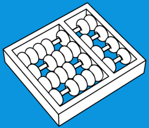
Fluxo em redes

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

15

10/24



Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

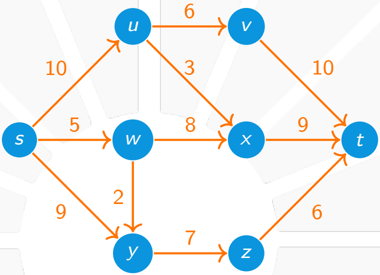
UNICAMP

“Renda-se ao fluxo.”

Mike Gordon

Problemas de fluxo

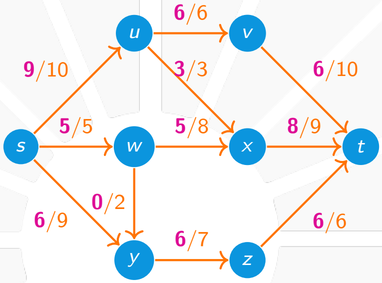
Rede de fluxo



Considere um grafo direcionado:

- Um vértice **FONTE** **s** produz certo material.
- Um vértice **TERMINAL** **t** consome esse material.
- Queremos transportar o material de **s** até **t**.

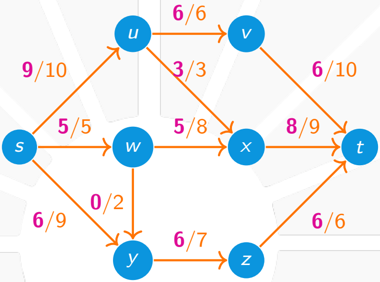
Rede de fluxo



O material escoa através das arestas:

- Cada aresta representa um conduto.
- A taxa com que o material escoa é o **FLUXO** em uma aresta.
- A maior taxa permitida é a **CAPACIDADE** da aresta.

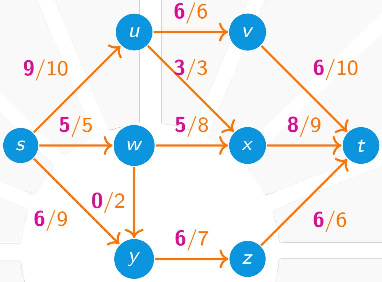
Rede de fluxo



Nenhum material é perdido no caminho de **s** a **t**:

- Os demais vértices são pontos de junção desses condutos.
- A quantidade de material que chega em um vértice é igual à quantidade de material que sai desse vértice.
- Dizemos que há **CONSERVAÇÃO DE FLUXO**.

Problema do fluxo máximo



Redes de fluxos modelam várias situações:

- **VAZÃO DE LÍQUIDO** (água, petróleo) através de canos.
- **DISTRIBUIÇÃO DE PRODUTOS** através de redes de fornecimento.
- **CORRENTE ELÉTRICA** através de fios condutores.
- **INFORMAÇÃO** (bits) através de redes de comunicação.

Formalizando

Uma **REDE DE FLUXO** é uma quádrupla $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ onde:

- $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é um grafo direcionado,
- $c : \mathbf{E} \to \mathbb{R}_+$ representa as capacidade das arestas,
- $\mathbf{s}$ e $\mathbf{t}$ são vértices de G chamados de **FONTE** e **TERMINAL**.

Simplificações

Fazemos as seguintes hipóteses para uma rede $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$:

- G não contém laços.
- Se **(u,v)** $\notin$ **E** então denotamos $c(\mathbf{u,v}) = 0$.
- Todo vértice pertence a algum caminho de **s** a **t**.
- Se a aresta **(u,v)** $\in$ **E**, então a **ARESTA REVERSA** **(v,u)** $\notin$ **E**.

Isso simplifica nosso estudo:

- Veremos depois o que fazer se as hipóteses não valerem.
- O custo será aumentar o tamanho do grafo.

Fluxo

Um **FLUXO** em uma rede $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ é uma função $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. **Restrição de capacidade:** para todo $\mathbf{u,v} \in \mathbf{V}$ temos que:

$$0 \leq f(\mathbf{u,v}) \leq c(\mathbf{u,v}).$$

2. **Conservação de fluxo:** para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{s,t}\}$ temos que

$$\sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} f(\mathbf{v,u}) = \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} f(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Observações:

- A segunda condição é conhecida como lei de Kirchhoff.
- Se $(\mathbf{u,v}) \notin \mathbf{E}$ então $f(\mathbf{u,v}) = 0 = c(\mathbf{u,v})$.
- Dizemos que $f(\mathbf{u,v})$ é o **FLUXO QUE PASSA POR** $(\mathbf{u,v})$.

Valor de fluxo

O **VALOR** de um fluxo f é definido como:

$$|f| = \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} f(\mathbf{s},\mathbf{v}) - \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} f(\mathbf{v},\mathbf{s}).$$

- Ou seja, $|f|$ é o fluxo que sai da fonte menos o fluxo que entra.
- Não confundir $|f|$ com o valor absoluto ou cardinalidade.

Problema do fluxo máximo

Problema

Entrada: *Uma rede de fluxo* $(G, c, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$.

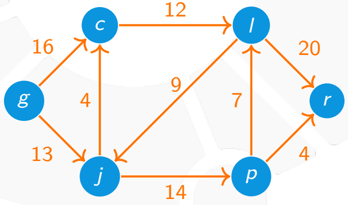
Solução: *Um fluxo* f *dessa rede.*

Objetivo: ***MAXIMIZAR*** $|f|$.

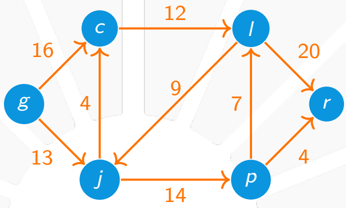
Um exemplo

Considere a companhia **Bola Feliz**, que:

- Produz bolas de futebol em um uma **fábrica** em Guarulhos.
- Deseja armazená-las em um **depósito** em Rio Claro.
- Para transportá-las, ela aluga espaço em caminhões, que transitam pelas cidades:
  Guarulhos (**g**), Campinas (**c**), Jundiaí (**j**), Limeira (**l**), Piracicaba (**p**), Rio Claro (**r**).



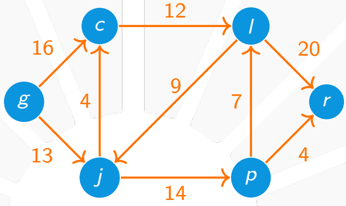
Um exemplo



Os caminhões viajam entre as cidades definidas:

- Cada rota de caminhão corresponde a uma aresta **(u,v)**.
- Cada caminhão pode transportar até c(**u,v**) caixas.
- A empresa Bola Feliz não pode alterar os trajetos.
- Tampouco pode ultrapassar as capacidades desses caminhões.

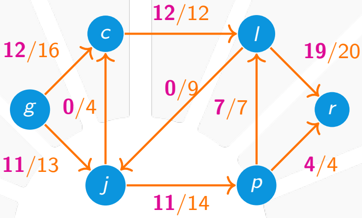
Um exemplo



Quantas caixas a empresa Bola Feliz pode produzir por dia?

- Ela deve produzir p caixas em cada dia.
- Não se importa com o tempo de viagem.
- Contudo, deve mandar todas as p caixas ao fim do dia.
- Qual o **MAIOR** valor de p possível?

Um exemplo

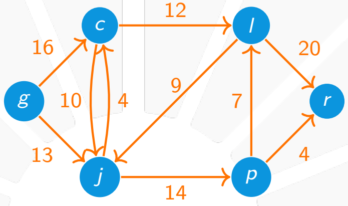


Uma **SOLUÇÃO ÓTIMA** com valor $p = 23$ está indicada.

O problema da empresa Bola Feliz corresponde ao fluxo máximo:

- Ela deseja um fluxo f (estritamente) inteiro.
- Ou seja, que f(**u,v**) seja inteiro para cada **(u,v)**.
- Veremos que se as capacidades são números inteiros, então existe um **FLUXO MÁXIMO** que é inteiro.

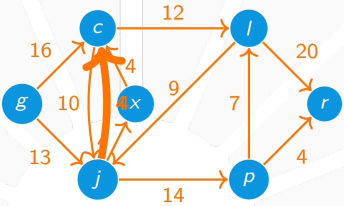
Modelando problemas com arcos antiparalelos



Suponha que a rede de rotas mudou:

- A companhia de caminhões ofereceu espaço para transportar até 10 caixas de Campinas a Jundiaí.
- A nova rede possui **ARESTAS ANTIPARALELAS (c,j)** e **(j,c)**.
- Mas presumimos que não existam arestas desse tipo.

Modelando problemas com arcos antiparalelos



Podemos transformar em uma rede **SEM ARESTAS ANTIPARALELAS**:

- Escolha uma das arestas antiparalelas, no caso, **(j,c)**.
- Substitua-a por duas novas arestas **(j,x)** e **(x,c)**.
- Cada um tem a mesma capacidade da aresta original.
- A nova rede tem um fluxo máximo equivalente.

Redes com múltiplas fontes e terminais

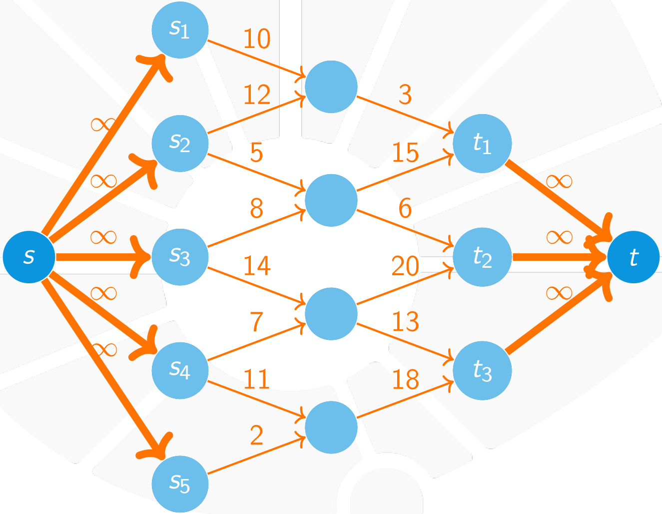
Podemos considerar redes com **MÚLTIPLAS** fontes e terminais:

- A empresa Bola Feliz poderia ter m fábricas $\mathbf{s_1, \ldots, s_m}$.
- Também, poderia ter n depósitos $\mathbf{t_1, \ldots, t_n}$.
- Isso define uma **VARIANTE** do problema do fluxo máximo.

Podemos **REDUZIR** para a versão com fonte e terminal únicos:

1. Acrescente uma fonte $\mathbf{s}$ e, para cada $i = 1, \ldots, m$, adicione uma nova aresta $(\mathbf{s}, \mathbf{s_i})$ com capacidade ∞.
2. Acrescente um terminal $\mathbf{t}$ e, para cada $i = 1, \ldots, n$, adicione uma nova aresta $(\mathbf{t_i}, \mathbf{t})$ com capacidade ∞.

Redes com múltiplas fontes e terminais



Método de Ford-Fulkerson

Solucionando fluxo máximo

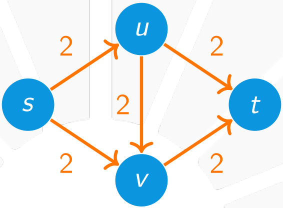
Veremos um **MÉTODO** para resolver o problema do fluxo máximo:

- Projetado por Ford e Fulkerson independentemente.
- Não é um **ALGORITMO** completamente especificado.
- Há várias implementações desse método.

Baseado em três conceitos fundamentais:

1. Redes residuais.
2. Caminhos aumentadores.
3. Dualidade e cortes.

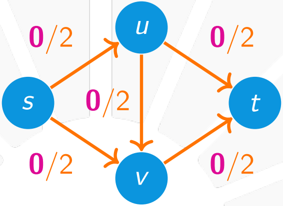
Intuição do método de Ford-Fulkerson



Vamos ilustrar com um exemplo simples:

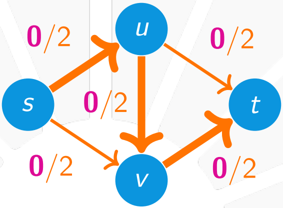
- É claro que o valor do fluxo máximo é 4.
- Para entender o método, vamos esquecer disso.
- Iremos definir um fluxo sistematicamente.

Intuição do método de Ford-Fulkerson



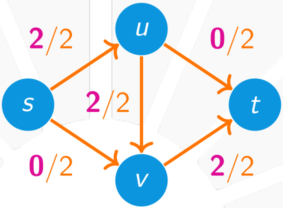
- Começamos com fluxo nulo em todas as arestas.
- O valor deste fluxo é zero.

Intuição do método de Ford-Fulkerson



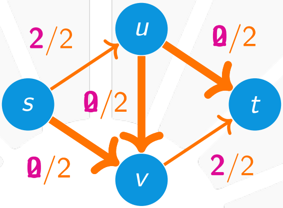
- Encontramos um **CAMINHO** de **s** a **t**.
- Podemos aumentar o fluxo nas arestas do caminho.
- Nesse exemplo, podemos aumentar de **2** em cada aresta.

Intuição do método de Ford-Fulkerson



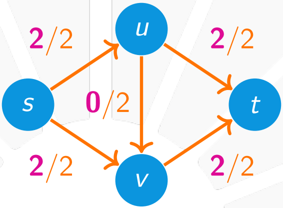
- Com isso, obtemos um fluxo de valor 2.
- Mas várias arestas ficaram saturadas.
- Não há caminho para aumentar o fluxo como antes.

Intuição do método de Ford-Fulkerson



- Podemos considerar um pseudocaminho.
- Aumentamos o fluxo nas arestas que **AVANÇAM**.
- Diminuímos o fluxo nas arestas que **RECUAM**.

Intuição do método de Ford-Fulkerson



- Obtemos um fluxo com valor 4.
- Neste exemplo é fácil ver que ele é máximo.
- O motivo é que toda aresta que sai de **s** está saturada.

Aumentar fluxo ao longo de um pseudocaminho

$$v_1 \xrightarrow[+\alpha]{} v_2 \xleftarrow[-\alpha]{} v_3 \xleftarrow[-\alpha]{} v_4 \xrightarrow[+\alpha]{} v_5 \xleftarrow[-\alpha]{} v_6 \xrightarrow[+\alpha]{} v_7 \xrightarrow[+\alpha]{} v_8$$

Como obter um novo fluxo válido e maior?

- Aumentamos ou diminuímos o fluxo das arestas por $\alpha > 0$.
- Note que mantemos a conservação de fluxo.
- Ademais, o valor do novo fluxo é maior.
- Falta garantir que os fluxos sejam **NÃO NEGATIVOS** e respeitem às **CAPACIDADES**.

Redes residuais

A **REDE RESIDUAL** obtida de $(G, c, \mathbf{s,t})$ a partir de um fluxo f é a rede $(G_f, c_f, \mathbf{s,t})$ com $G_f = (\mathbf{V}, \mathbf{E_f})$ em que para cada $\mathbf{(u,v)} \in \mathbf{E}$:

1. Se $f(\mathbf{u,v}) < c(\mathbf{u,v})$, então $\mathbf{(u,v)} \in \mathbf{E_f}$ e $c_f(\mathbf{u,v}) = c(\mathbf{u,v}) - f(\mathbf{u,v})$.

$$u \xrightarrow{\mathbf{f} < c} v \quad \Rightarrow \quad u \xrightarrow{c_f = c - \mathbf{f}} v$$

2. Se $f(\mathbf{u,v}) > 0$, então $\mathbf{(v,u)} \in \mathbf{E_f}$ e $c_f(\mathbf{v,u}) = f(\mathbf{u,v})$.

$$u \xrightarrow{\mathbf{f} > 0} v \quad \Rightarrow \quad u \xleftarrow{c_f = \mathbf{f}} v$$

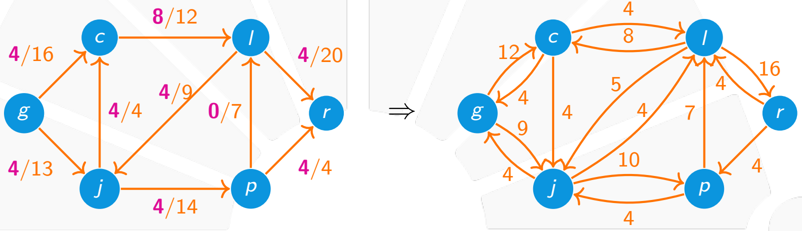
Redes residuais

$$u \xrightarrow{\mathbf{f} < c} v \quad \Rightarrow \quad u \xrightarrow{c_f = c - \mathbf{f}} v$$

$$u \xrightarrow{\mathbf{f} > 0} v \quad \Rightarrow \quad u \xleftarrow{c_f = \mathbf{f}} v$$

Note que, como não há arestas antiparalelas em G, não há ambiguidade na definição de $c_f(\mathbf{u,v})$ nem de $c_f(\mathbf{v,u})$.

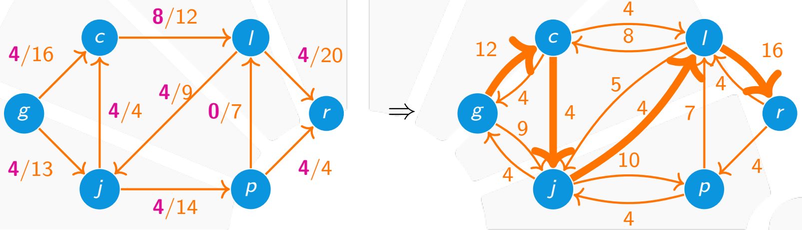
Redes residuais: um exemplo



Observações:

- O número de arestas da rede residual é $|\mathbf{E_f}| \leq 2|\mathbf{E}|$.
- A rede residual pode conter arestas antiparalelas.

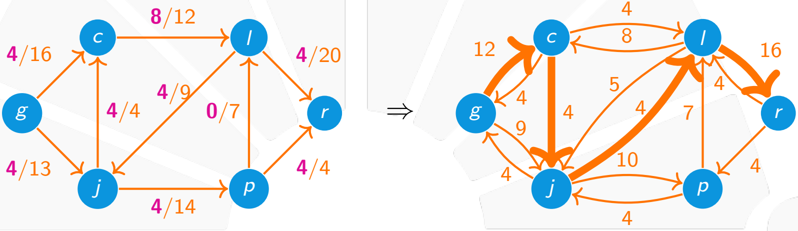
Caminhos aumentadores



Um **CAMINHO AUMENTADOR** é um caminho de **s** a **t** na rede residual G_f que:

- Corresponde a um pseudocaminho da rede original.
- Se existir, então podemos aumentar o valor do fluxo.

Capacidade do caminho

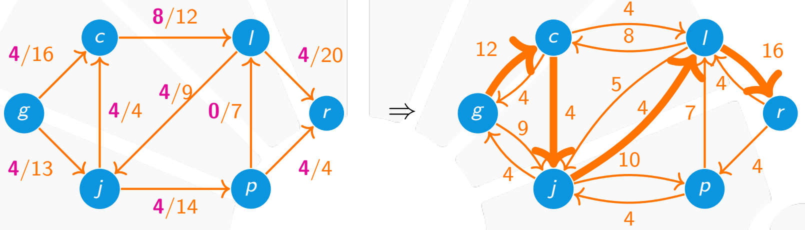


A **CAPACIDADE RESIDUAL** de um caminho aumentador P é:

$$c_f(P) = \min\{c_f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in P\}.$$

Observe que, $c_f(P) > 0$.

Arestas do caminho



Podemos dividir o conjunto de arestas de P em dois conjuntos:

$$\mathbf{P}^{+} = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{P} : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{E}\} \quad \text{e} \quad \mathbf{P}^{-} = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{P} : (\mathbf{v}, \mathbf{u}) \in \mathbf{E}\}$$

Uma aresta de P:

- Pertence a $\mathbf{P}^{+}$ se também for uma aresta $\mathbf{E}$.
- Pertence a $\mathbf{P}^{-}$ se sua reversa é aresta de $\mathbf{E}$.

Aumentando um fluxo

Seja $\alpha = c_f(P)$ a capacidade residual de P.

- Aumentamos o valor do fluxo f usando P.
- Criamos um novo fluxo $f \uparrow P : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}_+$ definido como:

$$f \uparrow P(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \begin{cases} f(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \alpha & \text{se } (\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathbf{P}^+, \\ f(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \alpha & \text{se } (\mathbf{v},\mathbf{u}) \in \mathbf{P}^-, \\ f(\mathbf{u},\mathbf{v}) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Lema

Seja $(G, c, \mathbf{s},\mathbf{t})$ uma rede e f um fluxo nessa rede. Se P é um caminho em G_f de $\mathbf{s}$ a $\mathbf{t}$, então $f \uparrow P$ é um fluxo em $(G, c, \mathbf{s},\mathbf{t})$ com valor:

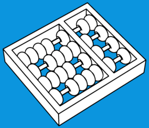
$$|f \uparrow P| = |f| + c_f(P).$$

Fluxo em redes

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

10/24

15



Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

UNICAMP