

FORD-FULKERSON

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

Santiago Valdés Ravelo
<https://ic.unicamp.br/~santiago/ravelo@unicamp.br>

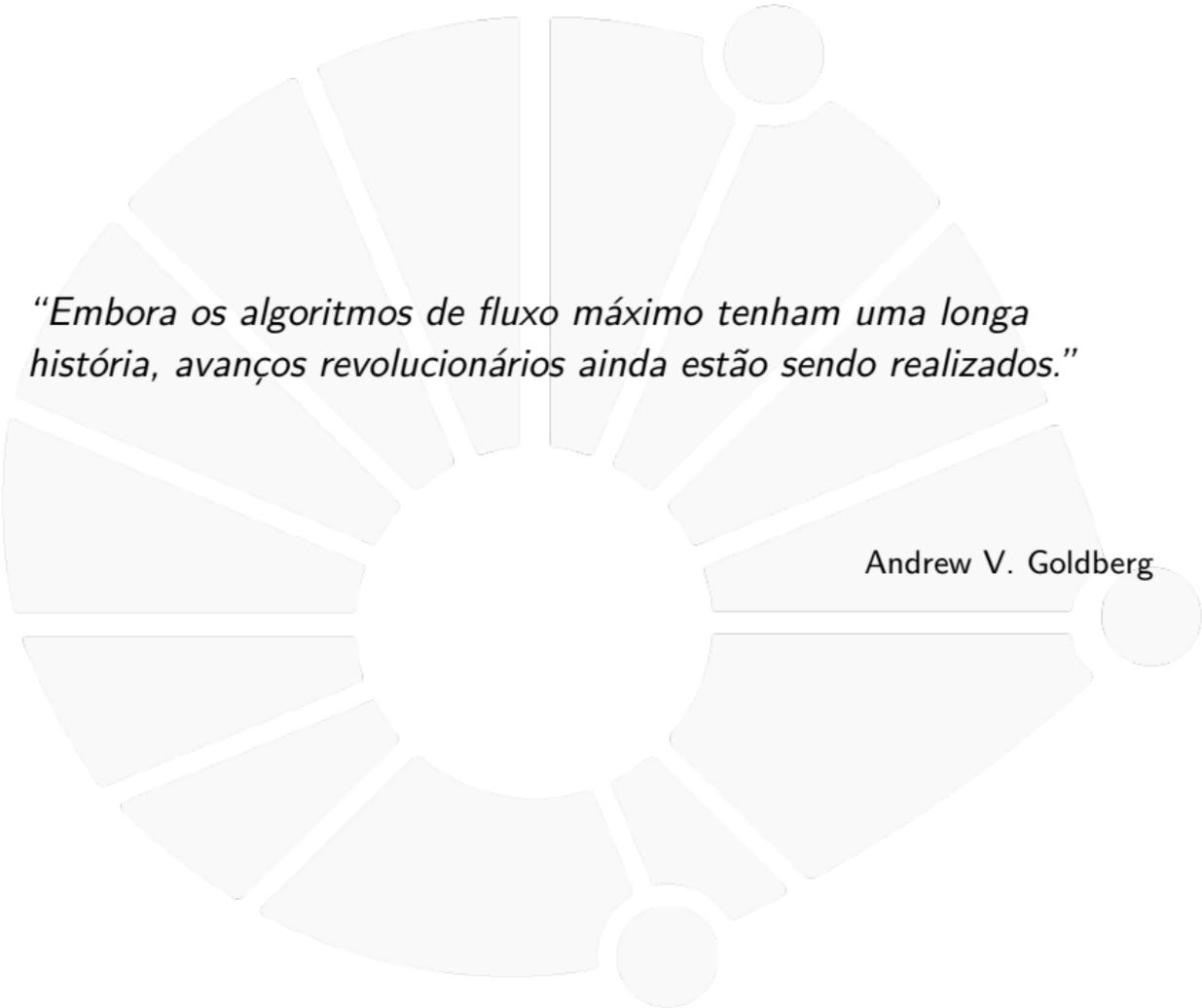
10/24

16



UNICAMP



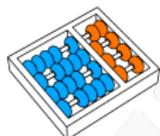


“Embora os algoritmos de fluxo máximo tenham uma longa história, avanços revolucionários ainda estão sendo realizados.”

Andrew V. Goldberg

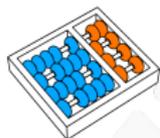


MÉTODO DE FORD-FULKERSON



Solucionando fluxo máximo

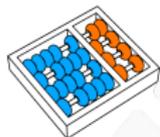
Veremos um **MÉTODO** para resolver o problema do fluxo máximo:



Solucionando fluxo máximo

Veremos um **MÉTODO** para resolver o problema do fluxo máximo:

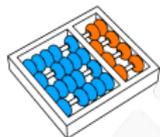
- ▶ Projetado por Ford e Fulkerson independentemente.



Solucionando fluxo máximo

Veremos um **MÉTODO** para resolver o problema do fluxo máximo:

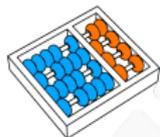
- ▶ Projetado por Ford e Fulkerson independentemente.
- ▶ Não é um **ALGORITMO** completamente especificado.



Solucionando fluxo máximo

Veremos um **MÉTODO** para resolver o problema do fluxo máximo:

- ▶ Projetado por Ford e Fulkerson independentemente.
- ▶ Não é um **ALGORITMO** completamente especificado.
- ▶ Há várias implementações desse método.

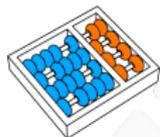


Solucionando fluxo máximo

Veremos um **MÉTODO** para resolver o problema do fluxo máximo:

- ▶ Projetado por Ford e Fulkerson independentemente.
- ▶ Não é um **ALGORITMO** completamente especificado.
- ▶ Há várias implementações desse método.

Baseado em três conceitos fundamentais:



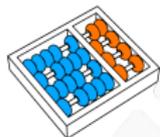
Solucionando fluxo máximo

Veremos um **MÉTODO** para resolver o problema do fluxo máximo:

- ▶ Projetado por Ford e Fulkerson independentemente.
- ▶ Não é um **ALGORITMO** completamente especificado.
- ▶ Há várias implementações desse método.

Baseado em três conceitos fundamentais:

1. Redes residuais.



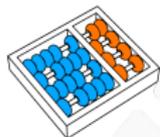
Solucionando fluxo máximo

Veremos um **MÉTODO** para resolver o problema do fluxo máximo:

- ▶ Projetado por Ford e Fulkerson independentemente.
- ▶ Não é um **ALGORITMO** completamente especificado.
- ▶ Há várias implementações desse método.

Baseado em três conceitos fundamentais:

1. Redes residuais.
2. Caminhos aumentadores.



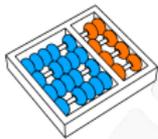
Solucionando fluxo máximo

Veremos um **MÉTODO** para resolver o problema do fluxo máximo:

- ▶ Projetado por Ford e Fulkerson independentemente.
- ▶ Não é um **ALGORITMO** completamente especificado.
- ▶ Há várias implementações desse método.

Baseado em três conceitos fundamentais:

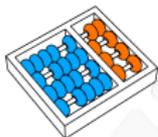
1. Redes residuais.
2. Caminhos aumentadores.
3. Dualidade e cortes.



Aumentar fluxo ao longo de um pseudocaminho



Como obter um novo fluxo válido e maior?

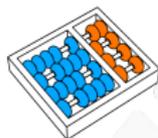


Aumentar fluxo ao longo de um pseudocaminho



Como obter um novo fluxo válido e maior?

- ▶ Aumentamos ou diminuimos o fluxo das arestas por $\alpha > 0$.

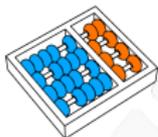


Aumentar fluxo ao longo de um pseudocaminho



Como obter um novo fluxo válido e maior?

- ▶ Aumentamos ou diminuimos o fluxo das arestas por $\alpha > 0$.
- ▶ Note que mantemos a conservação de fluxo.

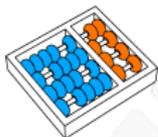


Aumentar fluxo ao longo de um pseudocaminho



Como obter um novo fluxo válido e maior?

- ▶ Aumentamos ou diminuimos o fluxo das arestas por $\alpha > 0$.
- ▶ Note que mantemos a conservação de fluxo.
- ▶ Ademais, o valor do novo fluxo é maior.

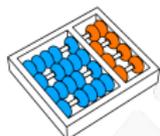


Aumentar fluxo ao longo de um pseudocaminho



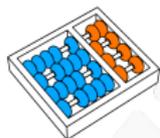
Como obter um novo fluxo válido e maior?

- ▶ Aumentamos ou diminuimos o fluxo das arestas por $\alpha > 0$.
- ▶ Note que mantemos a conservação de fluxo.
- ▶ Ademais, o valor do novo fluxo é maior.
- ▶ Falta garantir que os fluxos sejam **NÃO NEGATIVOS** e respeitem às **CAPACIDADES**.



Redes residuais

A **REDE RESIDUAL** obtida de (G, c, s, t) a partir de um fluxo f é a rede (G_f, c_f, s, t) com $G_f = (\mathbf{V}, \mathbf{E}_f)$ em que para cada $(u, v) \in \mathbf{E}$:



Redes residuais

A **REDE RESIDUAL** obtida de (G, c, s, t) a partir de um fluxo f é a rede (G_f, c_f, s, t) com $G_f = (V, E_f)$ em que para cada $(u, v) \in E$:

1. Se $f(u, v) < c(u, v)$, então $(u, v) \in E_f$ e $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$.





Redes residuais

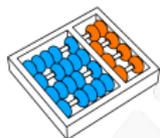
A **REDE RESIDUAL** obtida de (G, c, s, t) a partir de um fluxo f é a rede (G_f, c_f, s, t) com $G_f = (V, E_f)$ em que para cada $(u, v) \in E$:

1. Se $f(u, v) < c(u, v)$, então $(u, v) \in E_f$ e $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$.



2. Se $f(u, v) > 0$, então $(v, u) \in E_f$ e $c_f(v, u) = f(u, v)$.



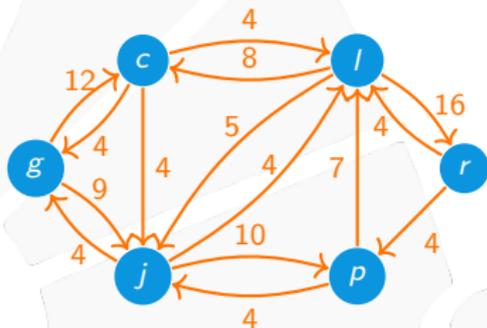
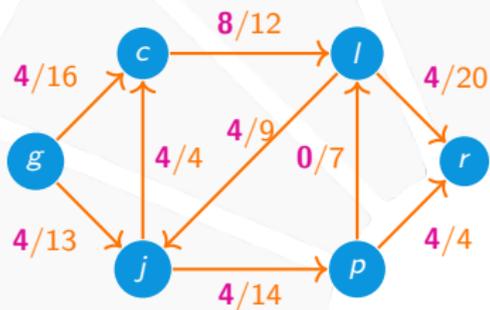
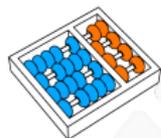


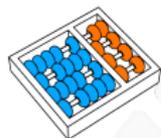
Redes residuais



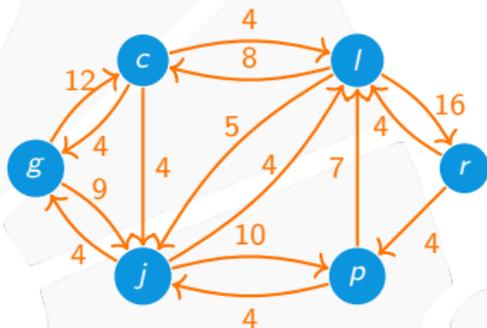
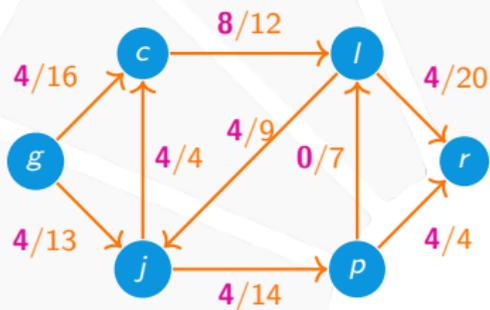
Note que, como não há arestas antiparalelas em G , não há ambiguidade na definição de $c_f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ nem de $c_f(\mathbf{v}, \mathbf{u})$.

Redes residuais: um exemplo

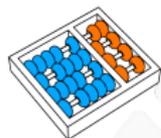




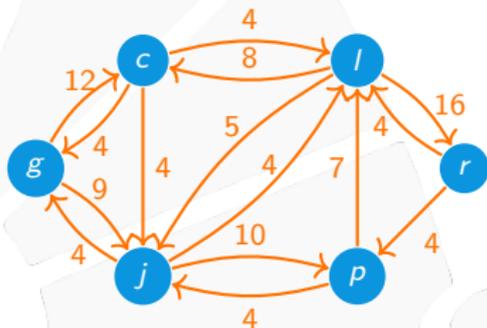
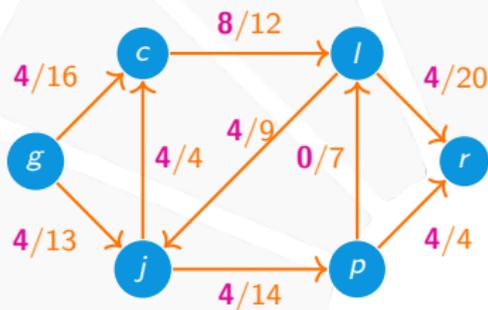
Redes residuais: um exemplo



Observações:



Redes residuais: um exemplo

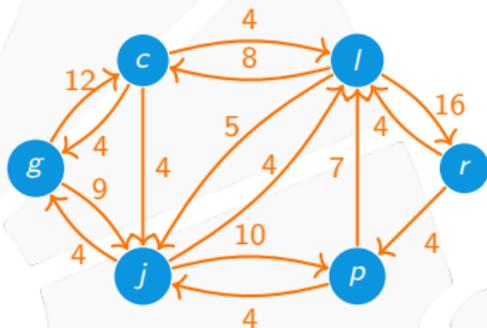
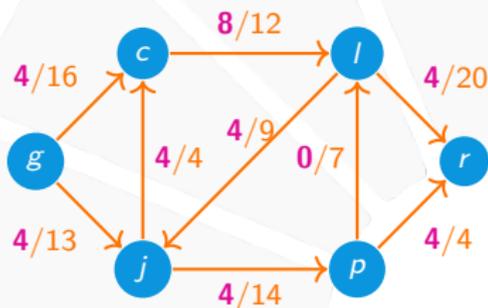


Observações:

- ▶ O número de arestas da rede residual é $|E_f| \leq 2|E|$.



Redes residuais: um exemplo

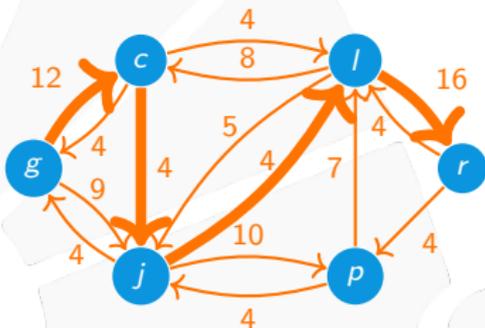
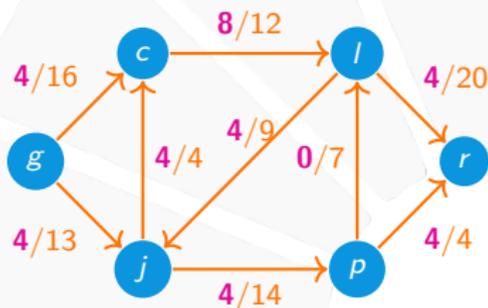


Observações:

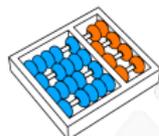
- ▶ O número de arestas da rede residual é $|E_f| \leq 2|E|$.
- ▶ A rede residual pode conter arestas antiparalelas.



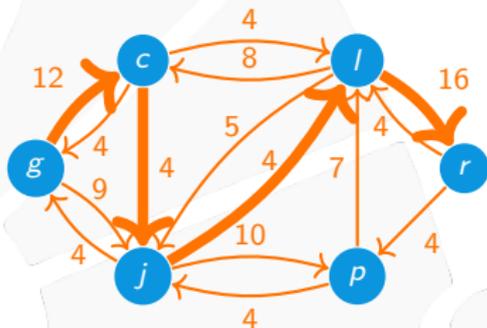
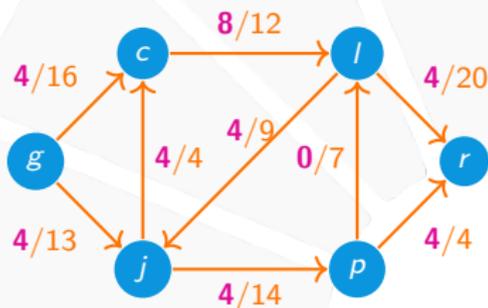
Caminhos aumentadores



Um **CAMINHO AUMENTADOR** é um caminho de s a t na rede residual G_f que:

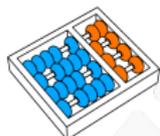


Caminhos aumentadores

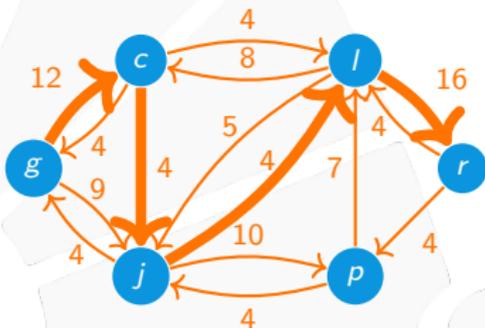
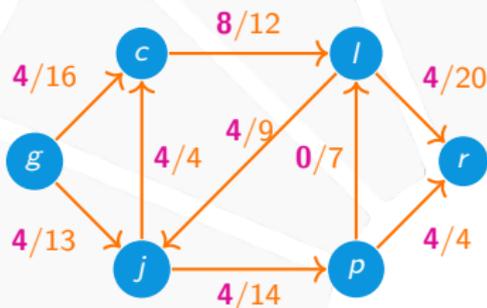


Um **CAMINHO AUMENTADOR** é um caminho de s a t na rede residual G_f que:

- ▶ Corresponde a um pseudocaminho da rede original.



Caminhos aumentadores

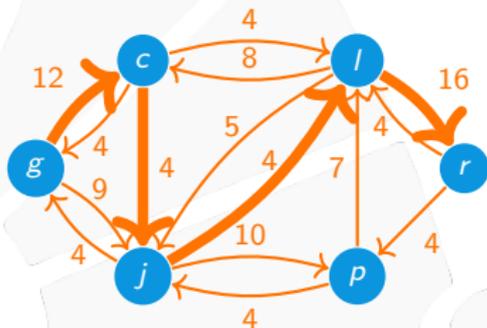
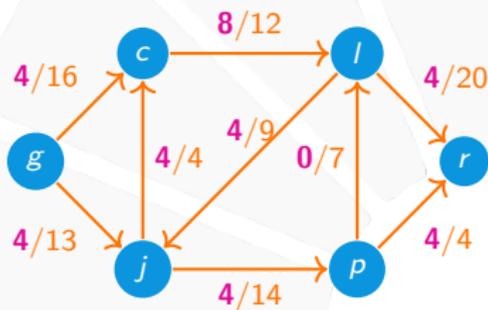


Um **CAMINHO AUMENTADOR** é um caminho de s a t na rede residual G_f que:

- ▶ Corresponde a um pseudocaminho da rede original.
- ▶ Se existir, então podemos aumentar o valor do fluxo.

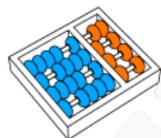


Capacidade do caminho

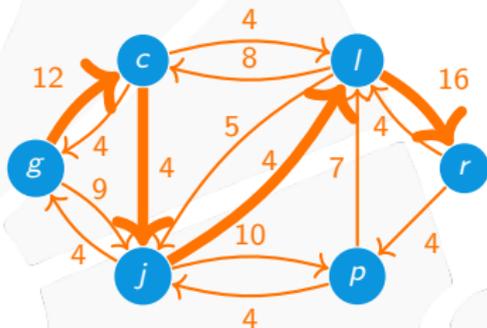
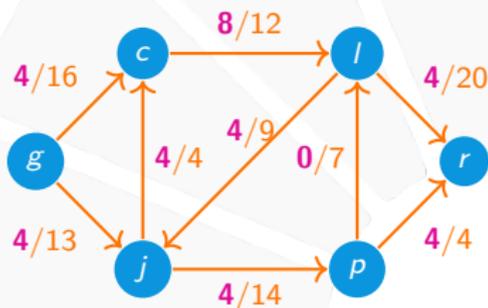


A **CAPACIDADE RESIDUAL** de um caminho aumentador P é:

$$c_f(P) = \min\{c_f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in P\}.$$



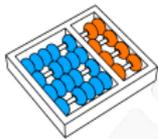
Capacidade do caminho



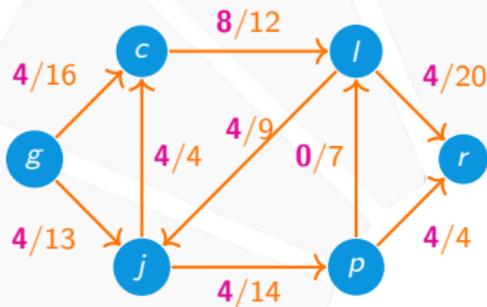
A **CAPACIDADE RESIDUAL** de um caminho aumentador P é:

$$c_f(P) = \min\{c_f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in P\}.$$

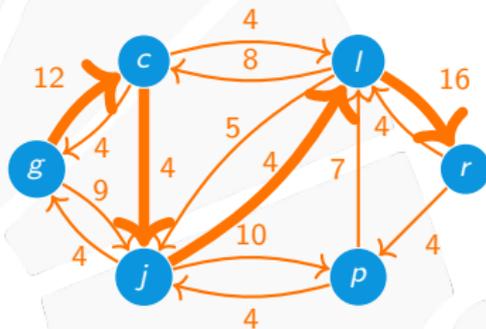
Observe que, $c_f(P) > 0$.



Arestas do caminho

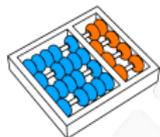


⇒

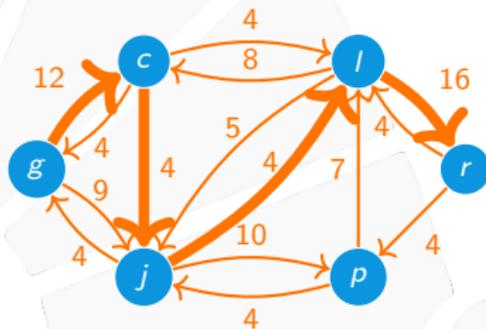
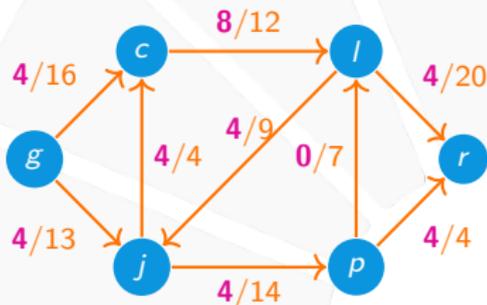


Podemos dividir o conjunto de arestas de P em dois conjuntos:

$$P^+ = \{(u, v) \in P : (u, v) \in E\} \quad \text{e} \quad P^- = \{(u, v) \in P : (v, u) \in E\}$$



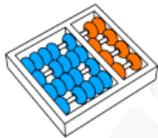
Arestas do caminho



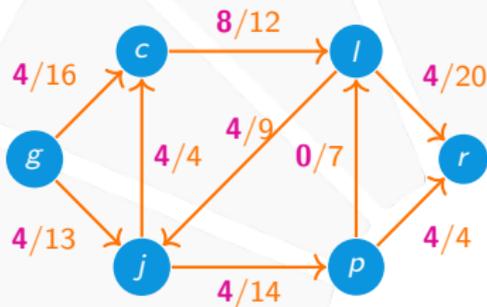
Podemos dividir o conjunto de arestas de P em dois conjuntos:

$$P^+ = \{(u, v) \in P : (u, v) \in E\} \quad \text{e} \quad P^- = \{(u, v) \in P : (v, u) \in E\}$$

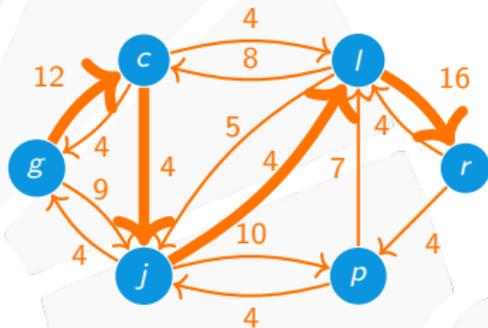
Uma aresta de P :



Arestas do caminho



⇒

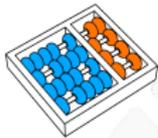


Podemos dividir o conjunto de arestas de P em dois conjuntos:

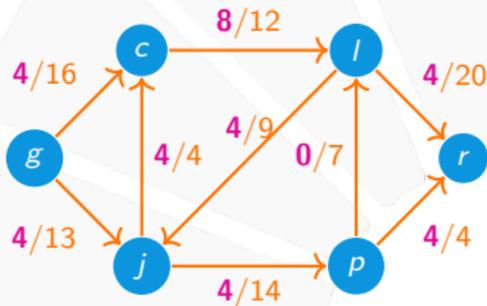
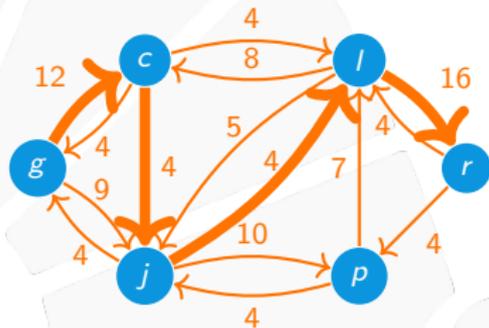
$$P^+ = \{(u, v) \in P : (u, v) \in E\} \quad \text{e} \quad P^- = \{(u, v) \in P : (v, u) \in E\}$$

Uma aresta de P :

- ▶ Pertence a P^+ se também for uma aresta E .



Arestas do caminho

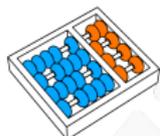

 \Rightarrow


Podemos dividir o conjunto de arestas de P em dois conjuntos:

$$P^+ = \{(u, v) \in P : (u, v) \in E\} \quad \text{e} \quad P^- = \{(u, v) \in P : (v, u) \in E\}$$

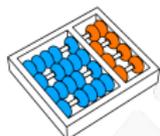
Uma aresta de P :

- ▶ Pertence a P^+ se também for uma aresta E .
- ▶ Pertence a P^- se sua reversa é aresta de E .



Aumentando um fluxo

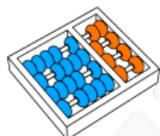
Seja $\alpha = c_f(P)$ a capacidade residual de P .



Aumentando um fluxo

Seja $\alpha = c_f(P)$ a capacidade residual de P .

- ▶ Aumentamos o valor do fluxo f usando P .



Aumentando um fluxo

Seja $\alpha = c_f(P)$ a capacidade residual de P .

- ▶ Aumentamos o valor do fluxo f usando P .
- ▶ Criamos um novo fluxo $f \uparrow P : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$ definido como:

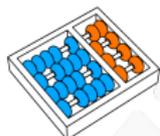


Aumentando um fluxo

Seja $\alpha = c_f(P)$ a capacidade residual de P .

- ▶ Aumentamos o valor do fluxo f usando P .
- ▶ Criamos um novo fluxo $f \uparrow P : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$ definido como:

$$f \uparrow P(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{cases} f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \alpha & \text{se } (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{P}^+, \\ f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \alpha & \text{se } (\mathbf{v}, \mathbf{u}) \in \mathbf{P}^-, \\ f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



Aumentando um fluxo

Seja $\alpha = c_f(P)$ a capacidade residual de P .

- ▶ Aumentamos o valor do fluxo f usando P .
- ▶ Criamos um novo fluxo $f \uparrow P : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$ definido como:

$$f \uparrow P(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{cases} f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \alpha & \text{se } (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{P}^+, \\ f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \alpha & \text{se } (\mathbf{v}, \mathbf{u}) \in \mathbf{P}^-, \\ f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

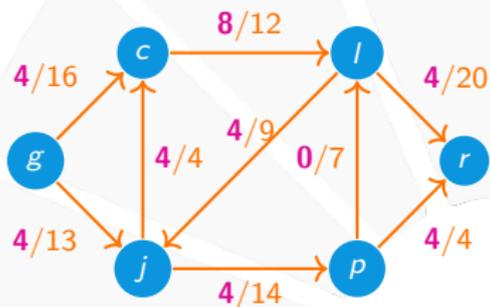
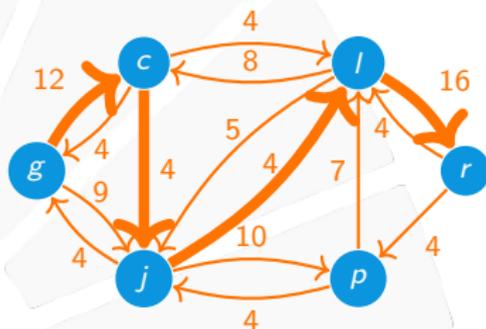
Lema

Seja $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ uma rede e f um fluxo nessa rede. Se P é um caminho em G_f , então $f \uparrow P$ é um fluxo em $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ com valor:

$$|f \uparrow P| = |f| + c_f(P).$$

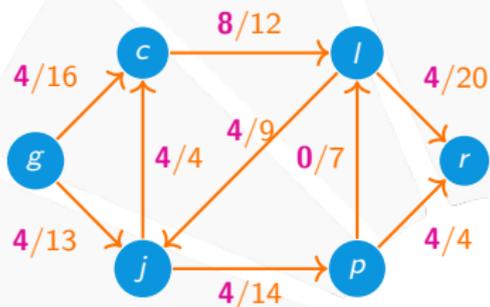


Caminhos aumentadores

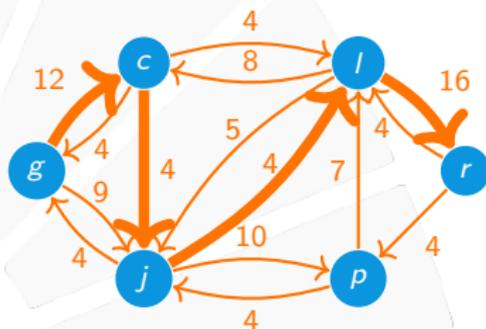

 \Rightarrow




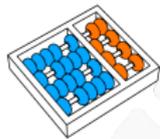
Caminhos aumentadores



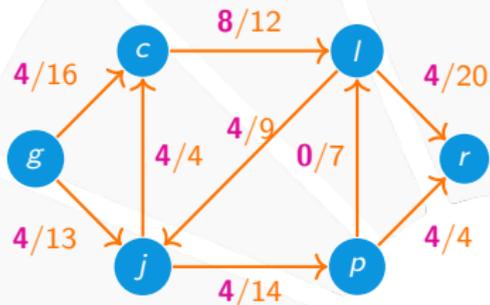
\Rightarrow



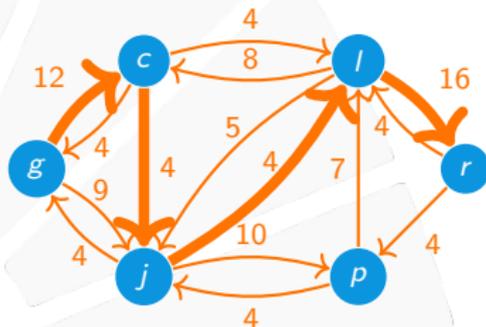
A capacidade residual do caminho aumentador é 4.



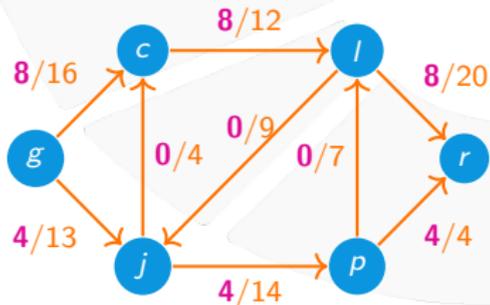
Caminhos aumentadores



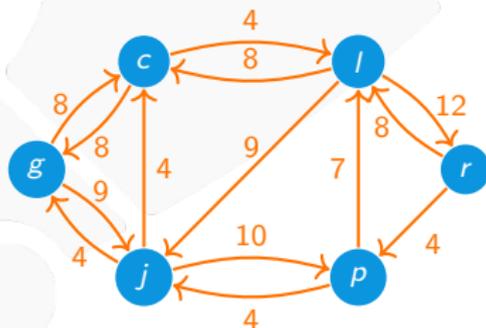
\Rightarrow

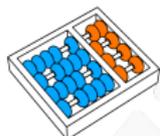


A capacidade residual do caminho aumentador é 4.



\Rightarrow

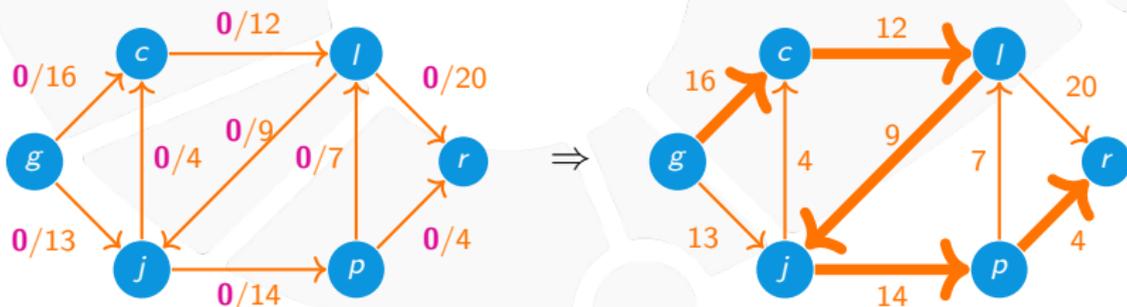


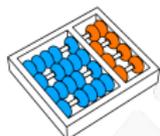


Método de Ford-Fulkerson

Algoritmo: FORD-FULKERSON(G, c, s, t)

- 1 $f \leftarrow 0$
 - 2 **enquanto** existe um caminho aumentador P em G_f
 - 3 $f \leftarrow f \uparrow P$ $\triangleright G_f$ é atualizado também
 - 4 **devolva** f
-

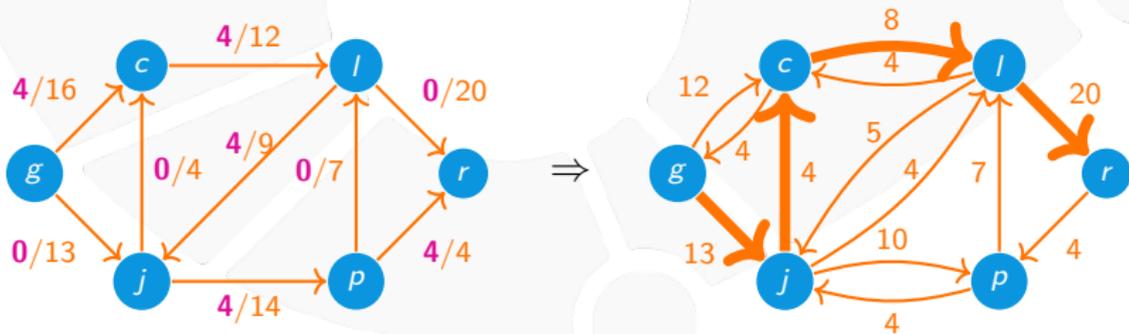


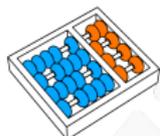


Método de Ford-Fulkerson

Algoritmo: FORD-FULKERSON(G, c, s, t)

- 1 $f \leftarrow 0$
 - 2 **enquanto** existe um caminho aumentador P em G_f
 - 3 $f \leftarrow f \uparrow P$ $\triangleright G_f$ é atualizado também
 - 4 **devolva** f
-

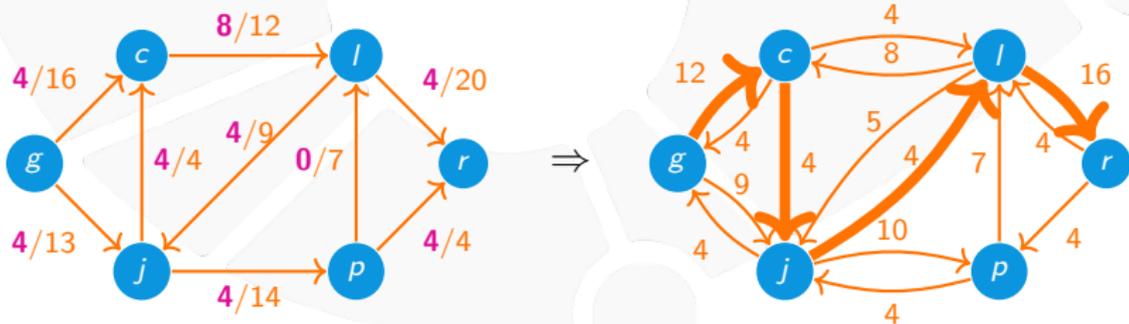


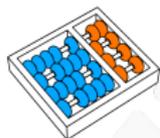


Método de Ford-Fulkerson

Algoritmo: FORD-FULKERSON(G, c, s, t)

- 1 $f \leftarrow 0$
 - 2 **enquanto** existe um caminho aumentador P em G_f
 - 3 $f \leftarrow f \uparrow P$ $\triangleright G_f$ é atualizado também
 - 4 **devolva** f
-

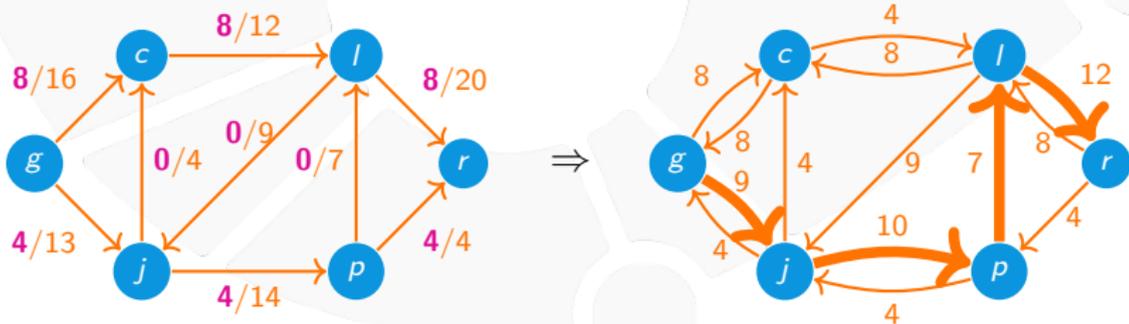


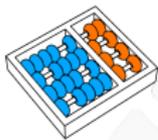


Método de Ford-Fulkerson

Algoritmo: FORD-FULKERSON(G, c, s, t)

- 1 $f \leftarrow 0$
 - 2 **enquanto** existe um caminho aumentador P em G_f
 - 3 $f \leftarrow f \uparrow P$ $\triangleright G_f$ é atualizado também
 - 4 **devolva** f
-

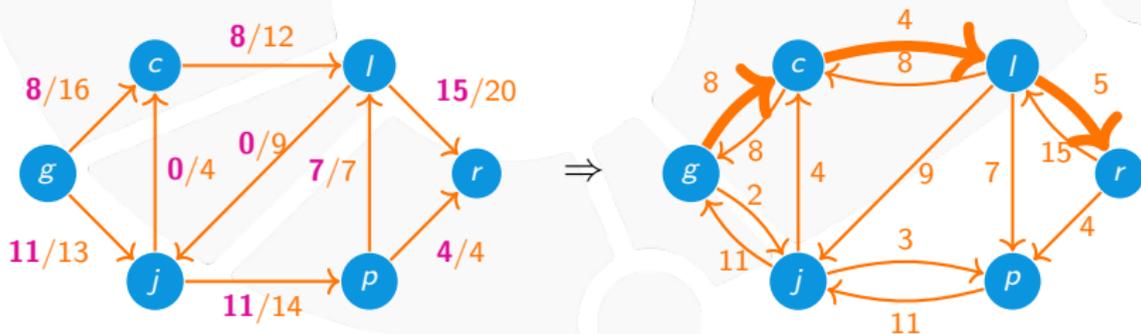


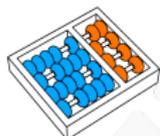


Método de Ford-Fulkerson

Algoritmo: FORD-FULKERSON(G, c, s, t)

- 1 $f \leftarrow 0$
 - 2 **enquanto** existe um caminho aumentador P em G_f
 - 3 $f \leftarrow f \uparrow P$ $\triangleright G_f$ é atualizado também
 - 4 **devolva** f
-

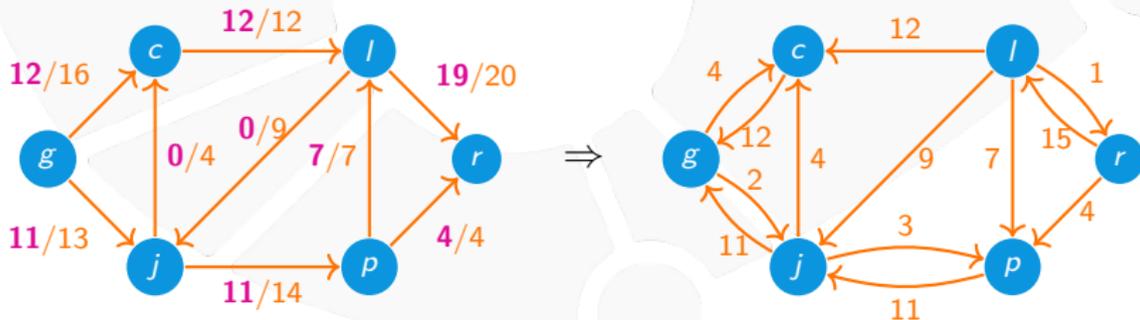




Método de Ford-Fulkerson

Algoritmo: FORD-FULKERSON(G, c, s, t)

- 1 $f \leftarrow 0$
 - 2 **enquanto** existe um caminho aumentador P em G_f
 - 3 $f \leftarrow f \uparrow P$ $\triangleright G_f$ é atualizado também
 - 4 **devolva** f
-





Método de Ford-Fulkerson

Perguntas:



Método de Ford-Fulkerson

Perguntas:

- ▶ Este método para? Qual é a complexidade?



Método de Ford-Fulkerson

Perguntas:

- ▶ Este método para? Qual é a complexidade?
- ▶ Por que o fluxo f que ele devolve é máximo?



Método de Ford-Fulkerson

Perguntas:

- ▶ Este método para? Qual é a complexidade?
- ▶ Por que o fluxo f que ele devolve é máximo?

Para responder isso, introduziremos alguns conceitos:



Método de Ford-Fulkerson

Perguntas:

- ▶ Este método para? Qual é a complexidade?
- ▶ Por que o fluxo f que ele devolve é máximo?

Para responder isso, introduziremos alguns conceitos:

- ▶ O **CORTE** de uma rede de fluxo.



Método de Ford-Fulkerson

Perguntas:

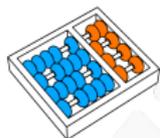
- ▶ Este método para? Qual é a complexidade?
- ▶ Por que o fluxo f que ele devolve é máximo?

Para responder isso, introduziremos alguns conceitos:

- ▶ O **CORTE** de uma rede de fluxo.
- ▶ A **CAPACIDADE** desse corte.

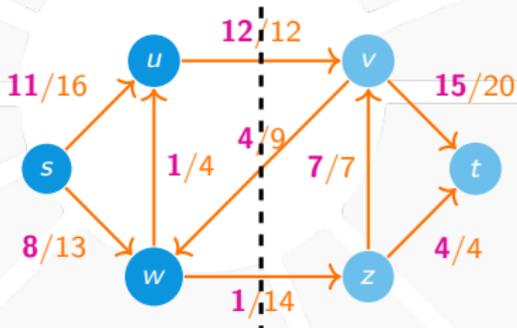


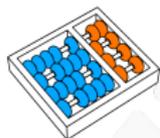
TEOREMA DO FLUXO
MÁXIMO E CORTE
MÍNIMO



Cortes

Dado um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ e uma rede $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$, um **CORTE** nessa rede é uma partição (\mathbf{S}, \mathbf{T}) de \mathbf{V} em dois conjuntos \mathbf{S} e $\mathbf{T} = \mathbf{V} \setminus \mathbf{S}$ tais que $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ e $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$.

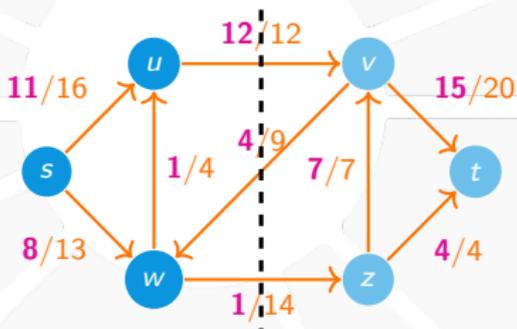


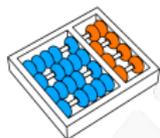


Fluxo líquido ao longo de um corte

O **FLUXO LÍQUIDO** ao longo de um corte (S, T) é definido como:

$$f(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(v, u).$$

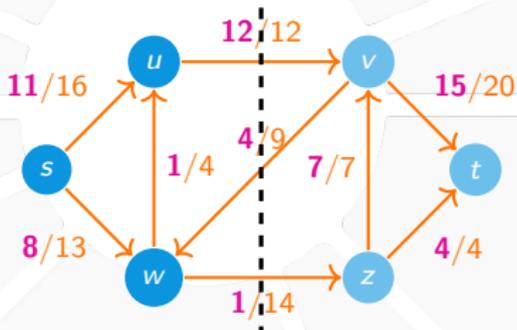




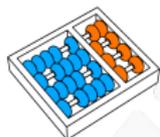
Fluxo líquido ao longo de um corte

O **FLUXO LÍQUIDO** ao longo de um corte (S, T) é definido como:

$$f(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(v, u).$$



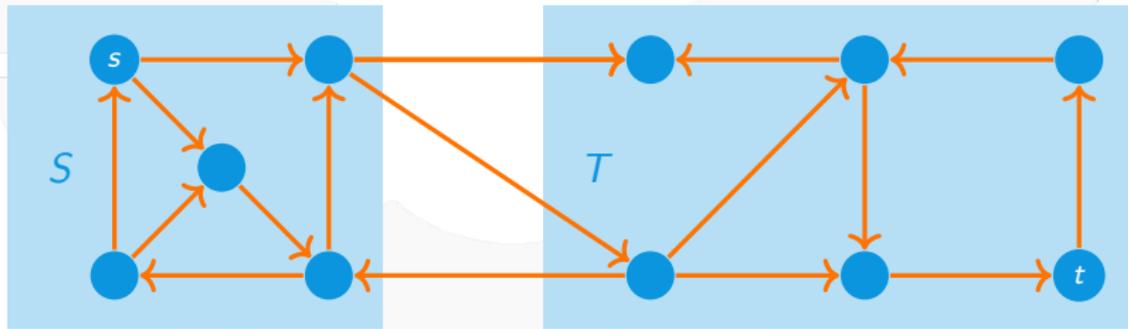
Lembre que: $|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s) = f(\{s\}, V \setminus \{s\})$.

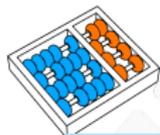


Fluxo líquido ao longo de um corte

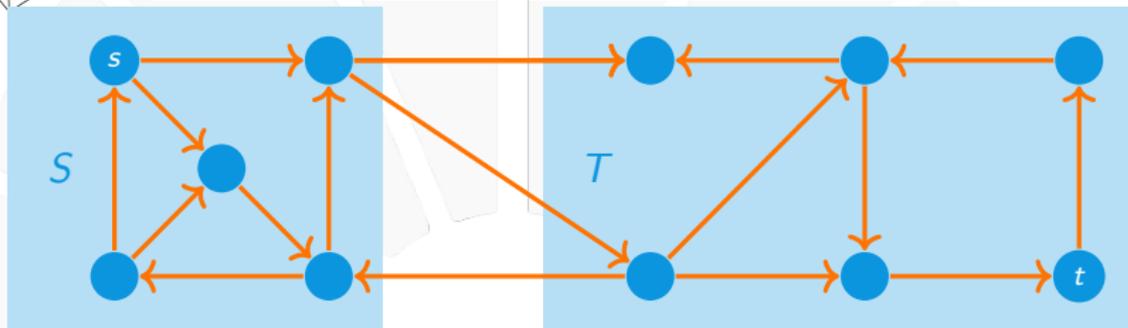
Lema

Sejam f um fluxo e (S, T) um corte qualquer de uma rede (G, c, s, t) . Então, $f(S, T) = |f|$.

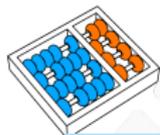




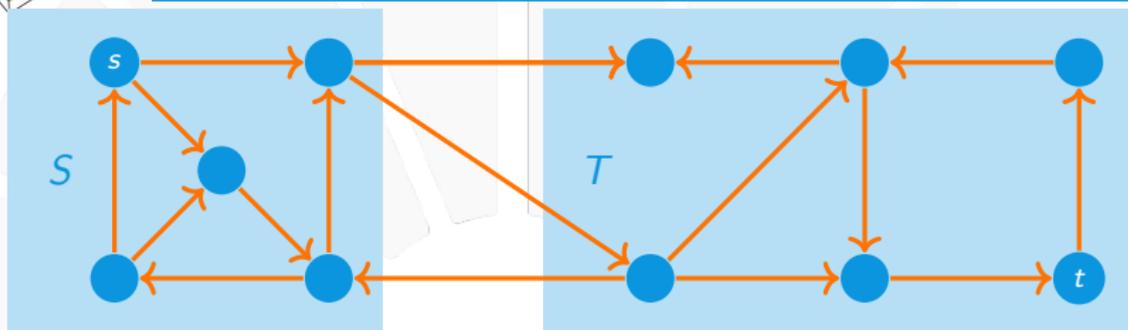
Demonstração do lema



Denote $f(S,S) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in S} f(u,v)$.



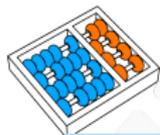
Demonstração do lema



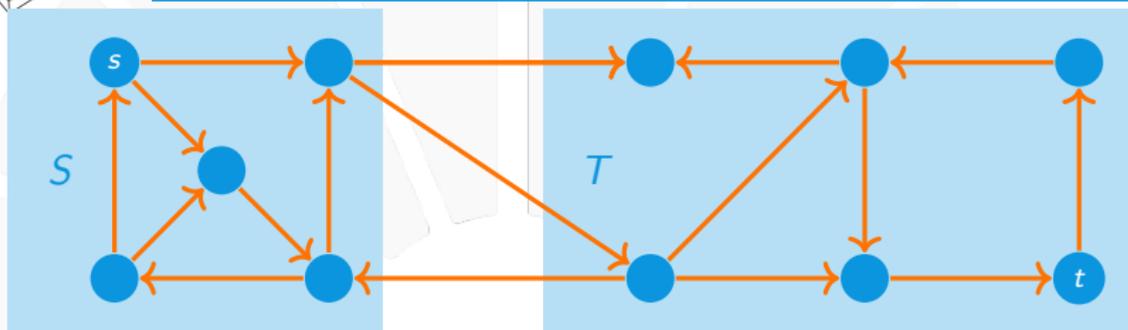
Denote $f(\mathbf{S}, \mathbf{S}) = \sum_{u \in \mathbf{S}} \sum_{v \in \mathbf{S}} f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

(a) Então,

$$\sum_{u \in \mathbf{S}} \sum_{v \in \mathbf{V}} f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{S}, \mathbf{S}) + \sum_{x \in \mathbf{S}} \sum_{y \in \mathbf{T}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$



Demonstração do lema



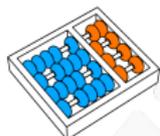
Denote $f(\mathbf{S}, \mathbf{S}) = \sum_{u \in \mathbf{S}} \sum_{v \in \mathbf{S}} f(u, v)$.

(a) Então,

$$\sum_{u \in \mathbf{S}} \sum_{v \in \mathbf{V}} f(u, v) = f(\mathbf{S}, \mathbf{S}) + \sum_{x \in \mathbf{S}} \sum_{y \in \mathbf{T}} f(x, y).$$

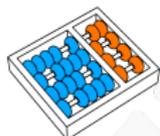
(b) Analogamente,

$$\sum_{u \in \mathbf{S}} \sum_{v \in \mathbf{V}} f(v, u) = f(\mathbf{S}, \mathbf{S}) + \sum_{x \in \mathbf{S}} \sum_{y \in \mathbf{T}} f(y, x).$$



Demonstração do lema

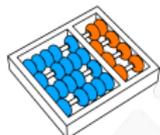
$$(a) \sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(u, v) = f(S, S) + \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(x, y).$$



Demonstração do lema

$$(a) \sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(u, v) = f(S, S) + \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(x, y).$$

$$(b) \sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(v, u) = f(S, S) + \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(y, x).$$

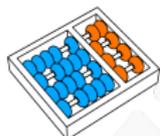


Demonstração do lema

$$(a) \sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(u, v) = f(S, S) + \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(x, y).$$

$$(b) \sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(v, u) = f(S, S) + \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(y, x).$$

Subtraindo **(b)** de **(a)**, obtemos:



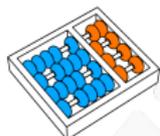
Demonstração do lema

$$(a) \sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(u, v) = f(S, S) + \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(x, y).$$

$$(b) \sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(v, u) = f(S, S) + \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(y, x).$$

Subtraindo **(b)** de **(a)**, obtemos:

$$\sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(u, v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(v, u) = \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(x, y) - \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(y, x)$$



Demonstração do lema

$$(a) \sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(u, v) = f(S, S) + \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(x, y).$$

$$(b) \sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(v, u) = f(S, S) + \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(y, x).$$

Subtraindo (b) de (a), obtemos:

$$\sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(u, v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(v, u) = \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(x, y) - \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(y, x)$$

$$\sum_{u \in S} \left(\sum_{v \in V} f(u, v) - \sum_{v \in V} f(v, u) \right) = f(S, T)$$



Demonstração do lema

$$(a) \sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(u, v) = f(S, S) + \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(x, y).$$

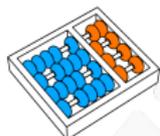
$$(b) \sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(v, u) = f(S, S) + \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(y, x).$$

Subtraindo (b) de (a), obtemos:

$$\sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(u, v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(v, u) = \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(x, y) - \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(y, x)$$

$$\sum_{u \in S} \left(\sum_{v \in V} f(u, v) - \sum_{v \in V} f(v, u) \right) = f(S, T)$$

$$\sum_{v \in V} (f(s, v) - f(v, s)) = f(S, T)$$



Demonstração do lema

$$(a) \sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(u, v) = f(S, S) + \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(x, y).$$

$$(b) \sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(v, u) = f(S, S) + \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(y, x).$$

Subtraindo (b) de (a), obtemos:

$$\sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(u, v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(v, u) = \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(x, y) - \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(y, x)$$

$$\sum_{u \in S} \left(\sum_{v \in V} f(u, v) - \sum_{v \in V} f(v, u) \right) = f(S, T)$$

$$\sum_{v \in V} (f(s, v) - f(v, s)) = f(S, T)$$

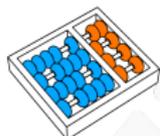
$$|f| = f(S, T).$$



Capacidade de um corte

A **CAPACIDADE** de um corte (S, T) é definida como:

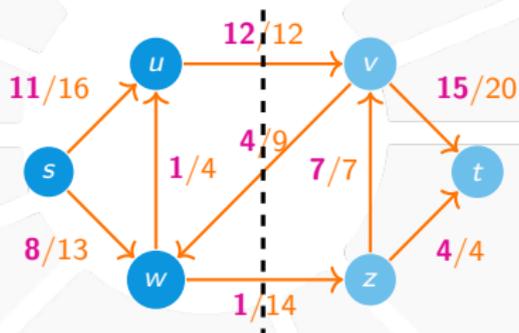
$$c(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v).$$

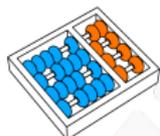


Capacidade de um corte

A **CAPACIDADE** de um corte (S, T) é definida como:

$$c(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v).$$

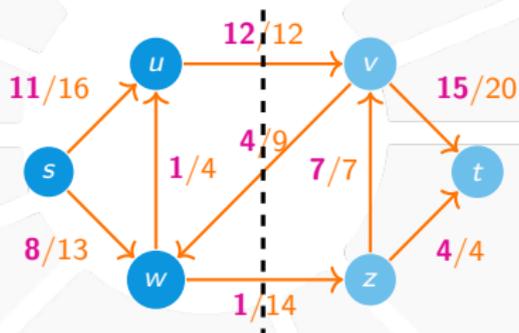




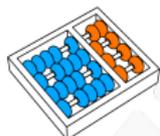
Capacidade de um corte

A **CAPACIDADE** de um corte (S, T) é definida como:

$$c(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v).$$



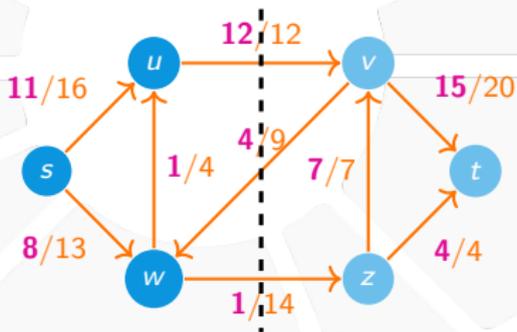
Um **CORTE MÍNIMO** em uma rede é um corte cuja capacidade é mínima entre todos os cortes da rede.



Relação entre fluxos e cortes

Corolário

Sejam f um fluxo e (S, T) um corte qualquer de uma rede (G, c, s, t) . Então $|f| \leq c(S, T)$.





Demonstração do corolário

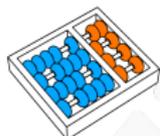
$$\begin{aligned} |f| &= f(\mathbf{S}, \mathbf{T}) \\ &= \sum_{u \in \mathbf{S}} \sum_{v \in \mathbf{T}} f(u, v) - \sum_{u \in \mathbf{S}} \sum_{v \in \mathbf{T}} f(v, u) \\ &\leq \sum_{u \in \mathbf{S}} \sum_{v \in \mathbf{T}} f(u, v) \\ &\leq \sum_{u \in \mathbf{S}} \sum_{v \in \mathbf{T}} c(u, v) \\ &= c(\mathbf{S}, \mathbf{T}). \end{aligned}$$



Relação entre fluxos e cortes

Corolário

Sejam f um fluxo e (S, T) um corte qualquer de uma rede (G, c, s, t) . Então $|f| \leq c(S, T)$.

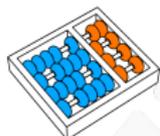


Relação entre fluxos e cortes

Corolário

Sejam f um fluxo e (S, T) um corte qualquer de uma rede (G, c, s, t) . Então $|f| \leq c(S, T)$.

- ▶ Esse corolário implica que o valor de um fluxo máximo é menor ou igual que a capacidade de um corte mínimo.



Relação entre fluxos e cortes

Corolário

Sejam f um fluxo e (S, T) um corte qualquer de uma rede (G, c, s, t) . Então $|f| \leq c(S, T)$.

- ▶ Esse corolário implica que o valor de um fluxo máximo é menor ou igual que a capacidade de um corte mínimo.
- ▶ Veremos que, na verdade, essas quantidades são iguais.



Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

Teorema

Seja f um fluxo de uma rede (G, c, s, t) . Então as seguintes afirmações são equivalentes:

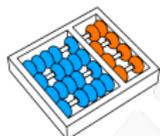


Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

Teorema

Seja f um fluxo de uma rede (G, c, s, t) . Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) f é um fluxo máximo.

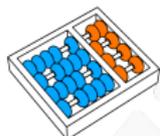


Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

Teorema

Seja f um fluxo de uma rede (G, c, s, t) . Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) f é um fluxo máximo.
- (2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.

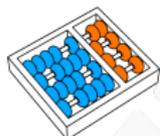


Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

Teorema

Seja f um fluxo de uma rede (G, c, s, t) . Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) f é um fluxo máximo.
- (2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.
- (3) $|f| = c(S, T)$ para algum corte (S, T) de (G, c, s, t) .



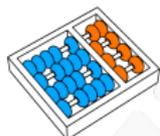
Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

Teorema

Seja f um fluxo de uma rede (G, c, s, t) . Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) f é um fluxo máximo.
- (2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.
- (3) $|f| = c(S, T)$ para algum corte (S, T) de (G, c, s, t) .

Demonstração de (1) \Rightarrow (2):



Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

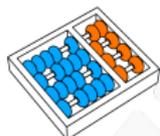
Teorema

Seja f um fluxo de uma rede (G, c, s, t) . Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) f é um fluxo máximo.
- (2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.
- (3) $|f| = c(S, T)$ para algum corte (S, T) de (G, c, s, t) .

Demonstração de (1) \Rightarrow (2):

- Suponha que f seja um fluxo máximo.



Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

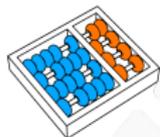
Teorema

Seja f um fluxo de uma rede (G, c, s, t) . Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) f é um fluxo máximo.
- (2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.
- (3) $|f| = c(S, T)$ para algum corte (S, T) de (G, c, s, t) .

Demonstração de (1) \Rightarrow (2):

- ▶ Suponha que f seja um fluxo máximo.
- ▶ Suponha, por contradição, que G_f contenha um caminho P .



Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

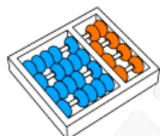
Teorema

Seja f um fluxo de uma rede (G, c, s, t) . Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) f é um fluxo máximo.
- (2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.
- (3) $|f| = c(S, T)$ para algum corte (S, T) de (G, c, s, t) .

Demonstração de (1) \Rightarrow (2):

- ▶ Suponha que f seja um fluxo máximo.
- ▶ Suponha, por contradição, que G_f contenha um caminho P .
- ▶ Então, $f \uparrow P$ é um fluxo com valor maior que o valor de f .



Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

Teorema

Seja f um fluxo de uma rede (G, c, s, t) . Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) f é um fluxo máximo.
- (2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.
- (3) $|f| = c(S, T)$ para algum corte (S, T) de (G, c, s, t) .

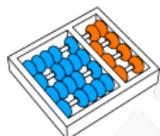
Demonstração de (1) \Rightarrow (2):

- ▶ Suponha que f seja um fluxo máximo.
- ▶ Suponha, por contradição, que G_f contenha um caminho P .
- ▶ Então, $f \uparrow P$ é um fluxo com valor maior que o valor de f .
- ▶ Isso é uma contradição, porque f é máximo.



Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

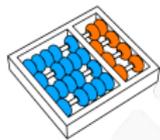
- (2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.
- (3) $|f| = c(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ para algum corte (\mathbf{S}, \mathbf{T}) de $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$.



Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

- (2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.
- (3) $|f| = c(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ para algum corte (\mathbf{S}, \mathbf{T}) de $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$.

Demonstração de (2) \Rightarrow (3):

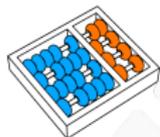


Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

- (2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.
- (3) $|f| = c(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ para algum corte (\mathbf{S}, \mathbf{T}) de $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$.

Demonstração de (2) \Rightarrow (3):

- ▶ Suponha que G_f não possui caminhos aumentadores.

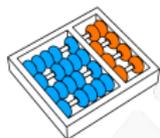


Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

- (2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.
- (3) $|f| = c(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ para algum corte (\mathbf{S}, \mathbf{T}) de $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$.

Demonstração de (2) \Rightarrow (3):

- ▶ Suponha que G_f não possui caminhos aumentadores.
- ▶ Ou seja, não existe caminho de \mathbf{s} a \mathbf{t} em G_f .



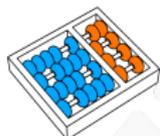
Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

- (2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.
- (3) $|f| = c(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ para algum corte (\mathbf{S}, \mathbf{T}) de $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$.

Demonstração de (2) \Rightarrow (3):

- ▶ Suponha que G_f não possui caminhos aumentadores.
- ▶ Ou seja, não existe caminho de \mathbf{s} a \mathbf{t} em G_f .
- ▶ Defina:

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : \text{existe caminho de } \mathbf{s} \text{ a } \mathbf{v} \text{ em } G_f\} \quad \text{e} \quad \mathbf{T} = \mathbf{V} \setminus \mathbf{S}.$$



Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

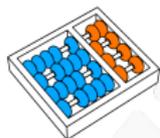
- (2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.
- (3) $|f| = c(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ para algum corte (\mathbf{S}, \mathbf{T}) de $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$.

Demonstração de (2) \Rightarrow (3):

- ▶ Suponha que G_f não possui caminhos aumentadores.
- ▶ Ou seja, não existe caminho de \mathbf{s} a \mathbf{t} em G_f .
- ▶ Defina:

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : \text{existe caminho de } \mathbf{s} \text{ a } \mathbf{v} \text{ em } G_f\} \quad \text{e} \quad \mathbf{T} = \mathbf{V} \setminus \mathbf{S}.$$

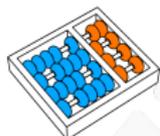
- ▶ Observe que, $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ e $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, então (\mathbf{S}, \mathbf{T}) é um corte.



Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

- (2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.
- (3) $|f| = c(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ para algum corte (\mathbf{S}, \mathbf{T}) de $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$.

Considere vértices $u \in \mathbf{S}$ e $v \in \mathbf{T}$.

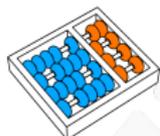


Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

- (2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.
- (3) $|f| = c(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ para algum corte (\mathbf{S}, \mathbf{T}) de $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$.

Considere vértices $u \in \mathbf{S}$ e $v \in \mathbf{T}$.

- ▶ Note que, G_f não contém aresta (u, v) .



Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

- (2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.
- (3) $|f| = c(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ para algum corte (\mathbf{S}, \mathbf{T}) de $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$.

Considere vértices $u \in \mathbf{S}$ e $v \in \mathbf{T}$.

- ▶ Note que, G_f não contém aresta (u, v) .
- ▶ Isso implica que:

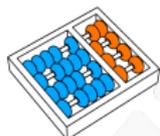


Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

- (2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.
- (3) $|f| = c(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ para algum corte (\mathbf{S}, \mathbf{T}) de $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$.

Considere vértices $u \in \mathbf{S}$ e $v \in \mathbf{T}$.

- ▶ Note que, G_f não contém aresta (u, v) .
- ▶ Isso implica que:
 - (a) Se $(u, v) \in \mathbf{E}$, então $f(u, v) = c(u, v)$.

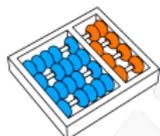


Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

- (2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.
- (3) $|f| = c(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ para algum corte (\mathbf{S}, \mathbf{T}) de $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$.

Considere vértices $u \in \mathbf{S}$ e $v \in \mathbf{T}$.

- ▶ Note que, G_f não contém aresta (u, v) .
- ▶ Isso implica que:
 - (a) Se $(u, v) \in \mathbf{E}$, então $f(u, v) = c(u, v)$.
 - (b) Se $(v, u) \in \mathbf{E}$, então $f(v, u) = 0$.



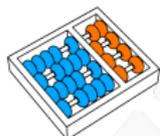
Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

- (2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.
- (3) $|f| = c(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ para algum corte (\mathbf{S}, \mathbf{T}) de $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$.

Considere vértices $u \in \mathbf{S}$ e $v \in \mathbf{T}$.

- ▶ Note que, G_f não contém aresta (u, v) .
- ▶ Isso implica que:
 - (a) Se $(u, v) \in \mathbf{E}$, então $f(u, v) = c(u, v)$.
 - (b) Se $(v, u) \in \mathbf{E}$, então $f(v, u) = 0$.

Portanto,



Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

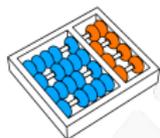
- (2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.
- (3) $|f| = c(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ para algum corte (\mathbf{S}, \mathbf{T}) de $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$.

Considere vértices $u \in \mathbf{S}$ e $v \in \mathbf{T}$.

- ▶ Note que, G_f não contém aresta (u, v) .
- ▶ Isso implica que:
 - (a) Se $(u, v) \in \mathbf{E}$, então $f(u, v) = c(u, v)$.
 - (b) Se $(v, u) \in \mathbf{E}$, então $f(v, u) = 0$.

Portanto,

$$|f| = f(\mathbf{S}, \mathbf{T}) = \sum_{u \in \mathbf{S}} \sum_{v \in \mathbf{T}} f(u, v) - \sum_{u \in \mathbf{S}} \sum_{v \in \mathbf{T}} f(v, u)$$



Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

- (2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.
- (3) $|f| = c(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ para algum corte (\mathbf{S}, \mathbf{T}) de $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$.

Considere vértices $u \in \mathbf{S}$ e $v \in \mathbf{T}$.

▶ Note que, G_f não contém aresta (u, v) .

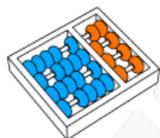
▶ Isso implica que:

(a) Se $(u, v) \in \mathbf{E}$, então $f(u, v) = c(u, v)$.

(b) Se $(v, u) \in \mathbf{E}$, então $f(v, u) = 0$.

Portanto,

$$|f| = f(\mathbf{S}, \mathbf{T}) = \sum_{u \in \mathbf{S}} \sum_{v \in \mathbf{T}} f(u, v) - \sum_{u \in \mathbf{S}} \sum_{v \in \mathbf{T}} f(v, u) = \sum_{u \in \mathbf{S}} \sum_{v \in \mathbf{T}} c(u, v) - \sum_{u \in \mathbf{S}} \sum_{v \in \mathbf{T}} 0$$



Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

- (2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.
- (3) $|f| = c(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ para algum corte (\mathbf{S}, \mathbf{T}) de $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$.

Considere vértices $u \in \mathbf{S}$ e $v \in \mathbf{T}$.

► Note que, G_f não contém aresta (u, v) .

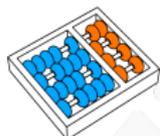
► Isso implica que:

(a) Se $(u, v) \in \mathbf{E}$, então $f(u, v) = c(u, v)$.

(b) Se $(v, u) \in \mathbf{E}$, então $f(v, u) = 0$.

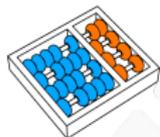
Portanto,

$$\begin{aligned}
 |f| = f(\mathbf{S}, \mathbf{T}) &= \sum_{u \in \mathbf{S}} \sum_{v \in \mathbf{T}} f(u, v) - \sum_{u \in \mathbf{S}} \sum_{v \in \mathbf{T}} f(v, u) = \sum_{u \in \mathbf{S}} \sum_{v \in \mathbf{T}} c(u, v) - \sum_{u \in \mathbf{S}} \sum_{v \in \mathbf{T}} 0 \\
 &= c(\mathbf{S}, \mathbf{T}).
 \end{aligned}$$



Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

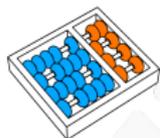
- (2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.
- (3) $|f| = c(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ para algum corte (\mathbf{S}, \mathbf{T}) de $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$.



Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

- (2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.
- (3) $|f| = c(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ para algum corte (\mathbf{S}, \mathbf{T}) de $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$.

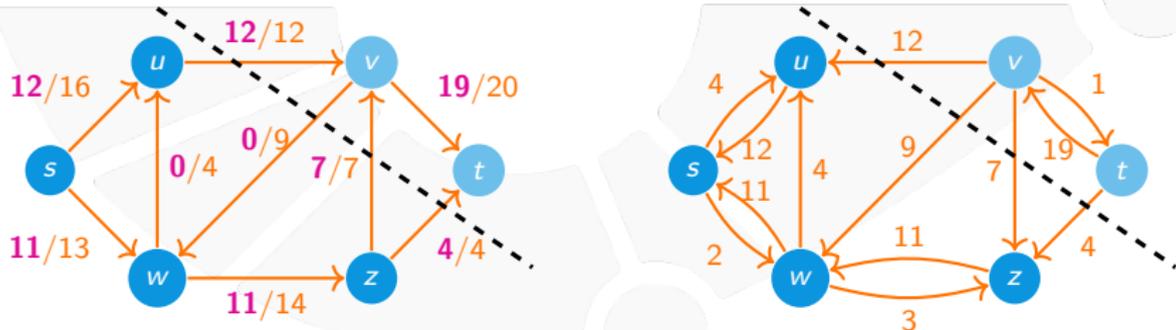
A seguinte figura ilustra a implicação (2) \Rightarrow (3):

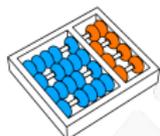


Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

- (2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.
- (3) $|f| = c(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ para algum corte (\mathbf{S}, \mathbf{T}) de $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$.

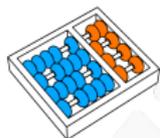
A seguinte figura ilustra a implicação (2) \Rightarrow (3):





Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

- (3) $|f| = c(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ para algum corte (\mathbf{S}, \mathbf{T}) de $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$.
- (1) f é um fluxo máximo.

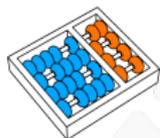


Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(3) $|f| = c(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ para algum corte (\mathbf{S}, \mathbf{T}) de $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$.

(1) f é um fluxo máximo.

Demonstração de (3) \Rightarrow (1):



Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(3) $|f| = c(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ para algum corte (\mathbf{S}, \mathbf{T}) de $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$.

(1) f é um fluxo máximo.

Demonstração de (3) \Rightarrow (1):

► Considere um corte (\mathbf{S}, \mathbf{T}) e suponha que $|f| = c(\mathbf{S}, \mathbf{T})$.



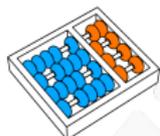
Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(3) $|f| = c(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ para algum corte (\mathbf{S}, \mathbf{T}) de $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$.

(1) f é um fluxo máximo.

Demonstração de (3) \Rightarrow (1):

- ▶ Considere um corte (\mathbf{S}, \mathbf{T}) e suponha que $|f| = c(\mathbf{S}, \mathbf{T})$.
- ▶ Suponha que f' é um corte máximo.



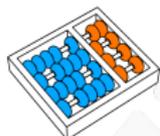
Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(3) $|f| = c(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ para algum corte (\mathbf{S}, \mathbf{T}) de $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$.

(1) f é um fluxo máximo.

Demonstração de (3) \Rightarrow (1):

- ▶ Considere um corte (\mathbf{S}, \mathbf{T}) e suponha que $|f| = c(\mathbf{S}, \mathbf{T})$.
- ▶ Suponha que f' é um corte máximo.
- ▶ Pelo corolário, sabemos que $|f'| \leq c(\mathbf{S}, \mathbf{T}) = |f|$.



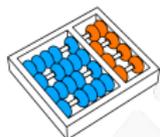
Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(3) $|f| = c(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ para algum corte (\mathbf{S}, \mathbf{T}) de $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$.

(1) f é um fluxo máximo.

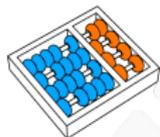
Demonstração de (3) \Rightarrow (1):

- ▶ Considere um corte (\mathbf{S}, \mathbf{T}) e suponha que $|f| = c(\mathbf{S}, \mathbf{T})$.
- ▶ Suponha que f' é um corte máximo.
- ▶ Pelo corolário, sabemos que $|f'| \leq c(\mathbf{S}, \mathbf{T}) = |f|$.
- ▶ Portanto, f também é máximo.



Consequências importantes

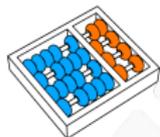
O teorema permite responder algumas perguntas:



Consequências importantes

O teorema permite responder algumas perguntas:

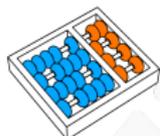
- ▶ Suponha que f é um fluxo e (S, T) é um corte de uma rede tais que $|f| = c(S, T)$. É verdade que f é um **FLUXO MÁXIMO** e (S, T) é um **CORTE MÍNIMO** dessa rede?



Consequências importantes

O teorema permite responder algumas perguntas:

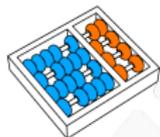
- ▶ Suponha que f é um fluxo e (S, T) é um corte de uma rede tais que $|f| = c(S, T)$. É verdade que f é um **FLUXO MÁXIMO** e (S, T) é um **CORTE MÍNIMO** dessa rede?
- ▶ Dado um fluxo f de uma rede, como podemos verificar que f é de fato máximo? Qual é a complexidade do teste?



Consequências importantes

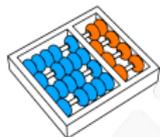
O teorema permite responder algumas perguntas:

- ▶ Suponha que f é um fluxo e (S, T) é um corte de uma rede tais que $|f| = c(S, T)$. É verdade que f é um **FLUXO MÁXIMO** e (S, T) é um **CORTE MÍNIMO** dessa rede?
- ▶ Dado um fluxo f de uma rede, como podemos verificar que f é de fato máximo? Qual é a complexidade do teste?
- ▶ Dado um **FLUXO MÁXIMO** f de uma rede, como podemos encontrar um **CORTE MÍNIMO** dessa rede? Qual é a complexidade?



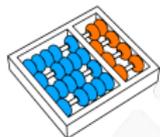
Como escolher encontrar o caminho aumentador P ?

- ▶ Podemos escolher um **CAMINHO MAIS CURTO** de s a t em G_f .



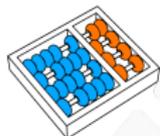
Como escolher encontrar o caminho aumentador P ?

- ▶ Podemos escolher um **CAMINHO MAIS CURTO** de s a t em G_f .
- ▶ Isso pode ser feito executando uma BFS.



Como escolher encontrar o caminho aumentador P ?

- ▶ Podemos escolher um **CAMINHO MAIS CURTO** de s a t em G_f .
- ▶ Isso pode ser feito executando uma BFS.
- ▶ Edmonds e Karp (1972) mostraram que essa implementação do algoritmo tem complexidade $O(VE^2)$.



Como escolher encontrar o caminho aumentador P ?

- ▶ Podemos escolher um **CAMINHO MAIS CURTO** de s a t em G_f .
- ▶ Isso pode ser feito executando uma BFS.
- ▶ Edmonds e Karp (1972) mostraram que essa implementação do algoritmo tem complexidade $O(VE^2)$.
- ▶ Denominamos essa implementação de EDMONDS-KARP.

FORD-FULKERSON

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

Santiago Valdés Ravelo
<https://ic.unicamp.br/~santiago/ravelo@unicamp.br>

10/24

16



UNICAMP

