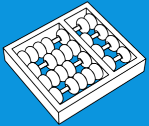
Ford-Fulkerson

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

16

10/24



Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

UNICAMP

“Embora os algoritmos de fluxo máximo tenham uma longa história, avanços revolucionários ainda estão sendo realizados.”

Andrew V. Goldberg

Método de Ford-Fulkerson

Solucionando fluxo máximo

Veremos um **MÉTODO** para resolver o problema do fluxo máximo:

- Projetado por Ford e Fulkerson independentemente.
- Não é um **ALGORITMO** completamente especificado.
- Há várias implementações desse método.

Baseado em três conceitos fundamentais:

1. Redes residuais.
2. Caminhos aumentadores.
3. Dualidade e cortes.

Aumentar fluxo ao longo de um pseudocaminho

$$v_1 \xrightarrow{+\alpha} v_2 \xleftarrow{-\alpha} v_3 \xleftarrow{-\alpha} v_4 \xrightarrow{+\alpha} v_5 \xleftarrow{-\alpha} v_6 \xrightarrow{+\alpha} v_7 \xrightarrow{+\alpha} v_8$$

Como obter um novo fluxo válido e maior?

- Aumentamos ou diminuímos o fluxo das arestas por $\alpha > 0$.
- Note que mantemos a conservação de fluxo.
- Ademais, o valor do novo fluxo é maior.
- Falta garantir que os fluxos sejam **NÃO NEGATIVOS** e respeitem às **CAPACIDADES**.

Redes residuais

A **REDE RESIDUAL** obtida de $(G, c, \mathbf{s,t})$ a partir de um fluxo f é a rede $(G_f, c_f, \mathbf{s,t})$ com $G_f = (\mathbf{V}, \mathbf{E_f})$ em que para cada $(\mathbf{u,v}) \in \mathbf{E}$:

1. Se $f(\mathbf{u,v}) < c(\mathbf{u,v})$, então $(\mathbf{u,v}) \in \mathbf{E_f}$ e $c_f(\mathbf{u,v}) = c(\mathbf{u,v}) - f(\mathbf{u,v})$.

$$u \xrightarrow{\mathbf{f} < c} v \quad \Rightarrow \quad u \xrightarrow{c_f = c - \mathbf{f}} v$$

2. Se $f(\mathbf{u,v}) > 0$, então $(\mathbf{v,u}) \in \mathbf{E_f}$ e $c_f(\mathbf{v,u}) = f(\mathbf{u,v})$.

$$u \xrightarrow{\mathbf{f} > 0} v \quad \Rightarrow \quad u \xleftarrow{c_f = \mathbf{f}} v$$

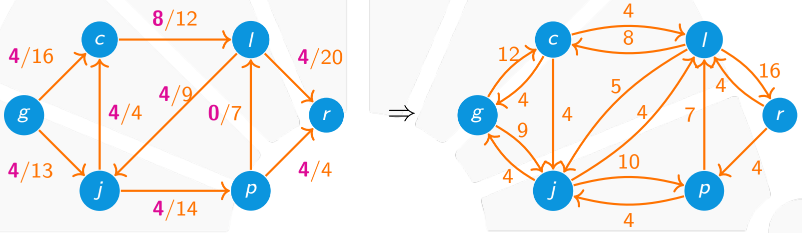
Redes residuais

$$u \xrightarrow{\mathbf{f} < c} v \quad \Rightarrow \quad u \xrightarrow{c_f = c - \mathbf{f}} v$$

$$u \xrightarrow{\mathbf{f} > 0} v \quad \Rightarrow \quad u \xleftarrow{c_f = \mathbf{f}} v$$

Note que, como não há arestas antiparalelas em G, não há ambiguidade na definição de $c_f(\mathbf{u,v})$ nem de $c_f(\mathbf{v,u})$.

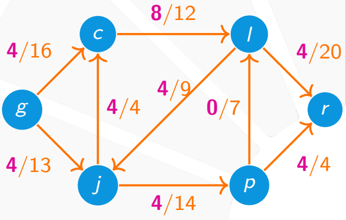
Redes residuais: um exemplo



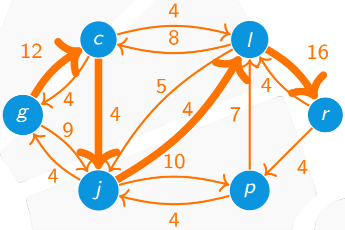
Observações:

- O número de arestas da rede residual é $|\mathbf{E_f}| \leq 2|\mathbf{E}|$.
- A rede residual pode conter arestas antiparalelas.

Caminhos aumentadores



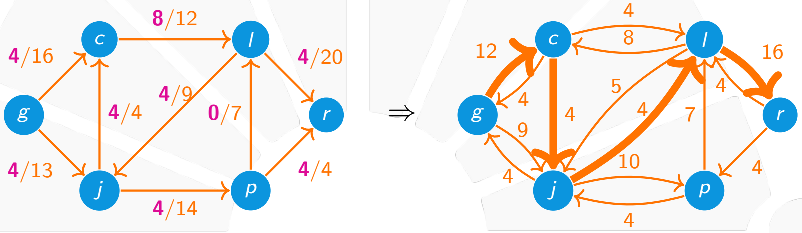
$\Rightarrow$



Um **CAMINHO AUMENTADOR** é um caminho de **s** a **t** na rede residual G_f que:

- Corresponde a um pseudocaminho da rede original.
- Se existir, então podemos aumentar o valor do fluxo.

Capacidade do caminho

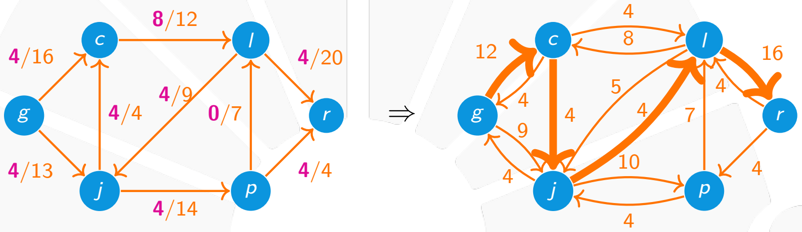


A **CAPACIDADE RESIDUAL** de um caminho aumentador P é:

$$c_f(P) = \min\{c_f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in P\}.$$

Observe que, $c_f(P) > 0$.

Arestas do caminho



Podemos dividir o conjunto de arestas de P em dois conjuntos:

$\mathbf{P}^+ = \{(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathbf{P} : (\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathbf{E}\}$ e $\mathbf{P}^- = \{(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathbf{P} : (\mathbf{v},\mathbf{u}) \in \mathbf{E}\}$

Uma aresta de P:

- Pertence a $\mathbf{P}^+$ se também for uma aresta $\mathbf{E}$.
- Pertence a $\mathbf{P}^-$ se sua reversa é aresta de $\mathbf{E}$.

Aumentando um fluxo

Seja $\alpha = c_f(P)$ a capacidade residual de P.

- Aumentamos o valor do fluxo f usando P.
- Criamos um novo fluxo $f \uparrow P : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}_+$ definido como:

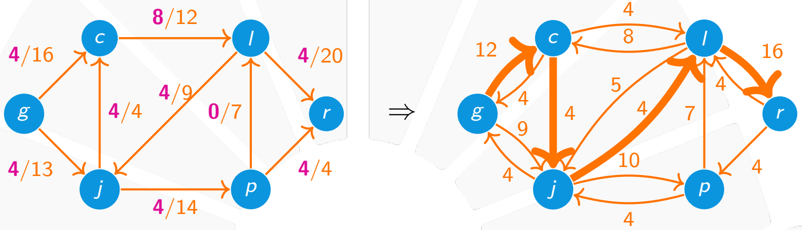
$$f \uparrow P(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \begin{cases} f(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \alpha & \text{se } (\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathbf{P}^+, \\ f(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \alpha & \text{se } (\mathbf{v},\mathbf{u}) \in \mathbf{P}^-, \\ f(\mathbf{u},\mathbf{v}) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Lema

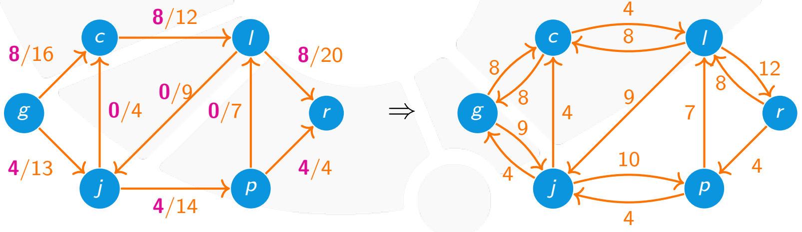
Seja $(G, c, \mathbf{s},\mathbf{t})$ uma rede e f um fluxo nessa rede. Se P é um caminho em G_f, então $f \uparrow P$ é um fluxo em $(G, c, \mathbf{s},\mathbf{t})$ com valor:

$$|f \uparrow P| = |f| + c_f(P).$$

Caminhos aumentadores



A capacidade residual do caminho aumentador é 4.



Método de Ford-Fulkerson

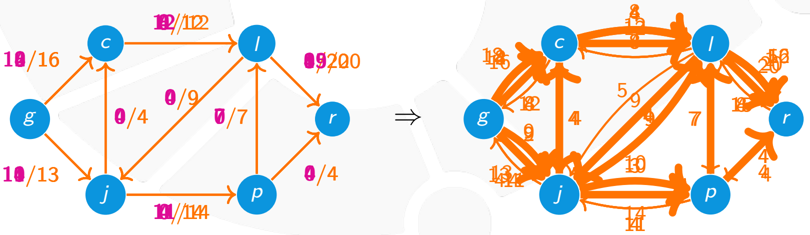
Algoritmo: $\textsc{Ford-Fulkerson}(G, c, s, t)$

$f \leftarrow 0$

enquanto *existe um caminho aumentador P em G_f*

  $f \leftarrow f \uparrow P$ $\triangleright$ G_f é atualizado também

devolva f



Método de Ford-Fulkerson

Perguntas:

- Este método para? Qual é a complexidade?
- Por que o fluxo f que ele devolve é máximo?

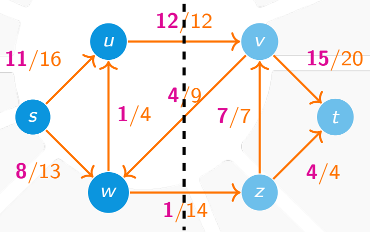
Para responder isso, introduziremos alguns conceitos:

- O **CORTE** de uma rede de fluxo.
- A **CAPACIDADE** desse corte.

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

Cortes

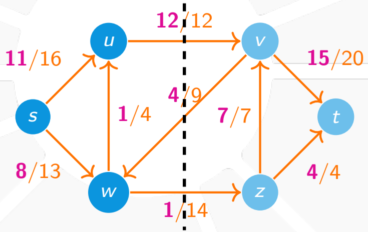
Dado um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ e uma rede $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$, um **CORTE** nessa rede é uma partição $(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ de $\mathbf{V}$ em dois conjuntos $\mathbf{S}$ e $\mathbf{T} = \mathbf{V} \setminus \mathbf{S}$ tais que $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ e $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$.



Fluxo líquido ao longo de um corte

O **FLUXO LÍQUIDO** ao longo de um corte $(\mathbf{S,T})$ é definido como:

$$f(\mathbf{S,T}) = \sum_{\mathbf{u} \in \mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{T}} f(\mathbf{u,v}) - \sum_{\mathbf{u} \in \mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{T}} f(\mathbf{v,u}).$$

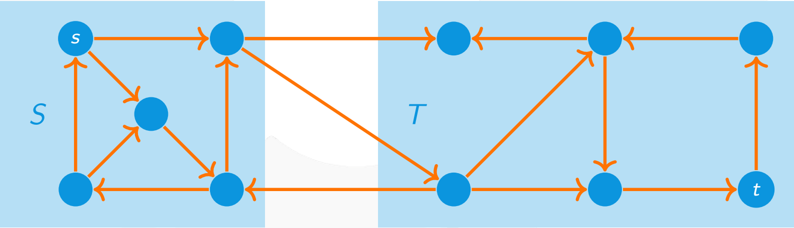


Lembre que: $|f| = \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} f(\mathbf{s,v}) - \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} f(\mathbf{v,s}) = f(\{\mathbf{s}\}, \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{s}\})$.

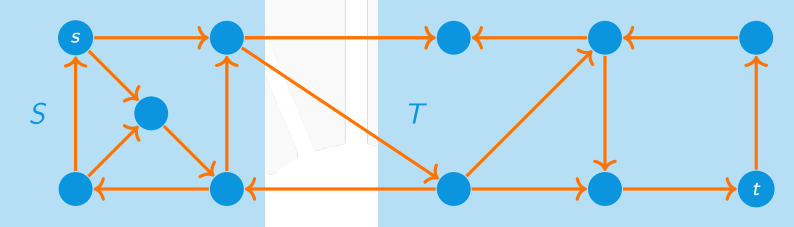
Fluxo líquido ao longo de um corte

Lema

Sejam f um fluxo e (S,T) um corte qualquer de uma rede (G, c, s,t). Então, $f(S,T) = |f|$.



Demonstração do lema



Denote $f(\mathbf{S},\mathbf{S}) = \sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{S}} f(\mathbf{u},\mathbf{v})$.

(a) Então,

$$\sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{V}} f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = f(\mathbf{S},\mathbf{S}) + \sum_{\mathbf{x}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{T}} f(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

(b) Analogamente,

$$\sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{V}} f(\mathbf{v},\mathbf{u}) = f(\mathbf{S},\mathbf{S}) + \sum_{\mathbf{x}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{T}} f(\mathbf{y},\mathbf{x}).$$

Demonstração do lema

(a) $\sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(u,v) = f(S,S) + \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(x,y)$.

(b) $\sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(v,u) = f(S,S) + \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(y,x)$.

Subtraindo **(b)** de **(a)**, obtemos:

$$\sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(u,v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(v,u) = \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(x,y) - \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(y,x)$$

$$\sum_{u \in S} \left(\sum_{v \in V} f(u,v) - \sum_{v \in V} f(v,u) \right) = f(S,T)$$

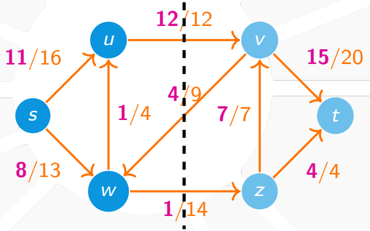
$$\sum_{v \in V} (f(s,v) - f(v,s)) = f(S,T)$$

$$|f| = f(S,T).$$

Capacidade de um corte

A **CAPACIDADE** de um corte $(\mathbf{S},\mathbf{T})$ é definida como:

$$c(\mathbf{S},\mathbf{T}) = \sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}}\sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{T}} c(\mathbf{u},\mathbf{v}).$$

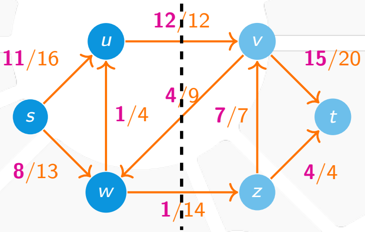


Um **CORTE MÍNIMO** em uma rede é um corte cuja capacidade é mínima entre todos os cortes da rede.

Relação entre fluxos e cortes

Corolário

Sejam f um fluxo e (S,T) um corte qualquer de uma rede (G,c,s,t). Então $|f| \leq c(S,T)$.



Demonstração do corolário

$$\begin{aligned}
|f| &= f(\mathbf{S},\mathbf{T}) \\
&= \sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{T}} f(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{T}} f(\mathbf{v},\mathbf{u}) \\
&\leq \sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{T}} f(\mathbf{u},\mathbf{v}) \\
&\leq \sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{T}} c(\mathbf{u},\mathbf{v}) \\
&= c(\mathbf{S},\mathbf{T}).
\end{aligned}$$

Relação entre fluxos e cortes

Corolário

Sejam f um fluxo e $(\boldsymbol{S,T})$ um corte qualquer de uma rede $(G, c, \boldsymbol{s,t})$. Então $|f| \leq c(\boldsymbol{S,T})$.

- Esse corolário implica que o valor de um fluxo máximo é menor ou igual que a capacidade de um corte mínimo.
- Veremos que, na verdade, essas quantidades são iguais.

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

Teorema

Seja f um fluxo de uma rede $(G, c, \boldsymbol{s,t})$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) *f é um fluxo máximo.*

(2) *A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.*

(3) *$|f| = c(\boldsymbol{S,T})$ para algum corte $(\boldsymbol{S,T})$ de $(G, c, \boldsymbol{s,t})$.*

Demonstração de **(1)** $\Rightarrow$ **(2)**:

- Suponha que f seja um fluxo máximo.
- Suponha, por contradição, que G_f contenha um caminho P.
- Então, $f \uparrow P$ é um fluxo com valor maior que o valor de f.
- Isso é uma contradição, porque f é máximo.

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.

(3) $|f| = c(\mathbf{S},\mathbf{T})$ para algum corte $(\mathbf{S},\mathbf{T})$ de $(G, c, \mathbf{s},\mathbf{t})$.

Demonstração de **(2)** $\Rightarrow$ **(3)**:

- Suponha que G_f não possui caminhos aumentadores.
- Ou seja, não existe caminho de **s** a **t** em G_f.
- Defina:

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : \text{existe caminho de } \mathbf{s} \text{ a } \mathbf{v} \text{ em } G_f\} \quad \text{e} \quad \mathbf{T} = \mathbf{V} \setminus \mathbf{S}.$$

- Observe que, $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ e $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, então $(\mathbf{S},\mathbf{T})$ é um corte.

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.

(3) $|f| = c(\mathbf{S,T})$ para algum corte $(\mathbf{S,T})$ de $(G, c, \mathbf{s,t})$.

Considere vértices $\mathbf{u} \in \mathbf{S}$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{T}$.

- Note que, G_f não contém aresta $(\mathbf{u,v})$.
- Isso implica que:
  (a) Se $(\mathbf{u,v}) \in \mathbf{E}$, então $f(\mathbf{u,v}) = c(\mathbf{u,v})$.
  (b) Se $(\mathbf{v,u}) \in \mathbf{E}$, então $f(\mathbf{v,u}) = 0$.

Portanto,

$$|f| = f(\mathbf{S,T}) = \sum_{\mathbf{u} \in \mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{T}} f(\mathbf{u,v}) - \sum_{\mathbf{u} \in \mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{T}} f(\mathbf{v,u}) = \sum_{\mathbf{u} \in \mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{T}} c(\mathbf{u,v}) - \sum_{\mathbf{u} \in \mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{T}} 0$$

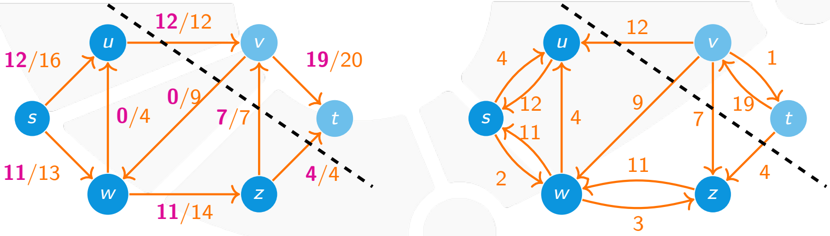
$$= c(\mathbf{S,T}).$$

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.

(3) $|f| = c(\mathbf{S},\mathbf{T})$ para algum corte $(\mathbf{S},\mathbf{T})$ de $(G, c, \mathbf{s},\mathbf{t})$.

A seguinte figura ilustra a implicação **(2)** $\Rightarrow$ **(3)**:



Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(3) $|f| = c(\mathbf{S,T})$ para algum corte $(\mathbf{S,T})$ de $(G, c, \mathbf{s,t})$.

(1) f é um fluxo máximo.

Demonstração de **(3)** $\Rightarrow$ **(1)**:

- Considere um corte $(\mathbf{S,T})$ e suponha que $|f| = c(\mathbf{S,T})$.
- Suponha que f' é um corte máximo.
- Pelo corolário, sabemos que $|f'| \leq c(\mathbf{S,T}) = |f|$.
- Portanto, f também é máximo.

Consequências importantes

O teorema permite responder algumas perguntas:

- Suponha que f é um fluxo e $(\mathbf{S},\mathbf{T})$ é um corte de uma rede tais que $|f| = c(\mathbf{S},\mathbf{T})$. É verdade que f é um **FLUXO MÁXIMO** e $(\mathbf{S},\mathbf{T})$ é um **CORTE MÍNIMO** dessa rede?
- Dado um fluxo f de uma rede, como podemos verificar que f é de fato máximo? Qual é a complexidade do teste?
- Dado um **FLUXO MÁXIMO** f de uma rede, como podemos encontrar um **CORTE MÍNIMO** dessa rede? Qual é a complexidade?

Como escolher encontrar o caminho aumentador P?

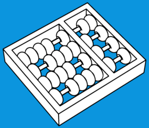
- Podemos escolher um **CAMINHO MAIS CURTO** de **s** a **t** em G_f.
- Isso pode ser pode ser feito executando uma BFS.
- Edmonds e Karp (1972) mostraram que essa implementação do algoritmo tem complexidade $O(VE^2)$.
- Denominamos essa implementação de EDMONDS-KARP.

Ford-Fulkerson

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

16

10/24



UNICAMP

Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br