

REDUÇÕES

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

Santiago Valdés Ravelo
<https://ic.unicamp.br/~santiago/ravelo@unicamp.br>

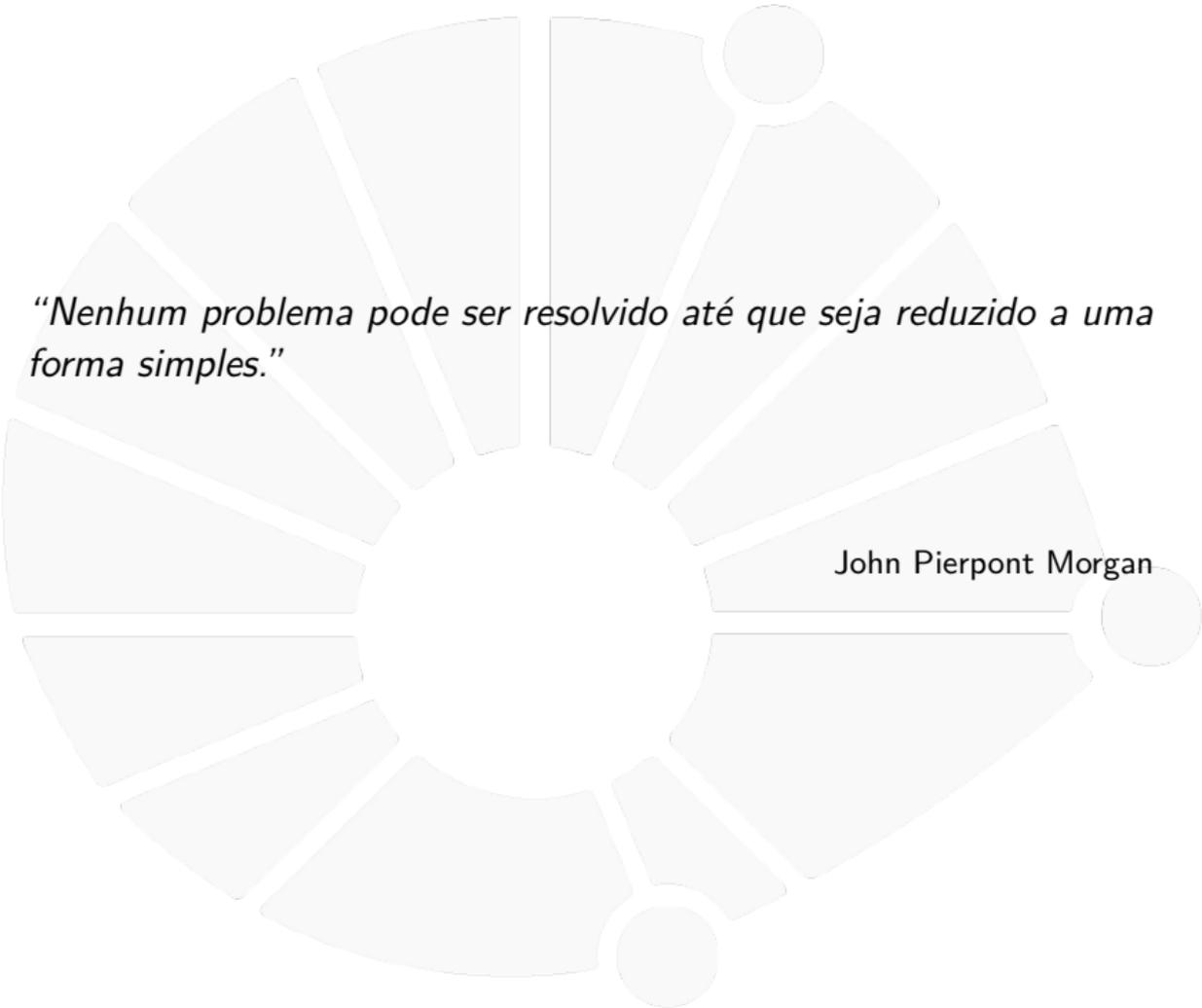
10/24

17



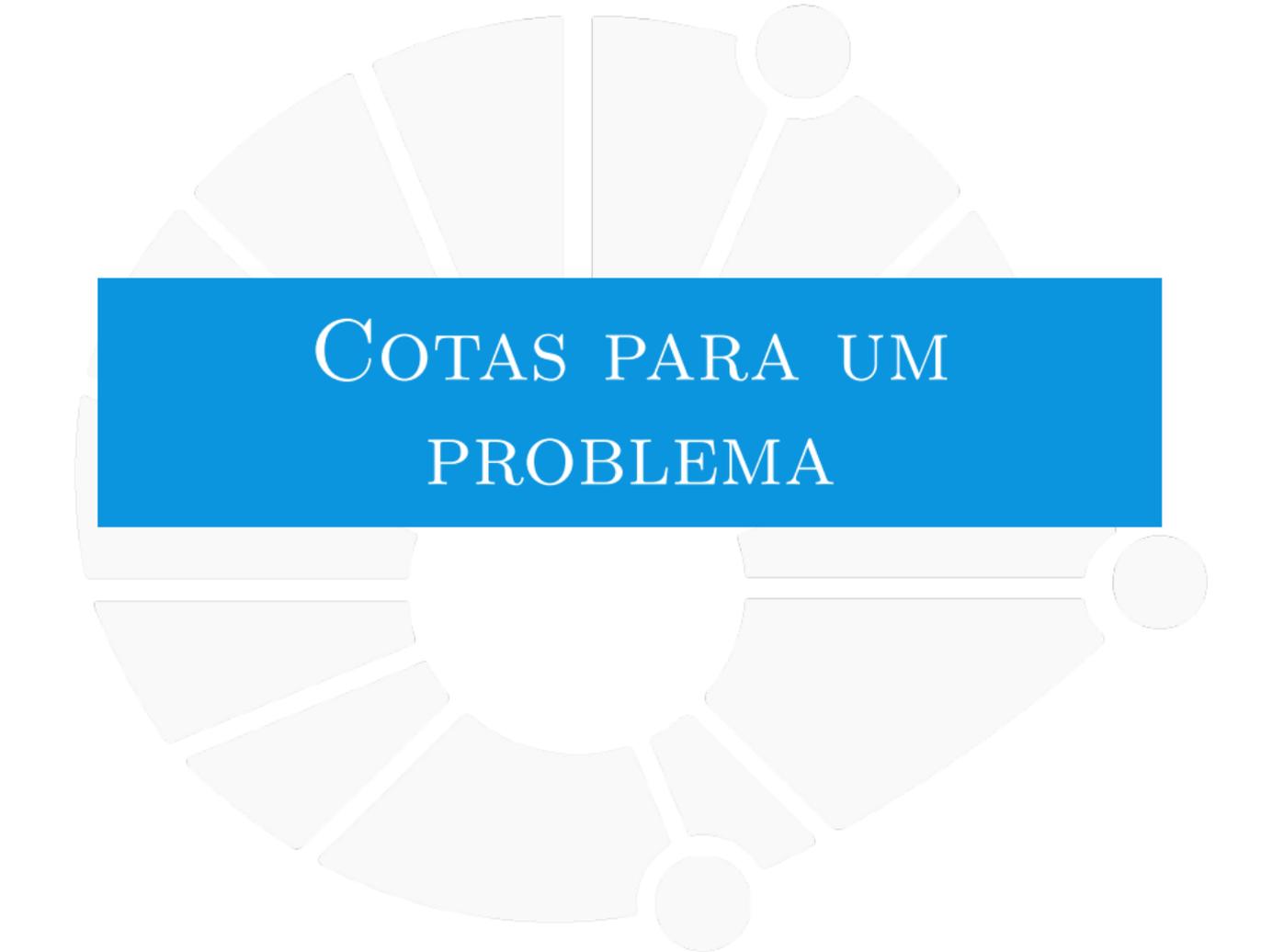
UNICAMP



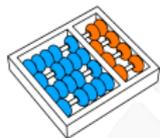


“Nenhum problema pode ser resolvido até que seja reduzido a uma forma simples.”

John Pierpont Morgan



COTAS PARA UM PROBLEMA



Formalizando problema

Como formalizar um problema **GENERICAMENTE?**

Definição (Problema computacional)

Um problema computacional é uma **RELAÇÃO** $P \subseteq \mathcal{I} \times \mathcal{S}$, onde:

- ▶ \mathcal{I} é o conjunto de entradas e
- ▶ \mathcal{S} é o conjunto de saídas.



Algoritmo para um problema

Definição

Dizemos que um algoritmo ALG **RESOLVE** um problema $P = (\mathcal{I}, \mathcal{P})$ se para toda entrada $I \in \mathcal{I}$, ele devolve uma saída $S \in \mathcal{S}$ tal que $(I, S) \in P$.

- ▶ Escrevemos $I \in P$ para representar uma entrada.
- ▶ Escrevemos $A(I)$ para representar a saída do algoritmo.
- ▶ Denotamos por n o “tamanho” de I .
- ▶ Normalmente n é o número de bits de I .



Revisitando a complexidade de um algoritmo

Seja ALG um algoritmo para um problema P e n um parâmetro.

Notação O :

- ▶ Se o algoritmo leva tempo **NO MÁXIMO** $f(n)$ para toda entrada de tamanho n , então dizemos que ALG executa em tempo $O(f(n))$.

Notação Ω :

- ▶ Se o algoritmo leva tempo **PELO MENOS** $g(n)$ para alguma entrada de tamanho n , então dizemos que ALG executa em tempo $\Omega(g(n))$.



Cotas superior e inferior de um problema

Seja P um problema e seja n um parâmetro:

Definição (Cota superior)

Uma função $f(n)$ é chamada de cota superior para P se **existe algum algoritmo** que resolve P em tempo $O(f(n))$.

Definição (Cota inferior)

Uma função $g(n)$ é chamada de cota inferior para P se **todo algoritmo** que resolve P leva tempo $\Omega(f(n))$.



Algoritmo ótimo

Um algoritmo ALG é **ÓTIMO** para um problema P se:

1. ALG resolve P em tempo $O(f(n))$ e
2. $f(n)$ é uma cota inferior de P .

▶ **HEAPSORT** e **MERGESORT** são ótimos para ordenação:

- ▶ Eles têm complexidade $O(n \log n)$.
- ▶ Ordenação tem cota inferior $\Omega(n \log n)$.

▶ **BUSCA-BINARIA** é ótimo para busca em vetor ordenado:

- ▶ Tem complexidade $O(\log n)$.
- ▶ Qualquer algoritmo leva tempo $\Omega(\log n)$.



Comparando problemas

Como comparamos dois algoritmos para **UM ÚNICO PROBLEMA**?

- ▶ Comparamos a complexidade de cada algoritmo.
- ▶ Descobrimos se um algoritmo é mais “rápido” que outro.

E se quisermos comparar **DOIS PROBLEMAS** A e B ?

- ▶ Queremos descobrir se então A é mais “fácil” do que B .
- ▶ Podemos comparar as cotas de cada algoritmo.

Exemplo: Achar o máximo é mais **FÁCIL** que ordenar um vetor!

- ▶ Máximo tem cota superior $O(n)$.
- ▶ Ordenação tem cota inferior $\Omega(n \log n)$.



REDUÇÕES



Combinando problemas

Uma analogia

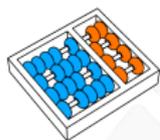
Um certo editor de literatura internacional é especialista em publicar livros em português. Ele conta com um time de tradutores, entre os quais:

- ▶ Cook, responsável por traduzir de **inglês para português**.
- ▶ Levin, responsável por traduzir de **russo para inglês**.

Em uma edição especial, ele irá publicar Crime e Castigo. Como traduzir de **RUSSO PARA PORTUGUÊS**?

- ▶ Em geral, lidamos com problemas bem conhecidos.
- ▶ Mas eventualmente, topamos com problemas novos.

Pergunta: como relacionar esses problemas?



Redução

Problema A:

- ▶ Instância: I_A
- ▶ Solução: S_A

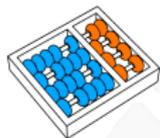
Problema B:

- ▶ Instância: I_B
- ▶ Solução: S_B

Definição

Uma **REDUÇÃO** do problema A ao problema B é um par de sub-rotinas τ_I e τ_S tais que:

- ▶ τ_I transforma uma instância I_A de A em uma instância I_B de B.
- ▶ τ_S transforma uma solução S_B de I_B em uma solução S_A de I_A .



Redução como um algoritmo

Como podemos resolver o problema A ?

1. Suponha que existe um algoritmo ALG_B para o problema B .
2. Podemos usar ALG_B como uma **CAIXA-PRETA**.

Algoritmo: REDUÇÃO(I, A)

- 1 $I_B \leftarrow \tau_I(I_A)$
 - 2 $S_B \leftarrow ALG_B(I_B)$
 - 3 $S_A \leftarrow \tau_S(I_A, S_B)$
 - 4 **devolva** S_A
-

Em outras palavras:

- ▶ Se sabemos resolver B , então também sei resolver A !
- ▶ A é mais "fácil" que B .
- ▶ Denotamos $A \preceq B$.



Um problema de origem

Problema (Alocação de Centros (AC))

Entrada: Um grafo bipartido conexo $G = ((X \cup Y), E)$ e uma função de pesos nas arestas $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Saída: Uma função $\phi : X \rightarrow Y$ que aloque cada vértice v em X a um vértice $\phi[v]$ em Y tal que o peso $w(v, \phi[v])$ seja **MÍNIMO**.



Um problema de destino

Problema (Caminho Mínimo (CM))

Entrada: Um grafo direcionado acíclico $G = (V, E)$, uma função de peso $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ nas arestas e um vértice origem s .

Saída: Um vetor d com $d[v] = \text{dist}(s, v)$ para $v \in V$ e um vetor π definindo uma **ÁRVORE DE CAMINHOS MÍNIMOS**.

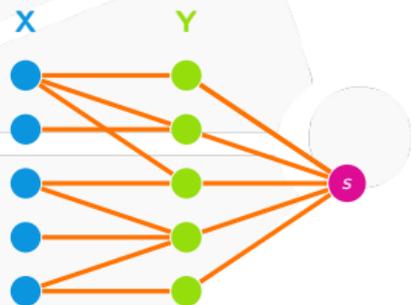


Reduzindo. Transformação da entrada

Recebemos uma **ENTRADA** do problema de origem AC:

Algoritmo: $\tau_I(G, w)$

- 1 $G' \leftarrow G$
 - 2 $w' \leftarrow w$
 - 3 Adicione um novo vértice s a G'
 - 4 **para cada** $v \in Y$
 - 5 Adicione a aresta (s, v) a G'
 - 6 $w'(s, v) \leftarrow 0$
 - 7 **devolva** (G', w', s)
-



Tempo: $O(Y)$.

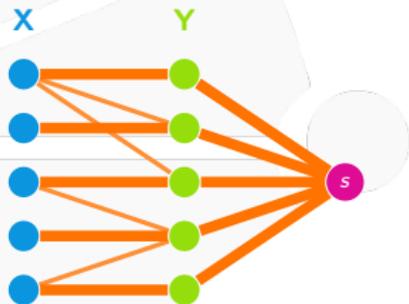


Reduzindo. Transformação da saída

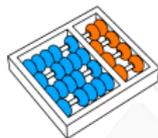
Também recebemos uma **SOLUÇÃO** do problema de destino CM:

Algoritmo: $\tau_S(G, w, d, \pi)$

- 1 **para cada** $v \in X$
 - 2 $\phi[v] \leftarrow \pi[v]$
 - 3 **devolva** ϕ
-



Tempo: $O(X)$.



Reduzindo. $AC \preceq CM$

Seja ALG_{CM} um algoritmo para Caminho Mínimo.

- ▶ ALG_{CM} poderia ser DIJKSTRA, BELLMAN-FORD...
- ▶ Pode ser que **NÃO CONHEÇAMOS** um algoritmo para o problema de destino!

Algoritmo: REDUÇÃO-AC-CM(G, w)

- 1 $(G', w', s) \leftarrow \tau_I(G, w)$
 - 2 $(d, \pi) \leftarrow ALG_{CM}(G', w', s)$
 - 3 $\phi \leftarrow \tau_S(G, w, d, \pi)$
 - 4 **devolva** ϕ
-

Tempo total: [tempo da redução] + [tempo de ALG_{CM}]

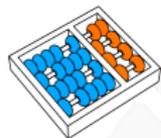


Tempo da redução

Quanto tempo gastamos só com a redução?

- ▶ Não contamos o tempo do algoritmo para o problema B .
- ▶ A **COMPLEXIDADE DE UMA REDUÇÃO** $f(n)$ é a soma dos tempos das transformações τ_I e τ_S .
- ▶ Escrevemos $A \preceq_{f(n)} B$.

No caso de REDUÇÃO-AC-CM: $AC \preceq_{|x|+|y|} CM$.



Reduções polinomiais

Queremos construir algoritmos rápidos. Mas, o que é “rápido”?

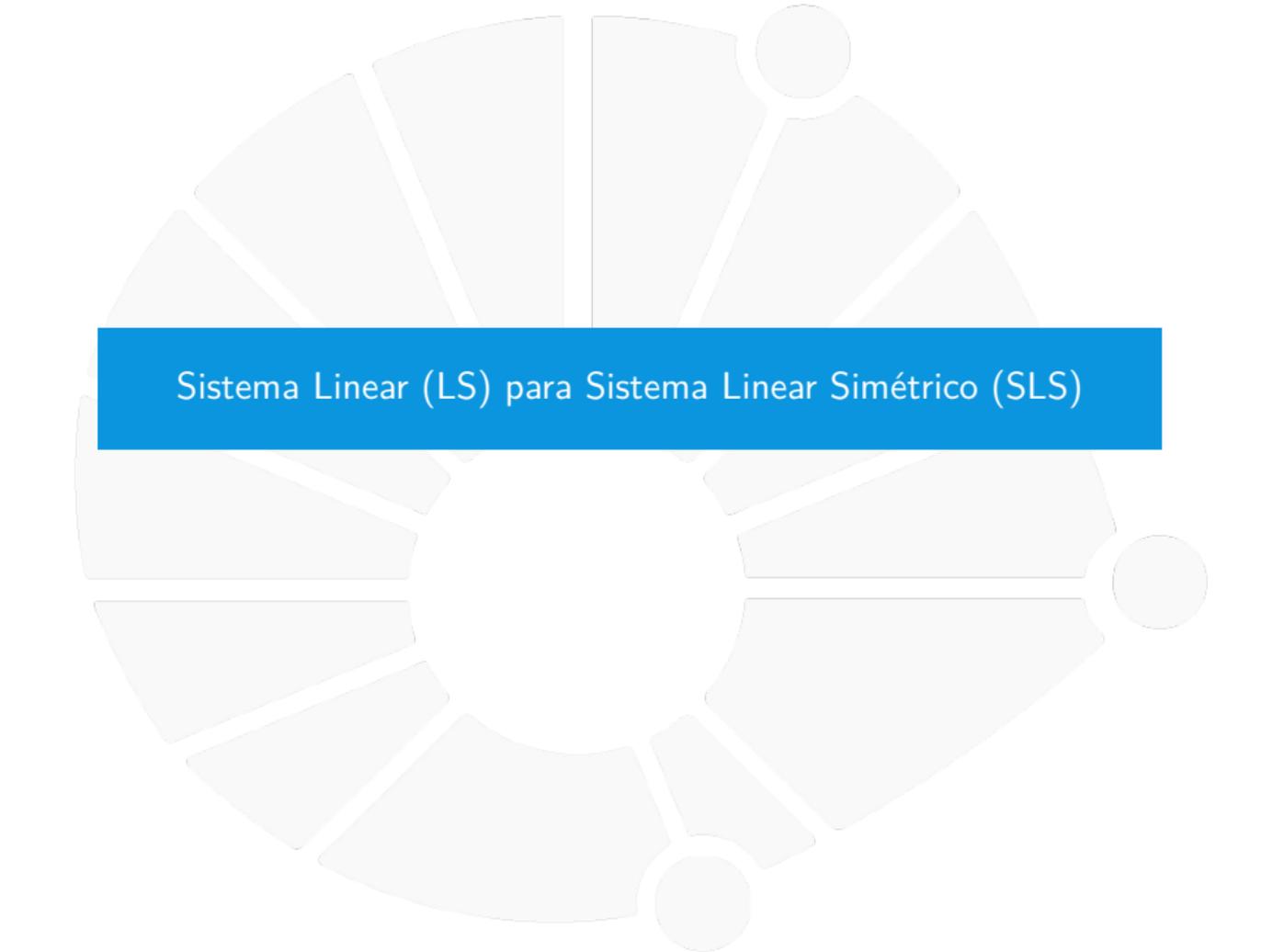
- ▶ Normalmente, dizemos que um algoritmo é rápido se ele executa em **TEMPO POLINOMIAL**.
- ▶ Daí, queremos reduções de tempo polinomial.
- ▶ Nesse caso, escrevemos $A \preceq_{\text{poli}} B$.

Qual a consequência de $A \preceq_{\text{poli}} B$?

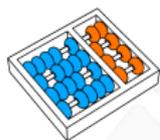
1. Se B tem um algoritmo de tempo polinomial, então A também.
 2. Se A **NÃO** tem algoritmos de tempo polinomial, tampouco B .
- ▶ Isso é útil para distinguir problemas fáceis de difíceis!
 - ▶ Mas, é assunto para depois...



EXEMPLOS DE REDUÇÕES



Sistema Linear (LS) para Sistema Linear Simétrico (SLS)



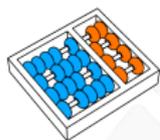
Problema de origem

Problema (Sistema Linear (LS))

Entrada: Uma matriz M de dimensões $n \times n$ com determinante **NÃO** nulo e um vetor b de dimensão n .

Saída: Um vetor x de dimensão n que satisfaz o seguinte sistema linear:

$$Mx = b.$$



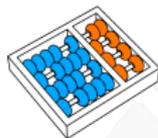
Problema de destino

Problema (Sistema Linear Simétrico (SLS))

Entrada: Uma matriz M **SIMÉTRICA** de dimensões $n \times n$ com determinante **NÃO** nulo e um vetor b de dimensão n .

Saída: Um vetor x de dimensão n que satisfaz o seguinte sistema linear:

$$Mx = b.$$



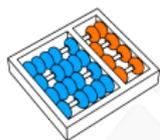
Perguntas

SLS é um caso particular de LS.

- ▶ Logo, trivialmente $SLS \preceq LS$.
- ▶ Será que LS é estritamente mais difícil?

A resposta é **NÃO!**

- ▶ Iremos reduzir LS para SLS.
- ▶ Isso é, $LS \preceq SLS$.



Um fato simples

Lema

Um vetor x é solução de $Mx = b$ se, e só se, x é solução de $M^T Mx = M^T b$.

Demonstração:

- (\Rightarrow)
- ▶ Multiplicamos $Mx = b$ por M^T .
 - ▶ Obtemos $M^T Mx = M^T b$.
- (\Leftarrow)
- ▶ M^T tem determinante não nulo.
 - ▶ Logo, M^T tem inversa Z .
 - ▶ Multiplicamos $M^T Mx = M^T b$ por Z .
 - ▶ Obtendo $Mx = b$

Observe que $M' = M^T M$ é uma matriz simétrica!

 $LS \preceq SLS$

Algoritmo: REDUÇÃO-LS-SLS(M, b)

- 1 $M' \leftarrow M^T M$
 - 2 $b' \leftarrow M^T b$
 - 3 $x \leftarrow \text{ALG}_{\text{SLS}}(M', b')$
 - 4 **devolva** x
-

Concluimos que de fato $LS \preceq SLS$.



Casamento Cíclico de Strings para Casamento de Strings



Problema de origem

Problema (Casamento cíclico de strings (CSM))

Entrada: Um alfabeto Σ , uma cadeia $A = a_0a_1 \dots a_{n-1}$ com n símbolos e uma cadeia $B = b_0b_1 \dots b_{n-1}$ com n símbolos.

Saída: SIM, se B for um **DESLOCAMENTO CÍCLICO** de A , ou NAO, caso contrário. Se SIM, então o número k de letras deslocadas faz parte da saída.

Exemplo:

- ▶ Entrada: $A = acgtact$ e $B = gtactac$
- ▶ Saída: SIM, $k = 2$



Problema de destino

Problema (Casamento de strings (SM))

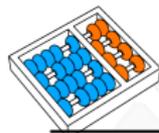
Entrada: UM alfabeto Σ , uma cadeia $A = a_0a_1 \dots a_{n-1}$ com n símbolos e uma cadeia $B = b_0b_1 \dots b_{m-1}$ com m símbolos.

Saída: SIM, se B for **SUBCADEIA** de A , ou NAO, caso contrário. Se SIM, o índice k da primeira ocorrência de B em A , faz parte da saída.

Exemplo:

- ▶ Entrada: $A = acgttacgtacccg$ e $B = tac$
- ▶ Saída: SIM, $k = 4$

Observação: o problema SM pode ser resolvido em tempo $O(n + m)$ pelo algoritmo KMP de Knuth, Morris and Pratt (1977).



$$\text{CSM} \preceq \text{SM}$$

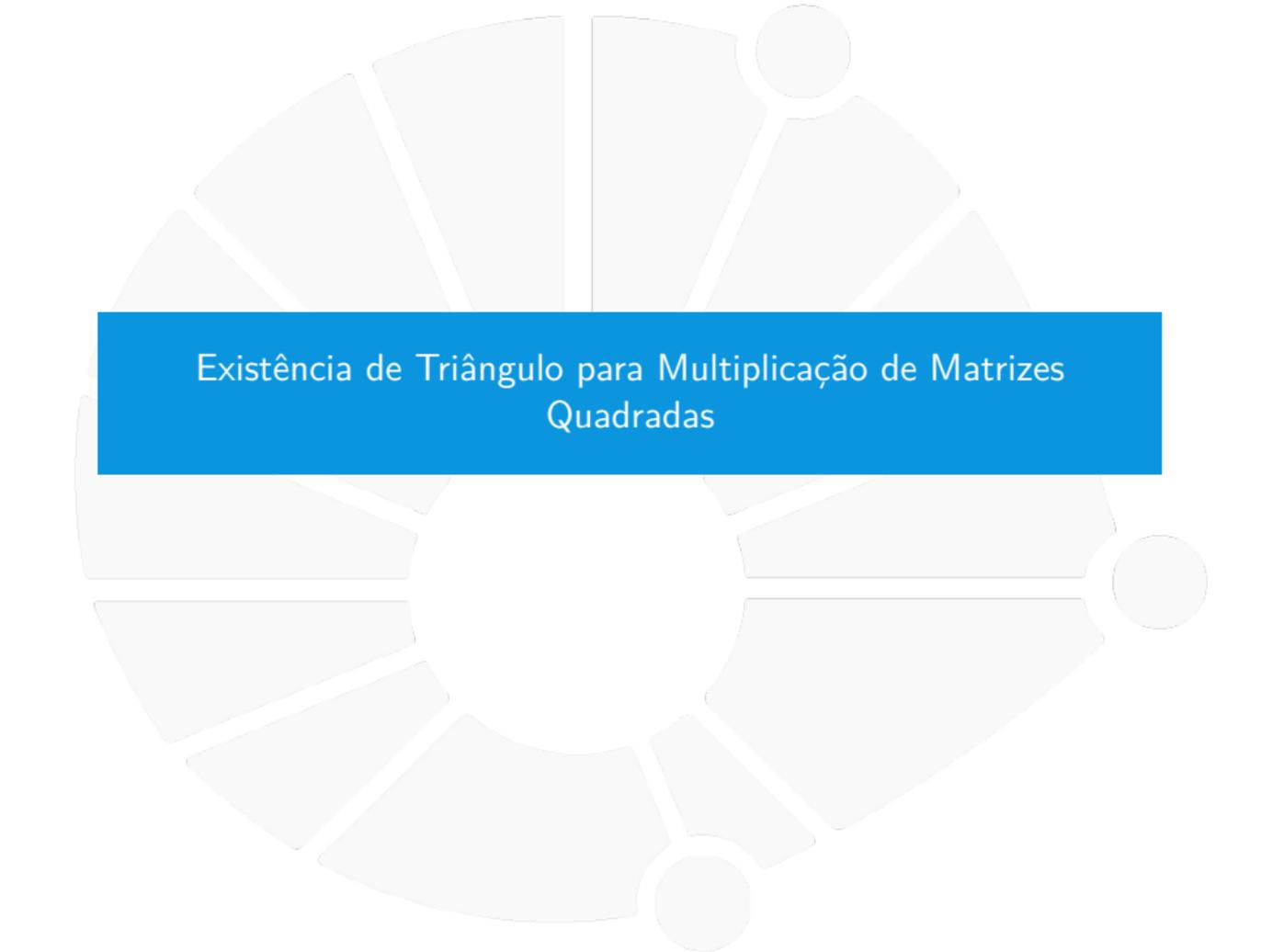
Algoritmo: REDUÇÃO-CSM-SM(A, B, n)

- 1 $A' \leftarrow AA$ \triangleright concatena duas cópias de A
 - 2 $B' \leftarrow B$
 - 3 $n' \leftarrow 2n$
 - 4 $m' \leftarrow n$
 - 5 **devolva** $\text{ALG}_{\text{SM}}(A', n', B', m')$
-

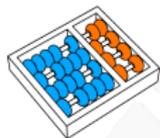
- ▶ **Tempo da redução:** $O(n)$
- ▶ **Correção:** basta mostrar que k é solução de SM se e somente se k também é solução de CSM.

Exemplo:

- ▶ $I_{\text{CSM}} = (\text{acgtact}, \text{gtactac}, 7)$.
- ▶ $I_{\text{SM}} = (\text{acgtactacgtact}, 14, \text{gtactac}, 7)$.
- ▶ $S_{\text{SM}} = S_{\text{CSM}} = (\text{SIM}, 2)$.



Existência de Triângulo para Multiplicação de Matrizes Quadradas



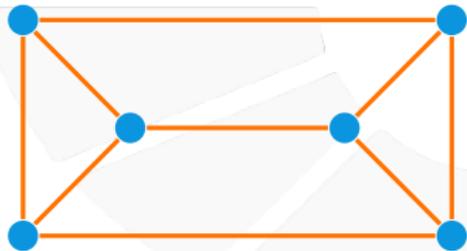
Problema de origem

Problema (Existência de triângulo (PET))

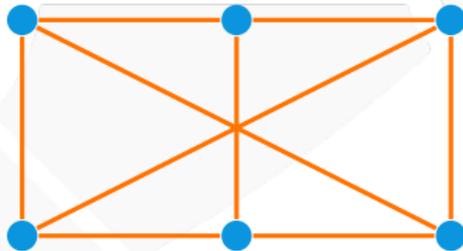
Entrada: Um grafo conexo $G = (V, E)$ sem laços com $n = |V|$ e $m = |E|$.

Saída: Decidir se G contém um triângulo.

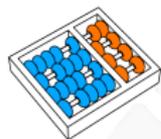
Exemplo:



SIM



NAO



Observações sobre o PET

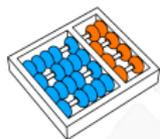
Alguns algoritmos conhecidos:

- ▶ Um algoritmo trivial de tempo $O(n^3)$:
 - ▶ Verifica todas as triplas de vértices.
- ▶ Um algoritmo $O(mn)$:
 - ▶ É muito bom se o grafo é **ESPARSO**.

Vamos supor que o grafo é denso:

- ▶ G será representado por uma matriz de adjacência A :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i, j) \in E \\ 0 & \text{se } (i, j) \notin E \end{cases}$$



Um lema útil

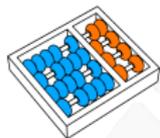
Lema

Seja $A^2 = A \times A$, ou seja, $a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj}$.

Então, $a_{ij}^2 > 0$ se e somente se existe caminho de tamanho dois saindo de i e chegando em j .

Demonstração:

- (\Rightarrow)
- ▶ Se $a_{ij}^2 > 0$, então algum termo $a_{ik} a_{kj}$ é positivo.
 - ▶ Segue que $a_{ik} = 1$ e $a_{kj} = 1$.
 - ▶ Ou seja, há arestas (i, k) e (k, j) .
- (\Leftarrow)
- ▶ Seja um caminho (i, k, j) de i até j .
 - ▶ Então, $a_{ik} = 1$ e $a_{kj} = 1$.
 - ▶ Daí, $a_{ik} a_{kj} > 0$ e, portanto, $a_{ij}^2 > 0$.



Problema destino

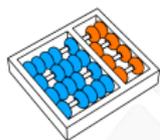
Problema (Multiplicação de Matrizes Quadradas (MMQ))

Entrada: Uma matriz quadrada A de ordem n e uma matriz quadrada B de ordem n .

Saída: O produto $P = A \times B$.

Observações:

- ▶ Há um algoritmo óbvio de complexidade $O(n^3)$.
- ▶ MMQ pode ser resolvida mais rapidamente:
 - ▶ Em tempo $O(n^{2,807})$ pelo algoritmo de Strassen (1969).
 - ▶ Em tempo $O(n^{2,376})$ pelo algoritmo de Coppersmith e Winograd (1990).
 - ▶ Em tempo $O(n^{2,3728639})$ pelo de François Le Gall (2014).

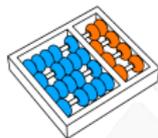


Algoritmo de Strassen para MMQ

Dados: $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$.

Desejamos calcular:

$$A \times B = \begin{bmatrix} A_{11} \times B_{11} + A_{12} \times B_{21} & A_{11} \times B_{12} + A_{12} \times B_{22} \\ A_{21} \times B_{11} + A_{22} \times B_{21} & A_{21} \times B_{12} + A_{22} \times B_{22} \end{bmatrix}.$$



Algoritmo de Strassen para MMQ

Defina:

$$M_1 = (A_{11} + A_{22}) \times (B_{11} + B_{22})$$

$$M_2 = (A_{21} + A_{22}) \times B_{11}$$

$$M_3 = A_{11} \times (B_{12} - B_{22})$$

$$M_4 = A_{22} \times (B_{21} - B_{11})$$

$$M_5 = (A_{11} + A_{12}) \times B_{22}$$

$$M_6 = (A_{21} - A_{11}) \times (B_{11} + B_{12})$$

$$M_7 = (A_{12} - A_{22}) \times (B_{21} + B_{22}).$$

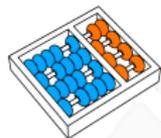
Note que:

$$A_{11} \times B_{11} + A_{12} \times B_{21} = M_1 + M_4 - M_5 + M_7$$

$$A_{11} \times B_{12} + A_{12} \times B_{22} = M_3 + M_5$$

$$A_{21} \times B_{11} + A_{22} \times B_{21} = M_2 + M_4$$

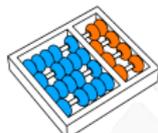
$$A_{21} \times B_{12} + A_{22} \times B_{22} = M_1 - M_2 + M_3 + M_6.$$



Algoritmo de Strassen para MMQ

Complexidade:

$$T(n) = 7 \left(\frac{n}{2} \right) + O(n^2) = O(n^{\log_2 7}) = O(n^{2,807}).$$



PET \preceq MMQ

Observe que só existe triângulo com aresta (i, j) se:

1. Existir um caminho de tamanho 2 de i a j .
2. Existir a aresta (i, j) .

Algoritmo: REDUÇÃO-PET-MMQ(A, n)

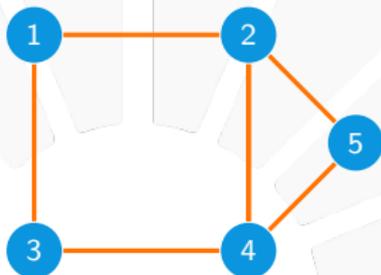
```

1  $A^2 \leftarrow \text{ALG}_{\text{MMQ}}(A, n)$ 
2 para  $i = 1$  até  $n$ 
3   para  $j = 1$  até  $n$ 
4     se  $a_{ij}^2 > 0$  e  $a_{ij} = 1$ 
5       devolva SIM
6 devolva NAO
  
```

- ▶ **Tempo da redução:** $O(n^2)$.
- ▶ **Tempo total:** $O(n^{2,3728639})$.



PET \approx MMQ



A	1	2	3	4	5
1	0	1	1	0	0
2	1	0	0	1	1
3	1	0	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	0	1	0	1	0

A^2	1	2	3	4	5
1	2	0	0	2	1
2	0	3	2	1	1
3	0	2	2	0	1
4	2	1	0	3	1
5	1	1	1	1	2

REDUÇÕES

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

Santiago Valdés Ravelo
<https://ic.unicamp.br/~santiago/ravelo@unicamp.br>

10/24

17



UNICAMP

