

FLUXO EM REDES

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

Santiago Valdés Ravelo
<https://ic.unicamp.br/~santiago/ravelo@unicamp.br>

10/24

15



UNICAMP



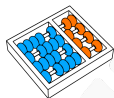
"Renda-se ao fluxo."

Mike Gordon

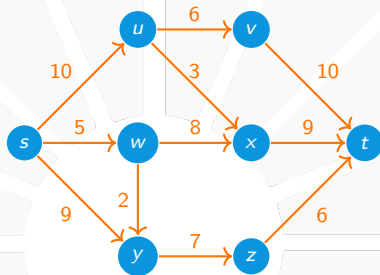




PROBLEMAS DE FLUXO



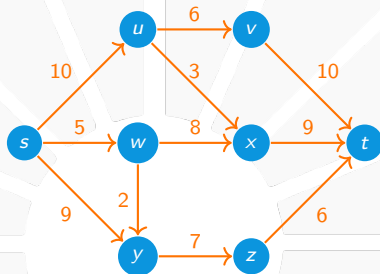
Rede de fluxo



Considere um grafo direcionado:

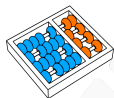


Rede de fluxo

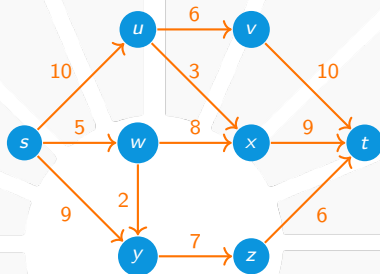


Considere um grafo direcionado:

- ▶ Um vértice **FONTE** **s** produz certo material.

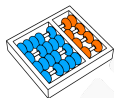


Rede de fluxo

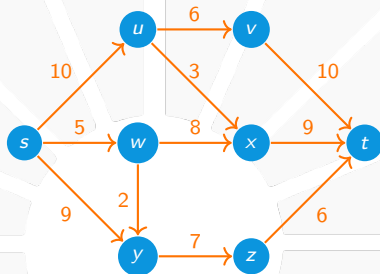


Considere um grafo direcionado:

- ▶ Um vértice **FONTE** s produz certo material.
- ▶ Um vértice **TERMINAL** t consome esse material.

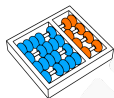


Rede de fluxo

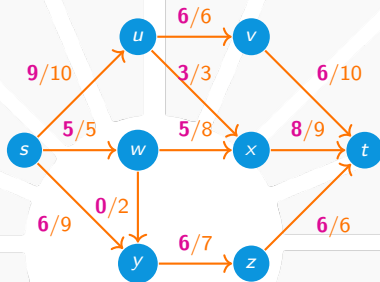


Considere um grafo direcionado:

- ▶ Um vértice **FONTE** s produz certo material.
- ▶ Um vértice **TERMINAL** t consome esse material.
- ▶ Queremos transportar o material de s até t .



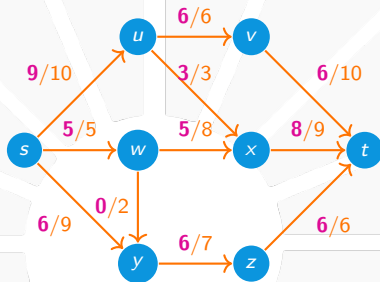
Rede de fluxo



O material escoia através das arestas:



Rede de fluxo

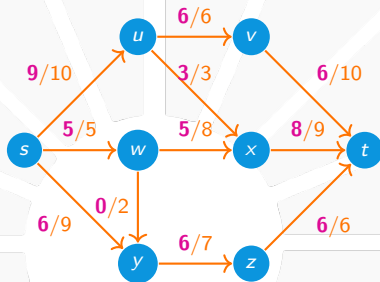


O material escoia através das arestas:

- ▶ Cada aresta representa um conduto.



Rede de fluxo

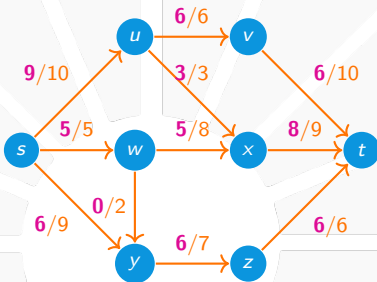


O material escoa através das arestas:

- ▶ Cada aresta representa um conduto.
- ▶ A taxa com que o material escoa é o **FLUXO** em uma aresta.

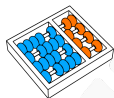


Rede de fluxo

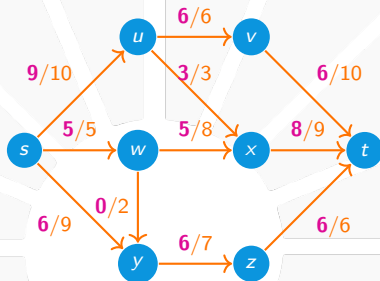


O material escoa através das arestas:

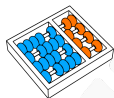
- ▶ Cada aresta representa um conduto.
- ▶ A taxa com que o material escoa é o **FLUXO** em uma aresta.
- ▶ A maior taxa permitida é a **CAPACIDADE** da aresta.



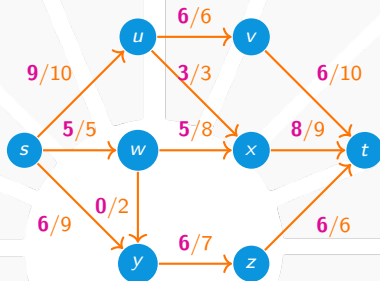
Rede de fluxo



Nenhum material é perdido no caminho de s a t :

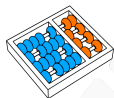


Rede de fluxo

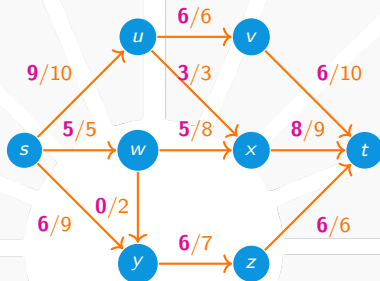


Nenhum material é perdido no caminho de s a t :

- ▶ Os demais vértices são pontos de junção desses condutos.

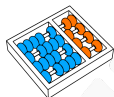


Rede de fluxo

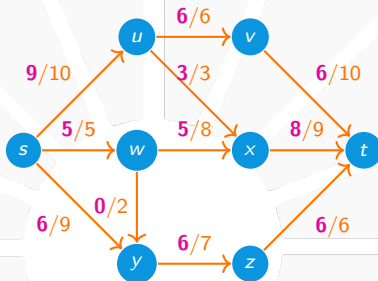


Nenhum material é perdido no caminho de s a t :

- ▶ Os demais vértices são pontos de junção desses condutos.
- ▶ A quantidade de material que chega em um vértice é igual à quantidade de material que sai desse vértice.

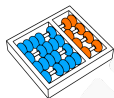


Rede de fluxo

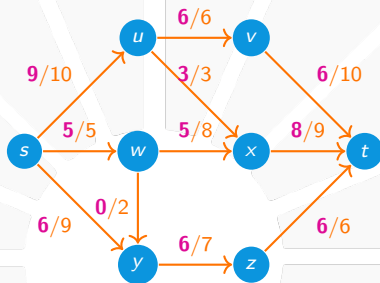


Nenhum material é perdido no caminho de **s** a **t**:

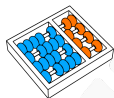
- ▶ Os demais vértices são pontos de junção desses condutos.
- ▶ A quantidade de material que chega em um vértice é igual à quantidade de material que sai desse vértice.
- ▶ Dizemos que há **CONSERVAÇÃO DE FLUXO**.



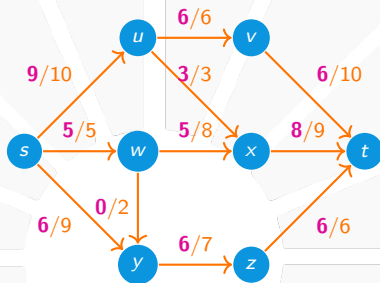
Problema do fluxo máximo



Redes de fluxos modelam várias situações:



Problema do fluxo máximo

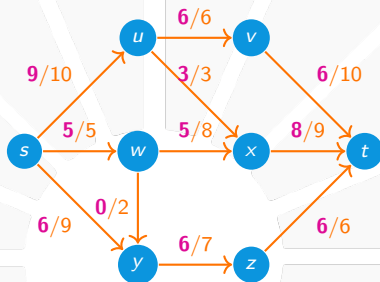


Redes de fluxos modelam várias situações:

- ▶ **VAZÃO DE LÍQUIDO** (água, petróleo) através de canos.

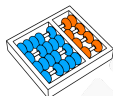


Problema do fluxo máximo

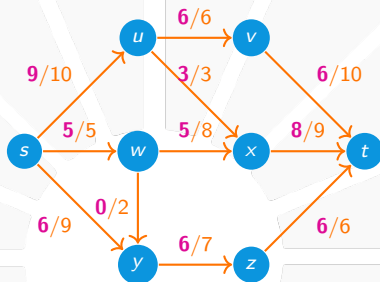


Redes de fluxos modelam várias situações:

- ▶ **VAZÃO DE LÍQUIDO** (água, petróleo) através de canos.
- ▶ **DISTRIBUIÇÃO DE PRODUTOS** através de redes de fornecimento.



Problema do fluxo máximo

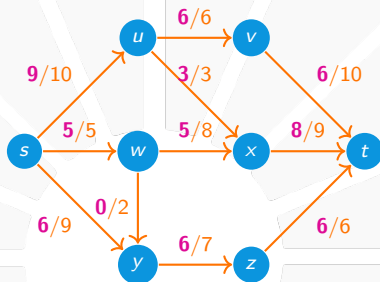


Redes de fluxos modelam várias situações:

- ▶ **VAZÃO DE LÍQUIDO** (água, petróleo) através de canos.
- ▶ **DISTRIBUIÇÃO DE PRODUTOS** através de redes de fornecimento.
- ▶ **CORRENTE ELÉTRICA** através de fios condutores.

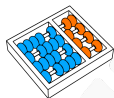


Problema do fluxo máximo



Redes de fluxos modelam várias situações:

- ▶ **VAZÃO DE LÍQUIDO** (água, petróleo) através de canos.
- ▶ **DISTRIBUIÇÃO DE PRODUTOS** através de redes de fornecimento.
- ▶ **CORRENTE ELÉTRICA** através de fios condutores.
- ▶ **INFORMAÇÃO** (bits) através de redes de comunicação.



Formalizando

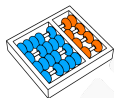
Uma **REDE DE FLUXO** é uma quádrupla (G, c, s, t) onde:



Formalizando

Uma **REDE DE FLUXO** é uma quádrupla (G, c, s, t) onde:

- ▶ $G = (V, E)$ é um grafo direcionado,



Formalizando

Uma **REDE DE FLUXO** é uma quádrupla (G, c, s, t) onde:

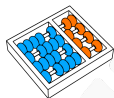
- ▶ $G = (V, E)$ é um grafo direcionado,
- ▶ $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ representa as capacidade das arestas,



Formalizando

Uma **REDE DE FLUXO** é uma quádrupla (G, c, s, t) onde:

- ▶ $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é um grafo direcionado,
- ▶ $c : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$ representa as capacidade das arestas,
- ▶ s e t são vértices de G chamados de **FONTE** e **TERMINAL**.



Simplificações

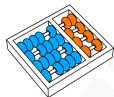
Fazemos as seguintes hipóteses para uma rede (G, c, s, t) :



Simplificações

Fazemos as seguintes hipóteses para uma rede (G, c, s, t) :

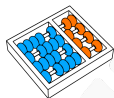
- ▶ G não contém laços.



Simplificações

Fazemos as seguintes hipóteses para uma rede (G, c, s, t) :

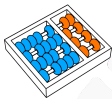
- ▶ G não contém laços.
- ▶ Se $(u, v) \notin E$ então denotamos $c(u, v) = 0$.



Simplificações

Fazemos as seguintes hipóteses para uma rede (G, c, s, t) :

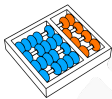
- ▶ G não contém laços.
- ▶ Se $(u, v) \notin E$ então denotamos $c(u, v) = 0$.
- ▶ Todo vértice pertence a algum caminho de s a t .



Simplificações

Fazemos as seguintes hipóteses para uma rede (G, c, s, t) :

- ▶ G não contém laços.
- ▶ Se $(u, v) \notin E$ então denotamos $c(u, v) = 0$.
- ▶ Todo vértice pertence a algum caminho de s a t .
- ▶ Se a aresta $(u, v) \in E$, então a **ARESTA REVERSA** $(v, u) \notin E$.

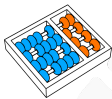


Simplificações

Fazemos as seguintes hipóteses para uma rede (G, c, s, t) :

- ▶ G não contém laços.
- ▶ Se $(u, v) \notin E$ então denotamos $c(u, v) = 0$.
- ▶ Todo vértice pertence a algum caminho de s a t .
- ▶ Se a aresta $(u, v) \in E$, então a **ARESTA REVERSA** $(v, u) \notin E$.

Isso simplifica nosso estudo:



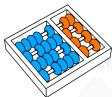
Simplificações

Fazemos as seguintes hipóteses para uma rede (G, c, s, t) :

- ▶ G não contém laços.
- ▶ Se $(u, v) \notin E$ então denotamos $c(u, v) = 0$.
- ▶ Todo vértice pertence a algum caminho de s a t .
- ▶ Se a aresta $(u, v) \in E$, então a **ARESTA REVERSA** $(v, u) \notin E$.

Isso simplifica nosso estudo:

- ▶ Veremos depois o que fazer se as hipóteses não valerem.



Simplificações

Fazemos as seguintes hipóteses para uma rede (G, c, s, t) :

- ▶ G não contém laços.
- ▶ Se $(u, v) \notin E$ então denotamos $c(u, v) = 0$.
- ▶ Todo vértice pertence a algum caminho de s a t .
- ▶ Se a aresta $(u, v) \in E$, então a **ARESTA REVERSA** $(v, u) \notin E$.

Isso simplifica nosso estudo:

- ▶ Veremos depois o que fazer se as hipóteses não valerem.
- ▶ O custo será aumentar o tamanho do grafo.



Fluxo

Um **FLUXO** em uma rede (G, c, s, t) é uma função $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:



Fluxo

Um **FLUXO** em uma rede (G, c, s, t) é uma função $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. **Restrição de capacidade:** para todo $u, v \in \mathbf{V}$ temos que:

$$0 \leq f(u, v) \leq c(u, v).$$



Fluxo

Um **FLUXO** em uma rede (G, c, s, t) é uma função $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. **Restrição de capacidade:** para todo $u, v \in \mathbf{V}$ temos que:

$$0 \leq f(u, v) \leq c(u, v).$$

2. **Conservação de fluxo:** para todo $u \in \mathbf{V} \setminus \{s, t\}$ temos que

$$\sum_{v \in \mathbf{V}} f(v, u) = \sum_{v \in \mathbf{V}} f(u, v).$$



Fluxo

Um **FLUXO** em uma rede (G, c, s, t) é uma função $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. **Restrição de capacidade:** para todo $u, v \in \mathbf{V}$ temos que:

$$0 \leq f(u, v) \leq c(u, v).$$

2. **Conservação de fluxo:** para todo $u \in \mathbf{V} \setminus \{s, t\}$ temos que

$$\sum_{v \in \mathbf{V}} f(v, u) = \sum_{v \in \mathbf{V}} f(u, v).$$

Observações:



Fluxo

Um **FLUXO** em uma rede (G, c, s, t) é uma função $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. **Restrição de capacidade:** para todo $u, v \in \mathbf{V}$ temos que:

$$0 \leq f(u, v) \leq c(u, v).$$

2. **Conservação de fluxo:** para todo $u \in \mathbf{V} \setminus \{s, t\}$ temos que

$$\sum_{v \in \mathbf{V}} f(v, u) = \sum_{v \in \mathbf{V}} f(u, v).$$

Observações:

- ▶ A segunda condição é conhecida como lei de Kirchhoff.



Fluxo

Um **FLUXO** em uma rede (G, c, s, t) é uma função $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. **Restrição de capacidade:** para todo $u, v \in \mathbf{V}$ temos que:

$$0 \leq f(u, v) \leq c(u, v).$$

2. **Conservação de fluxo:** para todo $u \in \mathbf{V} \setminus \{s, t\}$ temos que

$$\sum_{v \in \mathbf{V}} f(v, u) = \sum_{v \in \mathbf{V}} f(u, v).$$

Observações:

- ▶ A segunda condição é conhecida como lei de Kirchhoff.
- ▶ Se $(u, v) \notin \mathbf{E}$ então $f(u, v) = 0 = c(u, v)$.



Fluxo

Um **FLUXO** em uma rede (G, c, s, t) é uma função $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. **Restrição de capacidade:** para todo $u, v \in \mathbf{V}$ temos que:

$$0 \leq f(u, v) \leq c(u, v).$$

2. **Conservação de fluxo:** para todo $u \in \mathbf{V} \setminus \{s, t\}$ temos que

$$\sum_{v \in \mathbf{V}} f(v, u) = \sum_{v \in \mathbf{V}} f(u, v).$$

Observações:

- ▶ A segunda condição é conhecida como lei de Kirchhoff.
- ▶ Se $(u, v) \notin \mathbf{E}$ então $f(u, v) = 0 = c(u, v)$.
- ▶ Dizemos que $f(u, v)$ é o **FLUXO QUE PASSA POR (u, v)** .



Valor de fluxo

O **VALOR** de um fluxo f é definido como:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s).$$

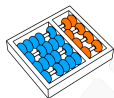


Valor de fluxo

O **VALOR** de um fluxo f é definido como:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s).$$

- ▶ Ou seja, $|f|$ é o fluxo que sai da fonte menos o fluxo que entra.

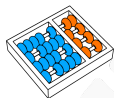


Valor de fluxo

O **VALOR** de um fluxo f é definido como:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s).$$

- ▶ Ou seja, $|f|$ é o fluxo que sai da fonte menos o fluxo que entra.
- ▶ Não confundir $|f|$ com o valor absoluto ou cardinalidade.



Problema do fluxo máximo

Problema

Entrada: Uma rede de fluxo (G, c, s, t) .

Solução: Um fluxo f dessa rede.

Objetivo: **MAXIMIZAR** $|f|$.



Um exemplo

Considere a companhia **Bola Feliz**, que:



Um exemplo

Considere a companhia **Bola Feliz**, que:

- ▶ Produz bolas de futebol em um uma **fábrica** em Guarulhos.



Um exemplo

Considere a companhia **Bola Feliz**, que:

- ▶ Produz bolas de futebol em um uma **fábrica** em Guarulhos.
- ▶ Deseja armazená-las em um **depósito** em Rio Claro.



Um exemplo

Considere a companhia **Bola Feliz**, que:

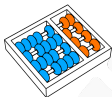
- ▶ Produz bolas de futebol em um uma **fábrica** em Guarulhos.
- ▶ Deseja armazená-las em um **depósito** em Rio Claro.
- ▶ Para transportá-las, ela aluga espaço em caminhões, que transitam pelas cidades:



Um exemplo

Considere a companhia **Bola Feliz**, que:

- ▶ Produz bolas de futebol em um uma **fábrica** em Guarulhos.
- ▶ Deseja armazená-las em um **depósito** em Rio Claro.
- ▶ Para transportá-las, ela aluga espaço em caminhões, que transitam pelas cidades:
Guarulhos (**g**), Campinas (**c**), Jundiaí (**j**), Limeira (**l**),
Piracicaba (**p**), Rio Claro (**r**).



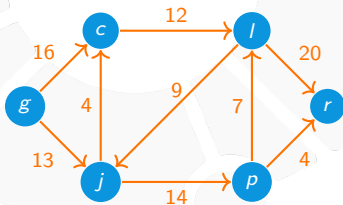
Um exemplo

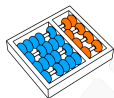
Considere a companhia **Bola Feliz**, que:

- ▶ Produz bolas de futebol em um uma **fábrica** em Guarulhos.
- ▶ Deseja armazená-las em um **depósito** em Rio Claro.

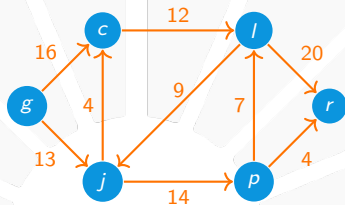
- ▶ Para transportá-las, ela aluga espaço em caminhões, que transitam pelas cidades:

Guarulhos (**g**), Campinas (**c**), Jundiaí (**j**), Limeira (**l**),
Piracicaba (**p**), Rio Claro (**r**).

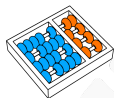




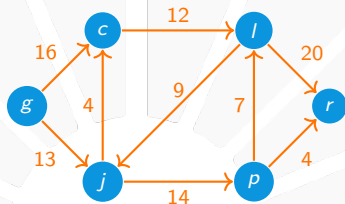
Um exemplo



Os caminhões viajam entre as cidades definidas:

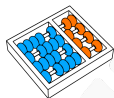


Um exemplo

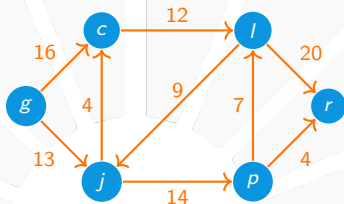


Os caminhões viajam entre as cidades definidas:

- ▶ Cada rota de caminhão corresponde a uma aresta (u,v) .

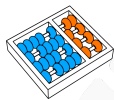


Um exemplo

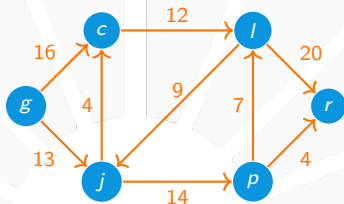


Os caminhões viajam entre as cidades definidas:

- ▶ Cada rota de caminhão corresponde a uma aresta (u,v) .
- ▶ Cada caminhão pode transportar até $c(u,v)$ caixas.



Um exemplo

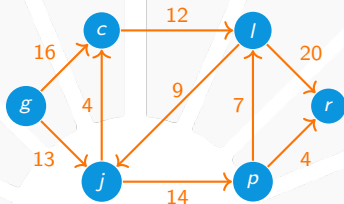


Os caminhões viajam entre as cidades definidas:

- ▶ Cada rota de caminhão corresponde a uma aresta (u,v) .
- ▶ Cada caminhão pode transportar até $c(u,v)$ caixas.
- ▶ A empresa Bola Feliz não pode alterar os trajetos.

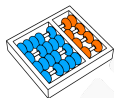


Um exemplo

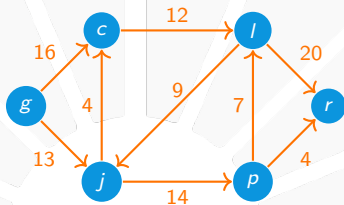


Os caminhões viajam entre as cidades definidas:

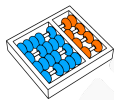
- ▶ Cada rota de caminhão corresponde a uma aresta (u,v) .
- ▶ Cada caminhão pode transportar até $c(u,v)$ caixas.
- ▶ A empresa Bola Feliz não pode alterar os trajetos.
- ▶ Tampouco pode ultrapassar as capacidades desses caminhões.



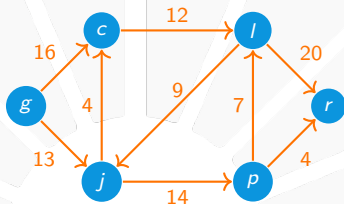
Um exemplo



Quantas caixas a empresa Bola Feliz pode produzir por dia?

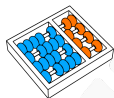


Um exemplo

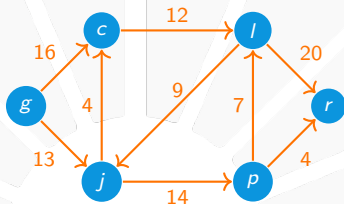


Quantas caixas a empresa Bola Feliz pode produzir por dia?

- ▶ Ela deve produzir p caixas em cada dia.

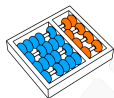


Um exemplo

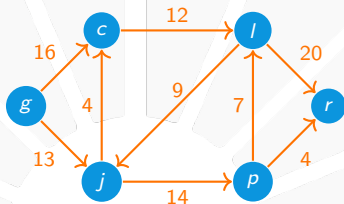


Quantas caixas a empresa Bola Feliz pode produzir por dia?

- ▶ Ela deve produzir p caixas em cada dia.
- ▶ Não se importa com o tempo de viagem.

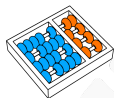


Um exemplo

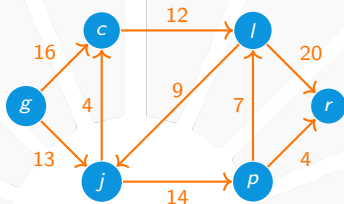


Quantas caixas a empresa Bola Feliz pode produzir por dia?

- ▶ Ela deve produzir p caixas em cada dia.
- ▶ Não se importa com o tempo de viagem.
- ▶ Contudo, deve mandar todas as p caixas ao fim do dia.

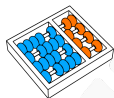


Um exemplo

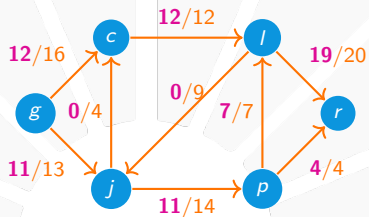


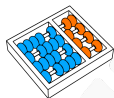
Quantas caixas a empresa Bola Feliz pode produzir por dia?

- ▶ Ela deve produzir p caixas em cada dia.
- ▶ Não se importa com o tempo de viagem.
- ▶ Contudo, deve mandar todas as p caixas ao fim do dia.
- ▶ Qual o **MAIOR** valor de p possível?

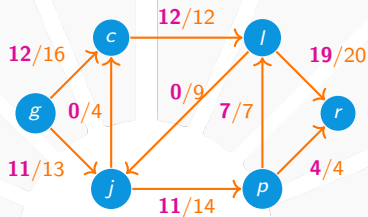


Um exemplo

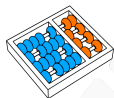




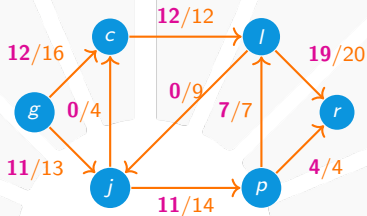
Um exemplo



Uma **SOLUÇÃO ÓTIMA** com valor $p = 23$ está indicada.

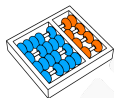


Um exemplo

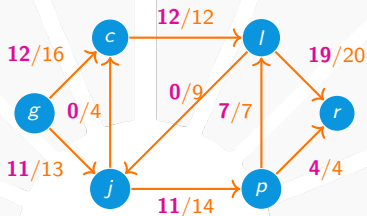


Uma **SOLUÇÃO ÓTIMA** com valor $p = 23$ está indicada.

O problema da empresa Bola Feliz corresponde ao fluxo máximo:



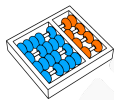
Um exemplo



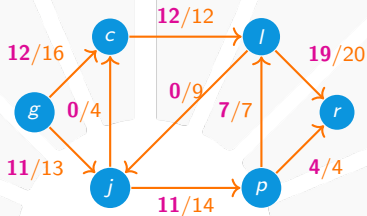
Uma **SOLUÇÃO ÓTIMA** com valor $p = 23$ está indicada.

O problema da empresa Bola Feliz corresponde ao fluxo máximo:

- ▶ Ela deseja um fluxo f (estritamente) inteiro.



Um exemplo



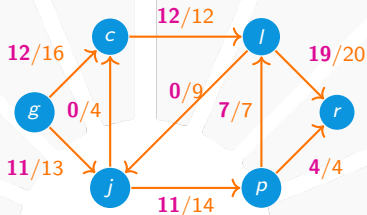
Uma **SOLUÇÃO ÓTIMA** com valor $p = 23$ está indicada.

O problema da empresa Bola Feliz corresponde ao fluxo máximo:

- ▶ Ela deseja um fluxo f (estritamente) inteiro.
- ▶ Ou seja, que $f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ seja inteiro para cada (\mathbf{u}, \mathbf{v}) .



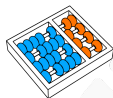
Um exemplo



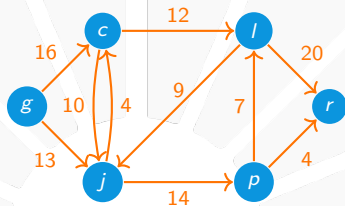
Uma **SOLUÇÃO ÓTIMA** com valor $p = 23$ está indicada.

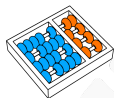
O problema da empresa Bola Feliz corresponde ao fluxo máximo:

- ▶ Ela deseja um fluxo f (estritamente) inteiro.
- ▶ Ou seja, que $f(u,v)$ seja inteiro para cada (u,v) .
- ▶ Veremos que se as capacidades são números inteiros, então existe um **FLUXO MÁXIMO** que é inteiro.

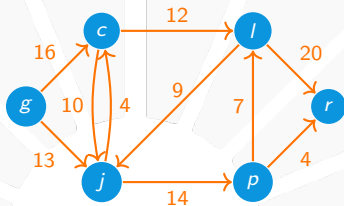


Modelando problemas com arcos antiparalelos





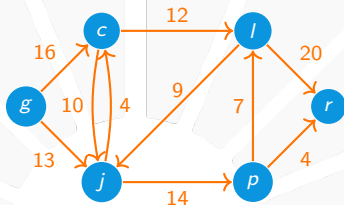
Modelando problemas com arcos antiparalelos



Suponha que a rede de rotas mudou:

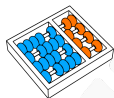


Modelando problemas com arcos antiparalelos

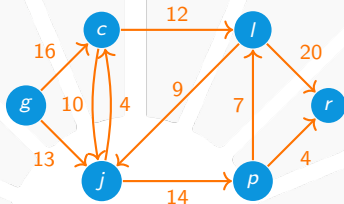


Suponha que a rede de rotas mudou:

- ▶ A companhia de caminhões ofereceu espaço para transportar até 10 caixas de Campinas a Jundiá.



Modelando problemas com arcos antiparalelos

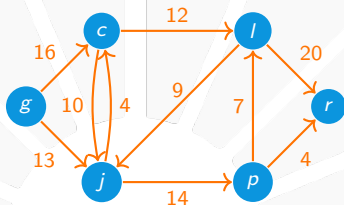


Suponha que a rede de rotas mudou:

- ▶ A companhia de caminhões ofereceu espaço para transportar até 10 caixas de Campinas a Jundiaí.
- ▶ A nova rede possui **ARESTAS ANTIPARALELAS** (c,j) e (j,c) .

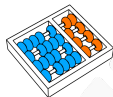


Modelando problemas com arcos antiparalelos

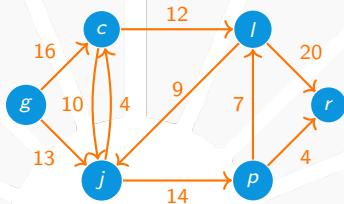


Suponha que a rede de rotas mudou:

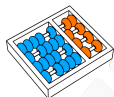
- ▶ A companhia de caminhões ofereceu espaço para transportar até 10 caixas de Campinas a Jundiaí.
- ▶ A nova rede possui **ARESTAS ANTIPARALELAS** (c,j) e (j,c) .
- ▶ Mas presumimos que não existam arestas desse tipo.



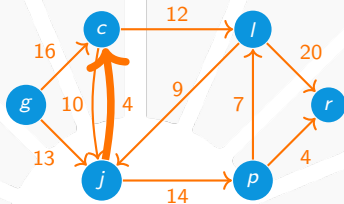
Modelando problemas com arcos antiparalelos



Podemos transformar em uma rede **SEM ARESTAS ANTIPARALELAS**:



Modelando problemas com arcos antiparalelos

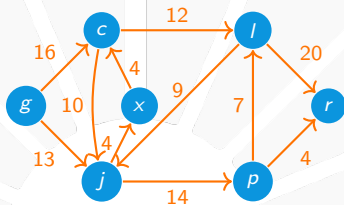


Podemos transformar em uma rede **SEM ARESTAS ANTIPARALELAS**:

- ▶ Escolha uma das arestas antiparalelas, no caso, **(j,c)**.

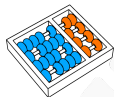


Modelando problemas com arcos antiparalelos

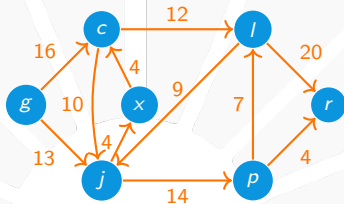


Podemos transformar em uma rede **SEM ARESTAS ANTIPARALELAS**:

- ▶ Escolha uma das arestas antiparalelas, no caso, (j,c) .
- ▶ Substitua-a por duas novas arestas (j,x) e (x,c) .

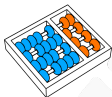


Modelando problemas com arcos antiparalelos

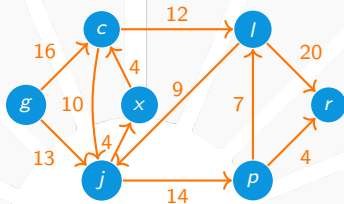


Podemos transformar em uma rede **SEM ARESTAS ANTIPARALELAS**:

- ▶ Escolha uma das arestas antiparalelas, no caso, **(j,c)**.
- ▶ Substitua-a por duas novas arestas **(j,x)** e **(x,c)**.
- ▶ Cada um tem a mesma capacidade da aresta original.



Modelando problemas com arcos antiparalelos



Podemos transformar em uma rede **SEM ARESTAS ANTIPARALELAS**:

- ▶ Escolha uma das arestas antiparalelas, no caso, (j,c) .
- ▶ Substitua-a por duas novas arestas (j,x) e (x,c) .
- ▶ Cada um tem a mesma capacidade da aresta original.
- ▶ A nova rede tem um fluxo máximo equivalente.



Redes com múltiplas fontes e terminais

Podemos considerar redes com **MÚLTIPLAS** fontes e terminais:



Redes com múltiplas fontes e terminais

Podemos considerar redes com **MÚLTIPLAS** fontes e terminais:

- ▶ A empresa Bola Feliz poderia ter m fábricas s_1, \dots, s_m .



Redes com múltiplas fontes e terminais

Podemos considerar redes com **MÚLTIPLAS** fontes e terminais:

- ▶ A empresa Bola Feliz poderia ter m fábricas s_1, \dots, s_m .
- ▶ Também, poderia ter n depósitos t_1, \dots, t_n .



Redes com múltiplas fontes e terminais

Podemos considerar redes com **MÚLTIPLAS** fontes e terminais:

- ▶ A empresa Bola Feliz poderia ter m fábricas s_1, \dots, s_m .
- ▶ Também, poderia ter n depósitos t_1, \dots, t_n .
- ▶ Isso define uma **VARIANTE** do problema do fluxo máximo.



Redes com múltiplas fontes e terminais

Podemos considerar redes com **MÚLTIPLAS** fontes e terminais:

- ▶ A empresa Bola Feliz poderia ter m fábricas s_1, \dots, s_m .
- ▶ Também, poderia ter n depósitos t_1, \dots, t_n .
- ▶ Isso define uma **VARIANTE** do problema do fluxo máximo.

Podemos **REDUZIR** para a versão com fonte e terminal únicos:



Redes com múltiplas fontes e terminais

Podemos considerar redes com **MÚLTIPLAS** fontes e terminais:

- ▶ A empresa Bola Feliz poderia ter m fábricas s_1, \dots, s_m .
- ▶ Também, poderia ter n depósitos t_1, \dots, t_n .
- ▶ Isso define uma **VARIANTE** do problema do fluxo máximo.

Podemos **REDUZIR** para a versão com fonte e terminal únicos:

1. Acrescente uma fonte s e, para cada $i = 1, \dots, m$, adicione uma nova aresta (s, s_i) com capacidade ∞ .



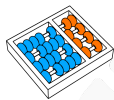
Redes com múltiplas fontes e terminais

Podemos considerar redes com **MÚTIPLAS** fontes e terminais:

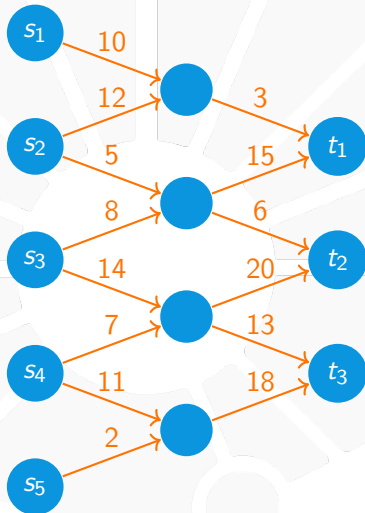
- ▶ A empresa Bola Feliz poderia ter m fábricas s_1, \dots, s_m .
- ▶ Também, poderia ter n depósitos t_1, \dots, t_n .
- ▶ Isso define uma **VARIANTE** do problema do fluxo máximo.

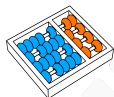
Podemos **REDUZIR** para a versão com fonte e terminal únicos:

1. Acrescente uma fonte s e, para cada $i = 1, \dots, m$, adicione uma nova aresta (s, s_i) com capacidade ∞ .
2. Acrescente um terminal t e, para cada $i = 1, \dots, n$, adicione uma nova aresta (t_i, t) com capacidade ∞ .

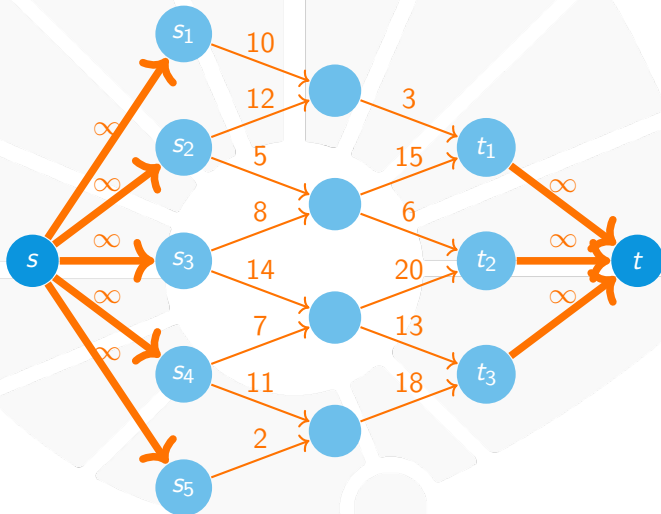


Redes com múltiplas fontes e terminais



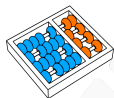


Redes com múltiplas fontes e terminais



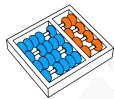


MÉTODO DE FORD-FULKERSON



Solucionando fluxo máximo

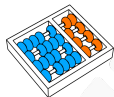
Veremos um **MÉTODO** para resolver o problema do fluxo máximo:



Solucionando fluxo máximo

Veremos um **MÉTODO** para resolver o problema do fluxo máximo:

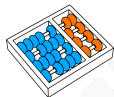
- ▶ Projetado por Ford e Fulkerson independentemente.



Solucionando fluxo máximo

Veremos um **MÉTODO** para resolver o problema do fluxo máximo:

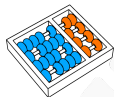
- ▶ Projetado por Ford e Fulkerson independentemente.
- ▶ Não é um **ALGORITMO** completamente especificado.



Solucionando fluxo máximo

Veremos um **MÉTODO** para resolver o problema do fluxo máximo:

- ▶ Projetado por Ford e Fulkerson independentemente.
- ▶ Não é um **ALGORITMO** completamente especificado.
- ▶ Há várias implementações desse método.

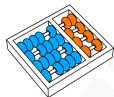


Solucionando fluxo máximo

Veremos um **MÉTODO** para resolver o problema do fluxo máximo:

- ▶ Projetado por Ford e Fulkerson independentemente.
- ▶ Não é um **ALGORITMO** completamente especificado.
- ▶ Há várias implementações desse método.

Baseado em três conceitos fundamentais:



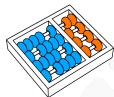
Solucionando fluxo máximo

Veremos um **MÉTODO** para resolver o problema do fluxo máximo:

- ▶ Projetado por Ford e Fulkerson independentemente.
- ▶ Não é um **ALGORITMO** completamente especificado.
- ▶ Há várias implementações desse método.

Baseado em três conceitos fundamentais:

1. Redes residuais.



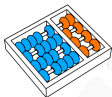
Solucionando fluxo máximo

Veremos um **MÉTODO** para resolver o problema do fluxo máximo:

- ▶ Projetado por Ford e Fulkerson independentemente.
- ▶ Não é um **ALGORITMO** completamente especificado.
- ▶ Há várias implementações desse método.

Baseado em três conceitos fundamentais:

1. Redes residuais.
2. Caminhos aumentadores.



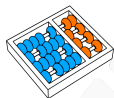
Solucionando fluxo máximo

Veremos um **MÉTODO** para resolver o problema do fluxo máximo:

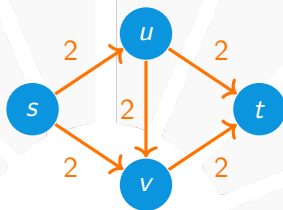
- ▶ Projetado por Ford e Fulkerson independentemente.
- ▶ Não é um **ALGORITMO** completamente especificado.
- ▶ Há várias implementações desse método.

Baseado em três conceitos fundamentais:

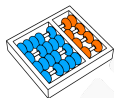
1. Redes residuais.
2. Caminhos aumentadores.
3. Dualidade e cortes.



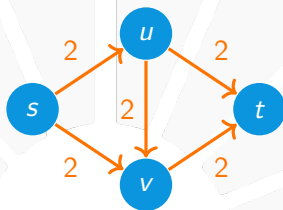
Intuição do método de Ford-Fulkerson



Vamos ilustrar com um exemplo simples:



Intuição do método de Ford-Fulkerson

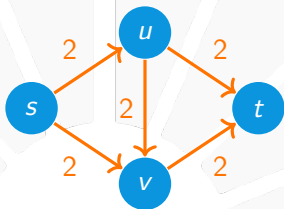


Vamos ilustrar com um exemplo simples:

- ▶ É claro que o valor do fluxo máximo é 4.

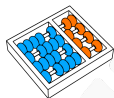


Intuição do método de Ford-Fulkerson

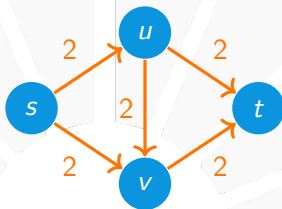


Vamos ilustrar com um exemplo simples:

- ▶ É claro que o valor do fluxo máximo é 4.
- ▶ Para entender o método, vamos esquecer disso.

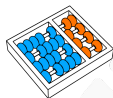


Intuição do método de Ford-Fulkerson

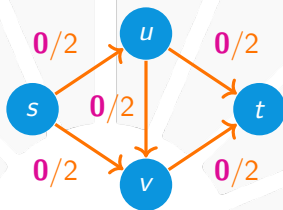


Vamos ilustrar com um exemplo simples:

- ▶ É claro que o valor do fluxo máximo é 4.
- ▶ Para entender o método, vamos esquecer disso.
- ▶ Iremos definir um fluxo sistematicamente.



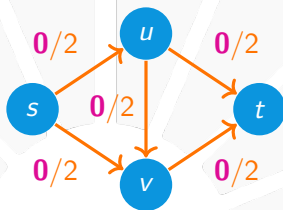
Intuição do método de Ford-Fulkerson



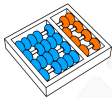
- ▶ Começamos com fluxo nulo em todas as arestas.



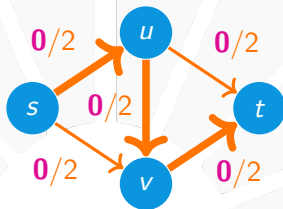
Intuição do método de Ford-Fulkerson



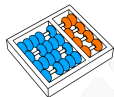
- ▶ Começamos com fluxo nulo em todas as arestas.
- ▶ O valor deste fluxo é zero.



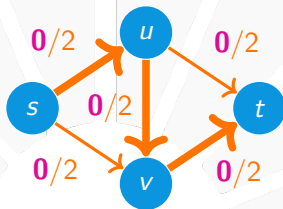
Intuição do método de Ford-Fulkerson



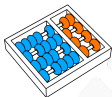
- ▶ Encontramos um **CAMINHO** de s a t .



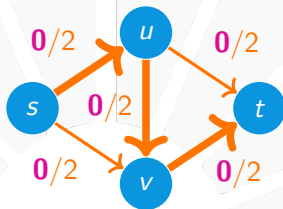
Intuição do método de Ford-Fulkerson



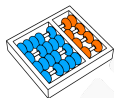
- ▶ Encontramos um **CAMINHO** de s a t .
- ▶ Podemos aumentar o fluxo nas arestas do caminho.



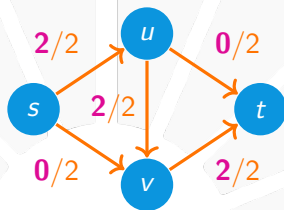
Intuição do método de Ford-Fulkerson



- ▶ Encontramos um **CAMINHO** de s a t .
- ▶ Podemos aumentar o fluxo nas arestas do caminho.
- ▶ Nesse exemplo, podemos aumentar de **2** em cada aresta.



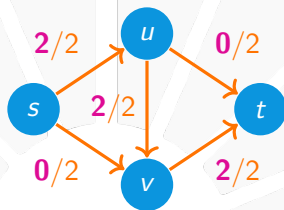
Intuição do método de Ford-Fulkerson



- ▶ Com isso, obtemos um fluxo de valor 2.



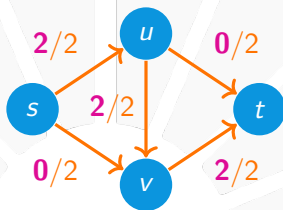
Intuição do método de Ford-Fulkerson



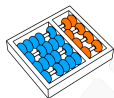
- ▶ Com isso, obtemos um fluxo de valor 2.
- ▶ Mas várias arestas ficaram saturadas.



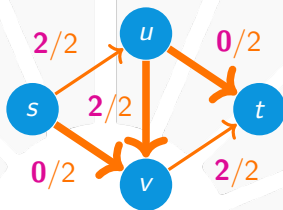
Intuição do método de Ford-Fulkerson



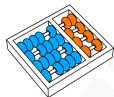
- ▶ Com isso, obtemos um fluxo de valor 2.
- ▶ Mas várias arestas ficaram saturadas.
- ▶ Não há caminho para aumentar o fluxo como antes.



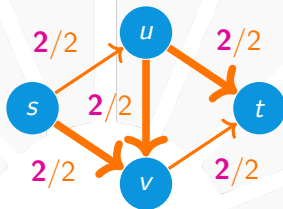
Intuição do método de Ford-Fulkerson



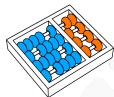
- ▶ Podemos considerar um pseudocaminho.



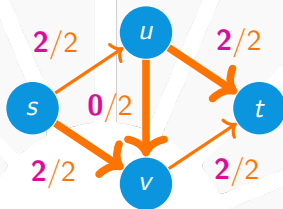
Intuição do método de Ford-Fulkerson



- ▶ Podemos considerar um pseudocaminho.
- ▶ Aumentamos o fluxo nas arestas que **AVANÇAM**.



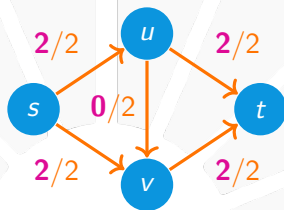
Intuição do método de Ford-Fulkerson



- ▶ Podemos considerar um pseudocaminho.
- ▶ Aumentamos o fluxo nas arestas que **AVANÇAM**.
- ▶ Diminuímos o fluxo nas arestas que **RECUAM**.



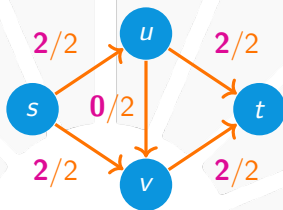
Intuição do método de Ford-Fulkerson



- ▶ Obtemos um fluxo com valor 4.



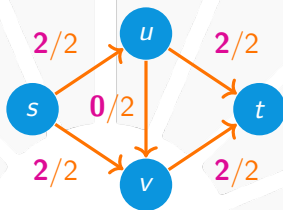
Intuição do método de Ford-Fulkerson



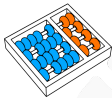
- ▶ Obtemos um fluxo com valor 4.
- ▶ Neste exemplo é fácil ver que ele é máximo.



Intuição do método de Ford-Fulkerson



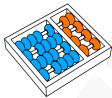
- ▶ Obtemos um fluxo com valor 4.
- ▶ Neste exemplo é fácil ver que ele é máximo.
- ▶ O motivo é que toda aresta que sai de s está saturada.



Aumentar fluxo ao longo de um pseudocaminho



Como obter um novo fluxo válido e maior?

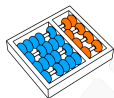


Aumentar fluxo ao longo de um pseudocaminho



Como obter um novo fluxo válido e maior?

- ▶ Aumentamos ou diminuimos o fluxo das arestas por $\alpha > 0$.



Aumentar fluxo ao longo de um pseudocaminho



Como obter um novo fluxo válido e maior?

- ▶ Aumentamos ou diminuimos o fluxo das arestas por $\alpha > 0$.
- ▶ Note que mantemos a conservação de fluxo.

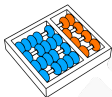


Aumentar fluxo ao longo de um pseudocaminho



Como obter um novo fluxo válido e maior?

- ▶ Aumentamos ou diminuimos o fluxo das arestas por $\alpha > 0$.
- ▶ Note que mantemos a conservação de fluxo.
- ▶ Ademais, o valor do novo fluxo é maior.



Aumentar fluxo ao longo de um pseudocaminho



Como obter um novo fluxo válido e maior?

- ▶ Aumentamos ou diminuimos o fluxo das arestas por $\alpha > 0$.
- ▶ Note que mantemos a conservação de fluxo.
- ▶ Ademais, o valor do novo fluxo é maior.
- ▶ Falta garantir que os fluxos sejam **NÃO NEGATIVOS** e respeitem às **CAPACIDADES**.



Redes residuais

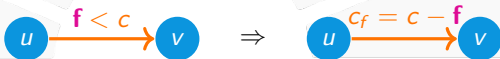
A **REDE RESIDUAL** obtida de (G, c, s, t) a partir de um fluxo f é a rede (G_f, c_f, s, t) com $G_f = (V, E_f)$ em que para cada $(u, v) \in E$:



Redes residuais

A **REDE RESIDUAL** obtida de (G, c, s, t) a partir de um fluxo f é a rede (G_f, c_f, s, t) com $G_f = (V, E_f)$ em que para cada $(u, v) \in E$:

1. Se $f(u, v) < c(u, v)$, então $(u, v) \in E_f$ e $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$.

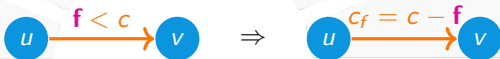




Redes residuais

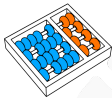
A **REDE RESIDUAL** obtida de (G, c, s, t) a partir de um fluxo f é a rede (G_f, c_f, s, t) com $G_f = (\mathbf{V}, \mathbf{E}_f)$ em que para cada $(u, v) \in \mathbf{E}$:

1. Se $f(u, v) < c(u, v)$, então $(u, v) \in \mathbf{E}_f$ e $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$.

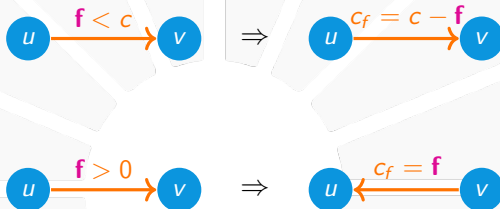


2. Se $f(u, v) > 0$, então $(v, u) \in \mathbf{E}_f$ e $c_f(v, u) = f(u, v)$.



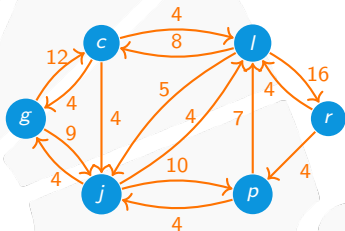
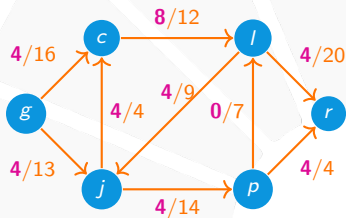
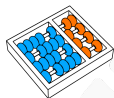


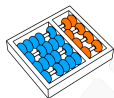
Redes residuais



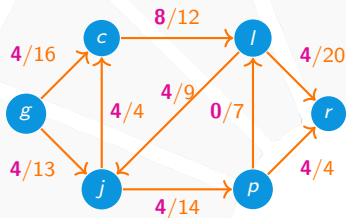
Note que, como não há arestas antiparalelas em G , não há ambiguidade na definição de $c_f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ nem de $c_f(\mathbf{v}, \mathbf{u})$.

Redes residuais: um exemplo

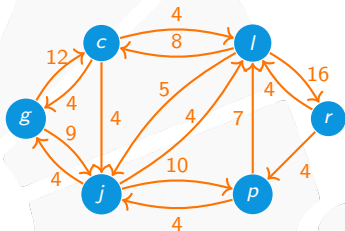




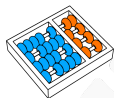
Redes residuais: um exemplo



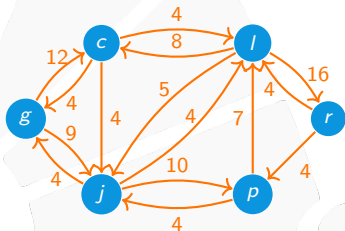
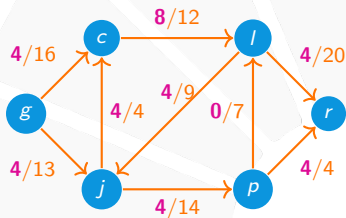
\Rightarrow



Observações:



Redes residuais: um exemplo

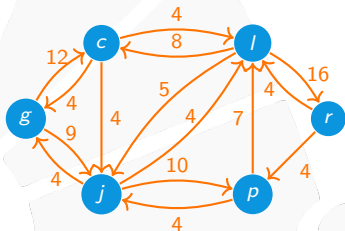
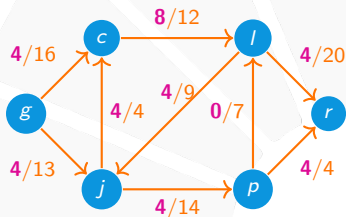


Observações:

- ▶ O número de arestas da rede residual é $|E_f| \leq 2|E|$.

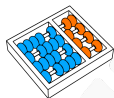


Redes residuais: um exemplo

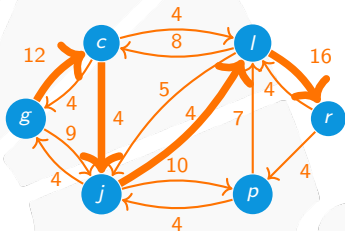
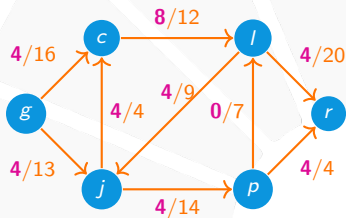


Observações:

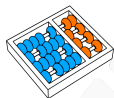
- ▶ O número de arestas da rede residual é $|E_f| \leq 2|E|$.
- ▶ A rede residual pode conter arestas antiparalelas.



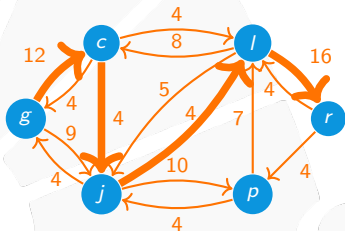
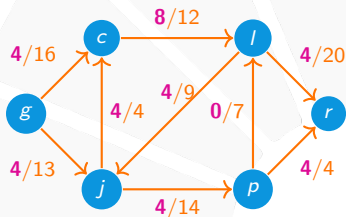
Caminhos aumentadores



Um **CAMINHO AUMENTADOR** é um caminho de s a t na rede residual G_f que:



Caminhos aumentadores

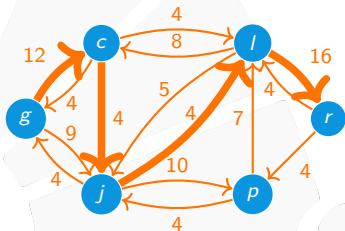
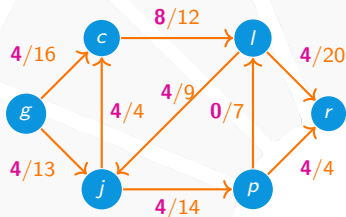


Um **CAMINHO AUMENTADOR** é um caminho de s a t na rede residual G_f que:

- ▶ Corresponde a um pseudocaminho da rede original.

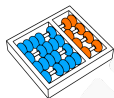


Caminhos aumentadores

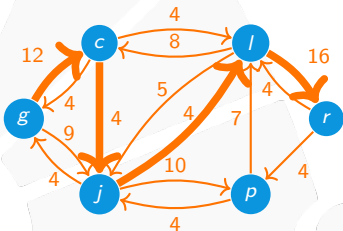
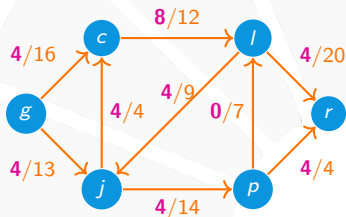


Um **CAMINHO AUMENTADOR** é um caminho de s a t na rede residual G_f que:

- ▶ Corresponde a um pseudocaminho da rede original.
- ▶ Se existir, então podemos aumentar o valor do fluxo.

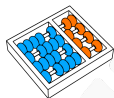


Capacidade do caminho

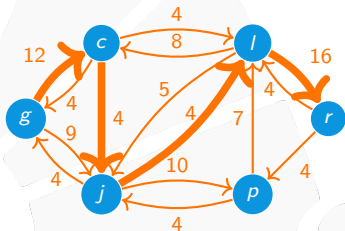
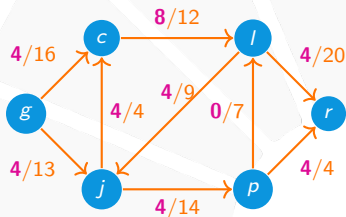


A **CAPACIDADE RESIDUAL** de um caminho aumentador P é:

$$c_f(P) = \min\{c_f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in P\}.$$



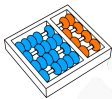
Capacidade do caminho



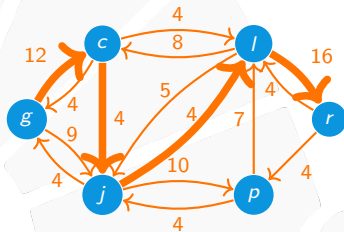
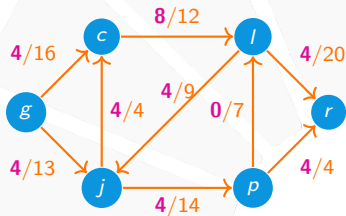
A **CAPACIDADE RESIDUAL** de um caminho aumentador P é:

$$c_f(P) = \min\{c_f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in P\}.$$

Observe que, $c_f(P) > 0$.

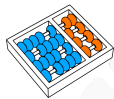


Arestas do caminho

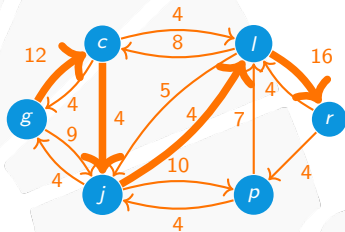
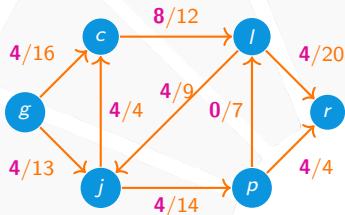


Podemos dividir o conjunto de arestas de P em dois conjuntos:

$$P^+ = \{(u, v) \in P : (u, v) \in E\} \quad \text{e} \quad P^- = \{(u, v) \in P : (v, u) \in E\}$$



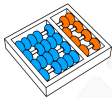
Arestas do caminho



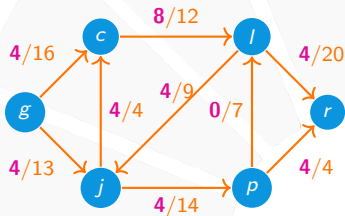
Podemos dividir o conjunto de arestas de P em dois conjuntos:

$$P^+ = \{(u, v) \in P : (u, v) \in E\} \quad \text{e} \quad P^- = \{(u, v) \in P : (v, u) \in E\}$$

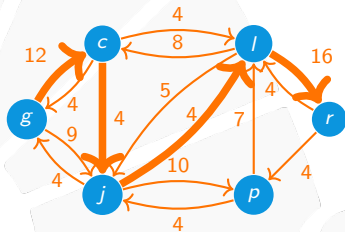
Uma aresta de P :



Arestas do caminho



⇒

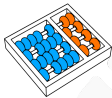


Podemos dividir o conjunto de arestas de P em dois conjuntos:

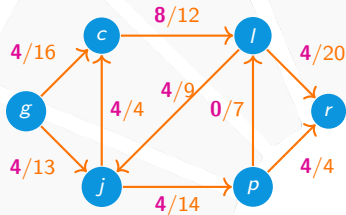
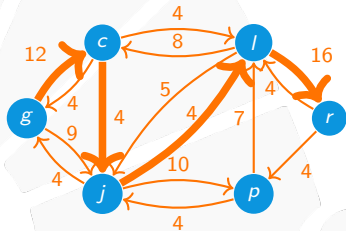
$$P^+ = \{(u, v) \in P : (u, v) \in E\} \quad \text{e} \quad P^- = \{(u, v) \in P : (v, u) \in E\}$$

Uma aresta de P :

- ▶ Pertence a P^+ se também for uma aresta E .



Arestas do caminho


 \Rightarrow


Podemos dividir o conjunto de arestas de P em dois conjuntos:

$$P^+ = \{(u, v) \in P : (u, v) \in E\} \quad \text{e} \quad P^- = \{(u, v) \in P : (v, u) \in E\}$$

Uma aresta de P :

- ▶ Pertence a P^+ se também for uma aresta E .
- ▶ Pertence a P^- se sua reversa é aresta de E .



Aumentando um fluxo

Seja $\alpha = c_f(P)$ a capacidade residual de P .



Aumentando um fluxo

Seja $\alpha = c_f(P)$ a capacidade residual de P .

- ▶ Aumentamos o valor do fluxo f usando P .



Aumentando um fluxo

Seja $\alpha = c_f(P)$ a capacidade residual de P .

- ▶ Aumentamos o valor do fluxo f usando P .
- ▶ Criamos um novo fluxo $f \uparrow P : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$ definido como:



Aumentando um fluxo

Seja $\alpha = c_f(P)$ a capacidade residual de P .

- ▶ Aumentamos o valor do fluxo f usando P .
- ▶ Criamos um novo fluxo $f \uparrow P : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$ definido como:

$$f \uparrow P(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{cases} f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \alpha & \text{se } (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{P}^+, \\ f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \alpha & \text{se } (\mathbf{v}, \mathbf{u}) \in \mathbf{P}^-, \\ f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



Aumentando um fluxo

Seja $\alpha = c_f(P)$ a capacidade residual de P .

- ▶ Aumentamos o valor do fluxo f usando P .
- ▶ Criamos um novo fluxo $f \uparrow P : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$ definido como:

$$f \uparrow P(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{cases} f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \alpha & \text{se } (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{P}^+, \\ f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \alpha & \text{se } (\mathbf{v}, \mathbf{u}) \in \mathbf{P}^-, \\ f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Lema

Seja $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ uma rede e f um fluxo nessa rede. Se P é um caminho em G_f de \mathbf{s} a \mathbf{t} , então $f \uparrow P$ é um fluxo em $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ com valor:

$$|f \uparrow P| = |f| + c_f(P).$$

FLUXO EM REDES

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

Santiago Valdés Ravelo
<https://ic.unicamp.br/~santiago/ravelo@unicamp.br>

10/24

15



UNICAMP

