOMENTE** vértices de **C**:

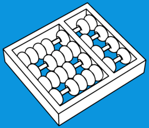
- Suponha que existe uma aresta **(x,v)** que sai de **C**.
- Seja **D** a componente fortemente conexa que contém **v**.
- Pelo corolário do Lema 2, temos que $f(\mathbf{C}) < f(\mathbf{D})$.
- Então, descobrimos vértices de **D** antes de **u**.
- Por indução, todos vértices de **D** já foram finalizados.
- Portanto, a árvore só contém vértices de **C**.

Componentes conexas e fortemente conexas

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

07

08/24



Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

UNICAMP