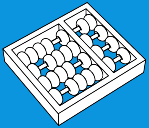
Algoritmo de Floyd-Warshall

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

14

09/24



Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

UNICAMP

"O caminho mais curto nem sempre é uma linha reta."

Anônimo

Caminhos mínimos entre todos os pares de vértices

Novo problema

Dado grafo ponderado (G, w) sem ciclos negativos, queremos encontrar um caminho mínimo de $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ para **TODO** par de vértices $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

Algoritmos para grafos esparsos

Podemos executar $|V|$ vezes um algoritmo de Caminhos Mínimos com Mesma Origem:

Algoritmos para grafos esparsos

Podemos executar $|V|$ vezes um algoritmo de Caminhos Mínimos com Mesma Origem:

- Se (G, w) não possui arestas negativas, usamos DIJKSTRA:

Tipo de fila	Uma vez	$\|V\|$ vezes
Heap	$O(E \log V)$	$O(VE \log V)$
Fibonacci	$O(V \log V + E)$	$O(V^2 \log V + VE)$

Algoritmos para grafos esparsos

Podemos executar $|V|$ vezes um algoritmo de Caminhos Mínimos com Mesma Origem:

- Se (G, w) não possui arestas negativas, usamos Dijkstra:

Tipo de fila	Uma vez	$\|V\|$ vezes
Heap	$O(E \log V)$	$O(VE \log V)$
Fibonacci	$O(V \log V + E)$	$O(V^2 \log V + VE)$

- Se (G, w) possui arestas negativas, usamos Bellman-Ford:

Uma vez	$\|V\|$ vezes
$O(VE)$	$O(V^2 E)$

O algoritmo de Floyd-Warshall

Floyd-Warshall é um algoritmo que resolve o problema diretamente e é melhor se G for **DENSO**.

O algoritmo de Floyd-Warshall

Floyd-Warshall é um algoritmo que resolve o problema diretamente e é melhor se G for **DENSO**.

- Um grafo é denso se $|E| = \omega(V^2)$.

O algoritmo de Floyd-Warshall

Floyd-Warshall é um algoritmo que resolve o problema diretamente e é melhor se G for **DENSO**.

- Um grafo é denso se $|E| = \omega(V^2)$.
- É basado em programação dinâmica.

O algoritmo de Floyd-Warshall

Floyd-Warshall é um algoritmo que resolve o problema diretamente e é melhor se G for **DENSO**.

- Um grafo é denso se $|E| = \omega(V^2)$.
- É basado em programação dinâmica.
- Resolve o problema em tempo $O(V^3)$.

O algoritmo de Floyd-Warshall

Floyd-Warshall é um algoritmo que resolve o problema diretamente e é melhor se G for **DENSO**.

- Um grafo é denso se $|E| = \omega(V^2)$.
- É basado em programação dinâmica.
- Resolve o problema em tempo $O(V^3)$.
- Supomos que G é completo:

O algoritmo de Floyd-Warshall

Floyd-Warshall é um algoritmo que resolve o problema diretamente e é melhor se G for **DENSO**.

- Um grafo é denso se $|E| = \omega(V^2)$.
- É basado em programação dinâmica.
- Resolve o problema em tempo $O(V^3)$.
- Supomos que G é completo:

O algoritmo de Floyd-Warshall

Floyd-Warshall é um algoritmo que resolve o problema diretamente e é melhor se G for **DENSO**.

- Um grafo é denso se $|E| = \omega(V^2)$.
- É basado em programação dinâmica.
- Resolve o problema em tempo $O(V^3)$.
- Supomos que G é completo:
  $\Rightarrow$ Se (i, j) não é aresta, definimos $w(i, j) = \infty$

Subproblema

Para simplificar a discussão, suponha que $\mathbf{V} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{n}\}$.

Subproblema

Para simplificar a discussão, suponha que $\mathbf{V} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{n}\}$.

Considere um caminho $P = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_{l-1}}, \mathbf{v_l})$:

Subproblema

Para simplificar a discussão, suponha que $\mathbf{V} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{n}\}$.

Considere um caminho $P = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_{l-1}}, \mathbf{v_l})$:

- Os **VÉRTICES INTERNOS** de P são $\{\mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_{l-1}}\}$.

Subproblema

Para simplificar a discussão, suponha que $\mathbf{V} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{n}\}$.

Considere um caminho $P = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_{l-1}}, \mathbf{v_l})$:

- Os **VÉRTICES INTERNOS** de P são $\{\mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_{l-1}}\}$.
- P é chamado k-**INTERNO** se $\{\mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_{l-1}}\} \subseteq \{\mathbf{1}, \ldots, \mathbf{k}\}$.

Subproblema

Para simplificar a discussão, suponha que $\mathbf{V} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{n}\}$.

Considere um caminho $P = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_{l-1}}, \mathbf{v_l})$:

- Os **VÉRTICES INTERNOS** de P são $\{\mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_{l-1}}\}$.
- P é chamado k-**INTERNO** se $\{\mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_{l-1}}\} \subseteq \{\mathbf{1}, \ldots, \mathbf{k}\}$.

Problema (Subproblema ótimo)

Sejam ***i*** *e* ***j*** *vértices de G e k um inteiro com $k \geq 0$. Dentre todos os caminhos k-internos de* ***i*** *até* ***j****, encontre algum que tenha custo mínimo.*

Estrutura de um caminho mínimo

O algoritmo de Floyd-Warshall explora a relação entre:

- Um caminho k-interno P de **i** até **j** que tem custo mínimo
- e outros caminhos $(k-1)$-internos.

Estrutura de um caminho mínimo

O algoritmo de Floyd-Warshall explora a relação entre:

- Um caminho k-interno P de **i** até **j** que tem custo mínimo
- e outros caminhos $(k-1)$-internos.

Caso 1: Se **k** não é um vértice interno de P:

Estrutura de um caminho mínimo

O algoritmo de Floyd-Warshall explora a relação entre:

- Um caminho k-interno P de **i** até **j** que tem custo mínimo
- e outros caminhos $(k-1)$-internos.

Caso 1: Se **k** não é um vértice interno de P:

- Todos os vértices internos de P estão em $\{\mathbf{1}, \ldots, \mathbf{k} - \mathbf{1}\}$.

Estrutura de um caminho mínimo

O algoritmo de Floyd-Warshall explora a relação entre:

- Um caminho k-interno P de **i** até **j** que tem custo mínimo
- e outros caminhos $(k-1)$-internos.

Caso 1: Se **k** não é um vértice interno de P:

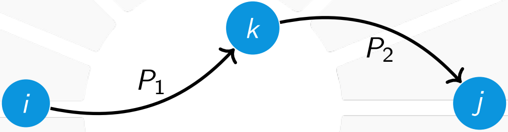
- Todos os vértices internos de P estão em $\{\mathbf{1}, \ldots, \mathbf{k-1}\}$.
- Então, P é um caminho $(k-1)$-interno de custo mínimo.

Estrutura de um caminho mínimo

Caso 2: Se **k** é um vértice interno de P, então P pode ser dividido em dois caminhos P_1 (com início em **i** e fim em **k**) e P_2 (com início em **k** e fim em **j**).

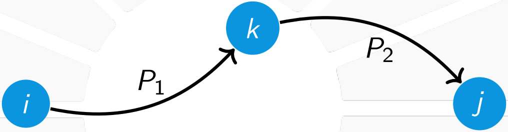
Estrutura de um caminho mínimo

Caso 2: Se **k** é um vértice interno de P, então P pode ser dividido em dois caminhos P_1 (com início em **i** e fim em **k**) e P_2 (com início em **k** e fim em **j**).



Estrutura de um caminho mínimo

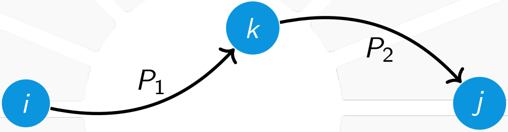
Caso 2: Se $\mathbf{k}$ é um vértice interno de P, então P pode ser dividido em dois caminhos P_1 (com início em $\mathbf{i}$ e fim em $\mathbf{k}$) e P_2 (com início em $\mathbf{k}$ e fim em $\mathbf{j}$).



- P_1 é um caminho mínimo de $\mathbf{i}$ a $\mathbf{k}$ com vértices internos em $\{\mathbf{1}, \ldots, \mathbf{k-1}\}$.

Estrutura de um caminho mínimo

Caso 2: Se **k** é um vértice interno de P, então P pode ser dividido em dois caminhos P_1 (com início em **i** e fim em **k**) e P_2 (com início em **k** e fim em **j**).



- P_1 é um caminho mínimo de **i** a **k** com vértices internos em $\{\mathbf{1}, \ldots, \mathbf{k-1}\}$.
- P_2 é um caminho mínimo de **k** a **j** com vértices internos em $\{\mathbf{1}, \ldots, \mathbf{k-1}\}$.

Recorrência para caminhos mínimos

Seja $d_{ij}^{(k)}$ o peso de um caminho k-interno mínimo de **i** a **j**.

Recorrência para caminhos mínimos

Seja $d_{ij}^{(k)}$ o peso de um caminho k-interno mínimo de **i** a **j**.

- Se $k = 0$ então $d_{ij}^{(0)} = w(i, j)$.

Recorrência para caminhos mínimos

Seja $d_{ij}^{(k)}$ o peso de um caminho k-interno mínimo de **i** a **j**.

- Se $k = 0$ então $d_{ij}^{(0)} = w(i, j)$.
- Senão, caímos em algum dos dois casos anteriores.

Recorrência para caminhos mínimos

Seja $d_{ij}^{(k)}$ o peso de um caminho k-interno mínimo de **i** a **j**.

- Se $k = 0$ então $d_{ij}^{(0)} = w(i, j)$.
- Senão, caímos em algum dos dois casos anteriores.

Obtemos a seguinte recorrência:

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w(i,j) & \text{se } k = 0, \\ \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}) & \text{se } k \geq 1. \end{cases}$$

Recorrência para caminhos mínimos

Seja $d_{ij}^{(k)}$ o peso de um caminho k-interno mínimo de **i** a **j**.

- Se $k = 0$ então $d_{ij}^{(0)} = w(i,j)$.
- Senão, caímos em algum dos dois casos anteriores.

Obtemos a seguinte recorrência:

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w(i,j) & \text{se } k = 0, \\ \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}) & \text{se } k \geq 1. \end{cases}$$

Note que, $d_{ij}^{(n)} = \mathrm{dist}(i,j)$.

Recorrência para caminhos mínimos

Seja $d_{ij}^{(k)}$ o peso de um caminho k-interno mínimo de **i** a **j**.

- Se $k = 0$ então $d_{ij}^{(0)} = w(i,j)$.
- Senão, caímos em algum dos dois casos anteriores.

Obtemos a seguinte recorrência:

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w(i,j) & \text{se } k = 0, \\ \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}) & \text{se } k \geq 1. \end{cases}$$

Note que, $d_{ij}^{(n)} = \mathrm{dist}(i,j)$. Por quê?

Recorrência para caminhos mínimos

Seja $d_{ij}^{(k)}$ o peso de um caminho k-interno mínimo de **i** a **j**.

- Se $k = 0$ então $d_{ij}^{(0)} = w(i, j)$.
- Senão, caímos em algum dos dois casos anteriores.

Obtemos a seguinte recorrência:

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w(i,j) & \text{se } k = 0, \\ \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}) & \text{se } k \geq 1. \end{cases}$$

Note que, $d_{ij}^{(n)} = \operatorname{dist}(i, j)$. Por quê?

- Calculamos as matrizes $D^{(k)} = (d_{ij}^{(k)})$ para $k = 1, 2 \ldots, n$.

Recorrência para caminhos mínimos

Seja $d_{ij}^{(k)}$ o peso de um caminho k-interno mínimo de **i** a **j**.

- Se $k = 0$ então $d_{ij}^{(0)} = w(i, j)$.
- Senão, caímos em algum dos dois casos anteriores.

Obtemos a seguinte recorrência:

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w(i, j) & \text{se } k = 0, \\ \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}) & \text{se } k \geq 1. \end{cases}$$

Note que, $d_{ij}^{(n)} = \mathrm{dist}(i, j)$. Por quê?

- Calculamos as matrizes $D^{(k)} = (d_{ij}^{(k)})$ para $k = 1, 2 \ldots, n$.
- A resposta do problema é $D^{(n)}$.

Algoritmo de Floyd-Warshall

Problema

Entrada: *Matriz* $W = (w(i,j))$ *com dimensões* $n \times n$.
Saída: *Matriz* $D^{(n)}$.

Algoritmo de Floyd-Warshall

Problema

Entrada: *Matriz* $W = (w(i,j))$ *com dimensões* $n \times n$*.*
Saída: *Matriz* $D^{(n)}$*.*

Algoritmo: $\textsc{Floyd-Warshall}(W, n)$

$D^{(0)} \leftarrow W$
para $k \leftarrow 1$ **até** n
  para $i \leftarrow 1$ **até** n
    para $j \leftarrow 1$ **até** n
      $d_{ij}^{(k)} \leftarrow \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)})$
devolva $D^{(n)}$

Algoritmo de Floyd-Warshall

Problema

Entrada: *Matriz* $W = (w(i, j))$ *com dimensões* $n \times n$.
Saída: *Matriz* $D^{(n)}$.

Algoritmo: $\textsc{Floyd-Warshall}(W, n)$

$D^{(0)} \leftarrow W$
para $k \leftarrow 1$ **até** n
  para $i \leftarrow 1$ **até** n
    para $j \leftarrow 1$ **até** n
      $d_{ij}^{(k)} \leftarrow \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)})$
devolva $D^{(n)}$

Complexidade: $O(V^3)$.

Como encontrar os caminhos?

Devolvemos matriz de predecessores $\Pi = (\pi_{ij})$

Como encontrar os caminhos?

Devolvemos matriz de predecessores $\Pi = (\pi_{ij})$

(a) $\pi_{ij} = \text{NIL}$ se $\mathbf{i} = \mathbf{j}$ ou se não existe caminho de $\mathbf{i}$ a $\mathbf{j}$,

Como encontrar os caminhos?

Devolvemos matriz de predecessores $\Pi = (\pi_{ij})$

(a) π_{ij} = NIL se **i** = **j** ou se não existe caminho de **i** a **j**,

(b) π_{ij} é o **PREDECESSOR** de **j** em algum caminho mínimo a partir de **i**, caso contrário.

Como encontrar os caminhos?

Devolvemos matriz de predecessores $\Pi = (\pi_{ij})$

(a) $\pi_{ij} =$ NIL se $\mathbf{i} = \mathbf{j}$ ou se não existe caminho de **i** a **j**,

(b) π_{ij} é o **PREDECESSOR** de **j** em algum caminho mínimo a partir de **i**, caso contrário.

- Calculamos do mesmo modo que $D^{(k)}$.
- Obtemos uma sequência de matrizes $\Pi^{(0)}, \Pi^{(1)}, \ldots, \Pi^{(n)}$

Como encontrar os caminhos?

Devolvemos matriz de predecessores $\Pi = (\pi_{ij})$

(a) $\pi_{ij} = \text{NIL}$ se $\mathbf{i} = \mathbf{j}$ ou se não existe caminho de **i** a **j**,

(b) π_{ij} é o **PREDECESSOR** de **j** em algum caminho mínimo a partir de **i**, caso contrário.

- Calculamos do mesmo modo que $D^{(k)}$.
- Obtemos uma sequência de matrizes $\Pi^{(0)}, \Pi^{(1)}, \ldots, \Pi^{(n)}$

Quando $k = 0$:

$$\pi_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \text{NIL} & \text{se } i = j \text{ ou } w(i,j) = \infty, \\ i & \text{se } i \neq j \text{ e } w(i,j) < \infty. \end{cases}$$

Como encontrar os caminhos?

Se $k \geq 1$:

Como encontrar os caminhos?

Se $k \geq 1$:

- Considere um caminho k-interno mínimo P de **i** a **j**.

Como encontrar os caminhos?

Se $k \geq 1$:

- Considere um caminho k-interno mínimo P de **i** a **j**.
- Obtemos o **PREDECESSOR DE j**:
  - Se k não aparece em P, então usamos o predecessor de um caminho $(k-1)$-interno de **i** a **j**.

Como encontrar os caminhos?

Se $k \geq 1$:

- Considere um caminho k-interno mínimo P de **i** a **j**.
- Obtemos o **PREDECESSOR DE j**:
  - Se k não aparece em P, então usamos o predecessor de um caminho $(k-1)$-interno de **i** a **j**.
  - Se k aparece em P, então usamos o predecessor de um caminho $(k-1)$-interno de **k** a **j**.

Como encontrar os caminhos?

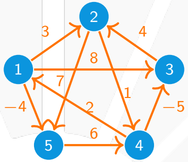
Se $k \geq 1$:

- Considere um caminho k-interno mínimo P de **i** a **j**.
- Obtemos o **PREDECESSOR DE j**:
  - Se k não aparece em P, então usamos o predecessor de um caminho $(k-1)$-interno de **i** a **j**.
  - Se k aparece em P, então usamos o predecessor de um caminho $(k-1)$-interno de **k** a **j**.

Formalmente,

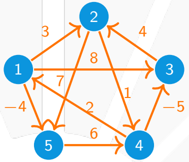
$$\pi_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \pi_{ij}^{(k-1)} & \text{se } d_{ij}^{(k-1)} \leq d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}, \\ \pi_{kj}^{(k-1)} & \text{se } d_{ij}^{(k-1)} > d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}. \end{cases}$$

Exemplo



$$D^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi^{(0)} = \begin{pmatrix} N & 1 & 1 & N & 1 \\ N & N & N & 2 & 2 \\ N & 3 & N & N & N \\ 4 & N & 4 & N & N \\ N & N & N & 5 & N \end{pmatrix}$$

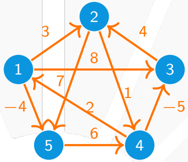
Exemplo



$$D^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi^{(0)} = \begin{pmatrix} N & 1 & 1 & N & 1 \\ N & N & N & 2 & 2 \\ N & 3 & N & N & N \\ 4 & N & 4 & N & N \\ N & N & N & 5 & N \end{pmatrix}$$

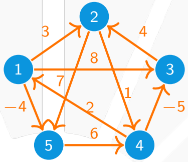
$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \mathbf{5} & -5 & 0 & \mathbf{-2} \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi^{(1)} = \begin{pmatrix} N & 1 & 1 & N & 1 \\ N & N & N & 2 & 2 \\ N & 3 & N & N & N \\ 4 & \mathbf{1} & 4 & N & \mathbf{1} \\ N & N & N & 5 & N \end{pmatrix}$$

Exemplo



$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi^{(1)} = \begin{pmatrix} N & 1 & 1 & N & 1 \\ N & N & N & 2 & 2 \\ N & 3 & N & N & N \\ 4 & 1 & 4 & N & 1 \\ N & N & N & 5 & N \end{pmatrix}$$

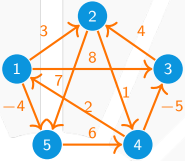
Exemplo



$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi^{(1)} = \begin{pmatrix} N & 1 & 1 & N & 1 \\ N & N & N & 2 & 2 \\ N & 3 & N & N & N \\ 4 & 1 & 4 & N & 1 \\ N & N & N & 5 & N \end{pmatrix}$$

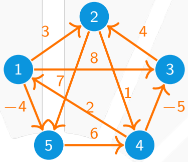
$$D^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \mathbf{4} & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \mathbf{5} & \mathbf{11} \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi^{(2)} = \begin{pmatrix} N & 1 & 1 & \mathbf{2} & 1 \\ N & N & N & 2 & 2 \\ N & 3 & N & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ 4 & 1 & 4 & N & 1 \\ N & N & N & 5 & N \end{pmatrix}$$

Exemplo



$$D^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi^{(2)} = \begin{pmatrix} N & 1 & 1 & 4 & 1 \\ N & N & N & 2 & 2 \\ N & 3 & N & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & N & 1 \\ N & N & N & 5 & N \end{pmatrix}$$

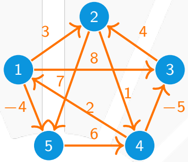
Exemplo



$$D^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi^{(2)} = \begin{pmatrix} N & 1 & 1 & 4 & 1 \\ N & N & N & 2 & 2 \\ N & 3 & N & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & N & 1 \\ N & N & N & 5 & N \end{pmatrix}$$

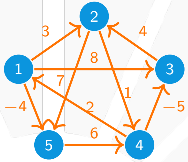
$$D^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & \mathbf{-1} & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi^{(3)} = \begin{pmatrix} N & 1 & 1 & 2 & 1 \\ N & N & N & 2 & 2 \\ N & 3 & N & 2 & 2 \\ 4 & \mathbf{3} & 4 & N & 1 \\ N & N & N & 5 & N \end{pmatrix}$$

Exemplo



$$D^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi^{(3)} = \begin{pmatrix} N & 1 & 1 & 2 & 1 \\ N & N & N & 2 & 2 \\ N & 3 & N & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & N & 1 \\ N & N & N & 5 & N \end{pmatrix}$$

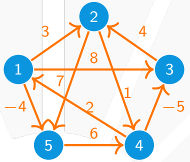
Exemplo



$$D^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi^{(3)} = \begin{pmatrix} N & 1 & 1 & 2 & 1 \\ N & N & N & 2 & 2 \\ N & 3 & N & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & N & 1 \\ N & N & N & 5 & N \end{pmatrix}$$

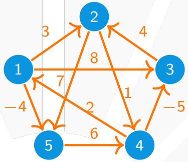
$$D^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi^{(4)} = \begin{pmatrix} N & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & N & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & N & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & N & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & N \end{pmatrix}$$

Exemplo



$$D^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi^{(4)} = \begin{pmatrix} N & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & N & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & N & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & N & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & N \end{pmatrix}$$

Exemplo



$$D^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi^{(4)} = \begin{pmatrix} N & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & N & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & N & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & N & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & N \end{pmatrix}$$

$$D^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi^{(5)} = \begin{pmatrix} N & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & 1 \\ 4 & N & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & N & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & N & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & N \end{pmatrix}$$

Fecho transitivo de grafos direcionados

Fecho transitivo de grafos direcionados

Seja $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ um grafo direcionado com $\mathbf{V} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{n}\}$.

Fecho transitivo de grafos direcionados

Seja $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ um grafo direcionado com $\mathbf{V} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{n}\}$.

O **FECHO TRANSITIVO** de $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é o grafo $G^* = (\mathbf{V}, \mathbf{E}^*)$ onde:

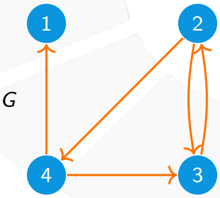
$$\mathbf{E}^* = \{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) : \text{ existe um caminho de } i \text{ a } j \text{ em } G\}.$$

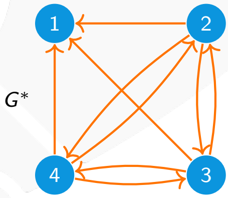
Fecho transitivo de grafos direcionados

Seja $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ um grafo direcionado com $\mathbf{V} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{n}\}$.

O **FECHO TRANSITIVO** de $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é o grafo $G^* = (\mathbf{V}, \mathbf{E}^*)$ onde:

$$\mathbf{E}^* = \{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) : \text{ existe um caminho de } i \text{ a } j \text{ em } G\}.$$





Um detalhe de implementação

Determinando o fecho transitivo de $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$:

Um detalhe de implementação

Determinando o fecho transitivo de $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$:

1. Atribuímos peso 1 a cada aresta.

Um detalhe de implementação

Determinando o fecho transitivo de $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$:

1. Atribuímos peso 1 a cada aresta.
2. Executamos Floyd-Warshall em tempo $\Theta(V^3)$.

Um detalhe de implementação

Determinando o fecho transitivo de $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$:

1. Atribuímos peso 1 a cada aresta.
2. Executamos Floyd-Warshall em tempo $\Theta(V^3)$.
3. Existe um caminho de **i** a **j** se e somente se $d_{ij} < |V|$.

Um detalhe de implementação

Determinando o fecho transitivo de $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$:

1. Atribuímos peso 1 a cada aresta.
2. Executamos Floyd-Warshall em tempo $\Theta(V^3)$.
3. Existe um caminho de **i** a **j** se e somente se $d_{ij} < |V|$.

Na prática:

Um detalhe de implementação

Determinando o fecho transitivo de $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$:

1. Atribuímos peso 1 a cada aresta.
2. Executamos Floyd-Warshall em tempo $\Theta(V^3)$.
3. Existe um caminho de **i** a **j** se e somente se $d_{ij} < |V|$.

Na prática:

- Executamos Floyd-Warshall substituindo:
  - min por $\vee$ (OU lógico).
  - $+$ por $\wedge$ (E lógico).

Um detalhe de implementação

Determinando o fecho transitivo de $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$:

1. Atribuímos peso 1 a cada aresta.
2. Executamos Floyd-Warshall em tempo $\Theta(V^3)$.
3. Existe um caminho de **i** a **j** se e somente se $d_{ij} < |V|$.

Na prática:

- Executamos Floyd-Warshall substituindo:
  - min por $\vee$ (OU lógico).
  - $+$ por $\wedge$ (E lógico).
- Tem a mesma complexidade assintótica.

Um detalhe de implementação

Determinando o fecho transitivo de $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$:

1. Atribuímos peso 1 a cada aresta.
2. Executamos Floyd-Warshall em tempo $\Theta(V^3)$.
3. Existe um caminho de **i** a **j** se e somente se $d_{ij} < |V|$.

Na prática:

- Executamos Floyd-Warshall substituindo:
  - min por $\vee$ (OU lógico).
  - $+$ por $\wedge$ (E lógico).
- Tem a mesma complexidade assintótica.
- Economiza tempo e espaço.

Fecho transitivo de grafos direcionados

Defina $t_{i,j}^{(k)}$ o valor booleano:

Fecho transitivo de grafos direcionados

Defina $t_{i,j}^{(k)}$ o valor booleano:

- TRUE se existe caminho k-interno de **i** a **j**.

Fecho transitivo de grafos direcionados

Defina $t_{i,j}^{(k)}$ o valor booleano:

- TRUE se existe caminho k-interno de **i** a **j**.
- FALSE se **NÃO** existe caminho k-interno de **i** a **j**.

Fecho transitivo de grafos direcionados

Defina $t_{i,j}^{(k)}$ o valor booleano:

- TRUE se existe caminho k-interno de **i** a **j**.
- FALSE se **NÃO** existe caminho k-interno de **i** a **j**.

Para $k = 0$

$$t_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \text{ e } (i,j) \notin E, \\ 1 & \text{se } i = j \text{ ou } (i,j) \in E, \end{cases}$$

Fecho transitivo de grafos direcionados

Defina $t_{i,j}^{(k)}$ o valor booleano:

- TRUE se existe caminho k-interno de **i** a **j**.
- FALSE se **NÃO** existe caminho k-interno de **i** a **j**.

Para $k = 0$

$$t_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \text{ e } (i,j) \notin E, \\ 1 & \text{se } i = j \text{ ou } (i,j) \in E, \end{cases}$$

e para $k \geq 1$,

$$t_{ij}^{(k)} = t_{ij}^{(k-1)} \vee \left(t_{ik}^{(k-1)} \wedge t_{kj}^{(k-1)}\right).$$

Fecho transitivo de grafos direcionados

Defina $t_{i,j}^{(k)}$ o valor booleano:

- TRUE se existe caminho k-interno de **i** a **j**.
- FALSE se **NÃO** existe caminho k-interno de **i** a **j**.

Para $k = 0$

$$t_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \text{ e } (i,j) \notin E, \\ 1 & \text{se } i = j \text{ ou } (i,j) \in E, \end{cases}$$

e para $k \geq 1$,

$$t_{ij}^{(k)} = t_{ij}^{(k-1)} \vee \left(t_{ik}^{(k-1)} \wedge t_{kj}^{(k-1)}\right).$$

Como em FLOYD-WARSHALL, calculamos matrizes $T^{(k)} = (t_{ij}^{(k)})$.

Algoritmo de Transitive-Closure

Problema

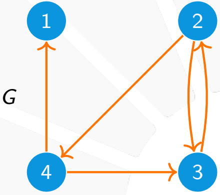
Entrada: *Matriz de adjacência A de G.*
Saída: *Matriz de adjacência $T^{(n)}$ de G^*.*

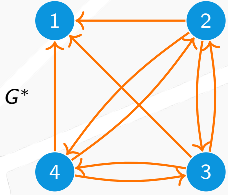
Algoritmo: $\textsc{Transitive-Closure}(A, n)$

```
T^(0) ← A + I_n
para k ← 1 até n
    para i ← 1 até n
        para j ← 1 até n
            t_ij^(k) ← t_ij^(k−1) ∨ (t_ik^(k−1) ∧ t_kj^(k−1))
devolva T^(n)
```

Complexidade: $O(V^3)$.

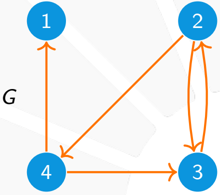
Exemplo

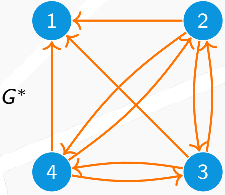




$$T^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

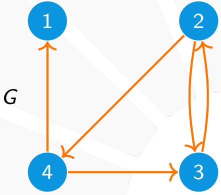
Exemplo

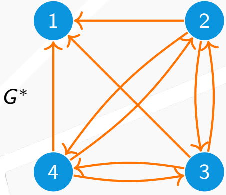




$$T^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad T^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo

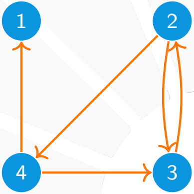




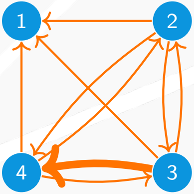
$$T^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo

G

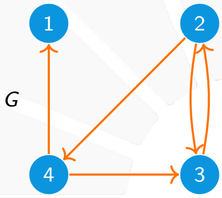


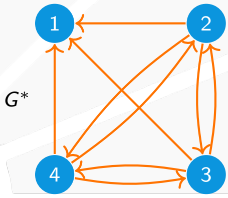
G^*



$$T^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad T^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \mathbf{1} \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

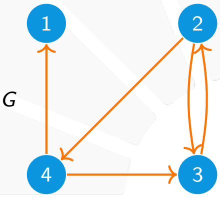
Exemplo

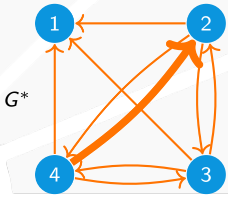




$$T^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

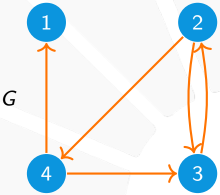
Exemplo

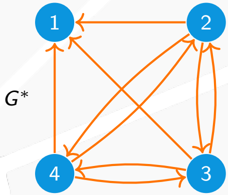




$$T^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad T^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathbf{1} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

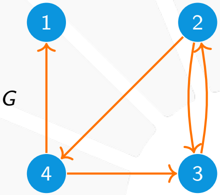
Exemplo

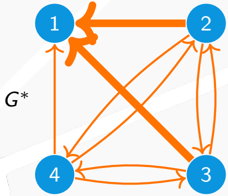




$$T^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo





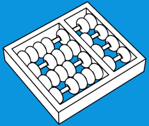
$$T^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad T^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Algoritmo de Floyd-Warshall

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

14

09/24



UNICAMP

Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br