

REDUÇÕES E COTAS INFERIORES

MC558 - Projeto e Análise de
Algoritmos II

Santiago Valdés Ravelo
[https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br](https://ic.unicamp.br/~santiago/ravelo@unicamp.br)

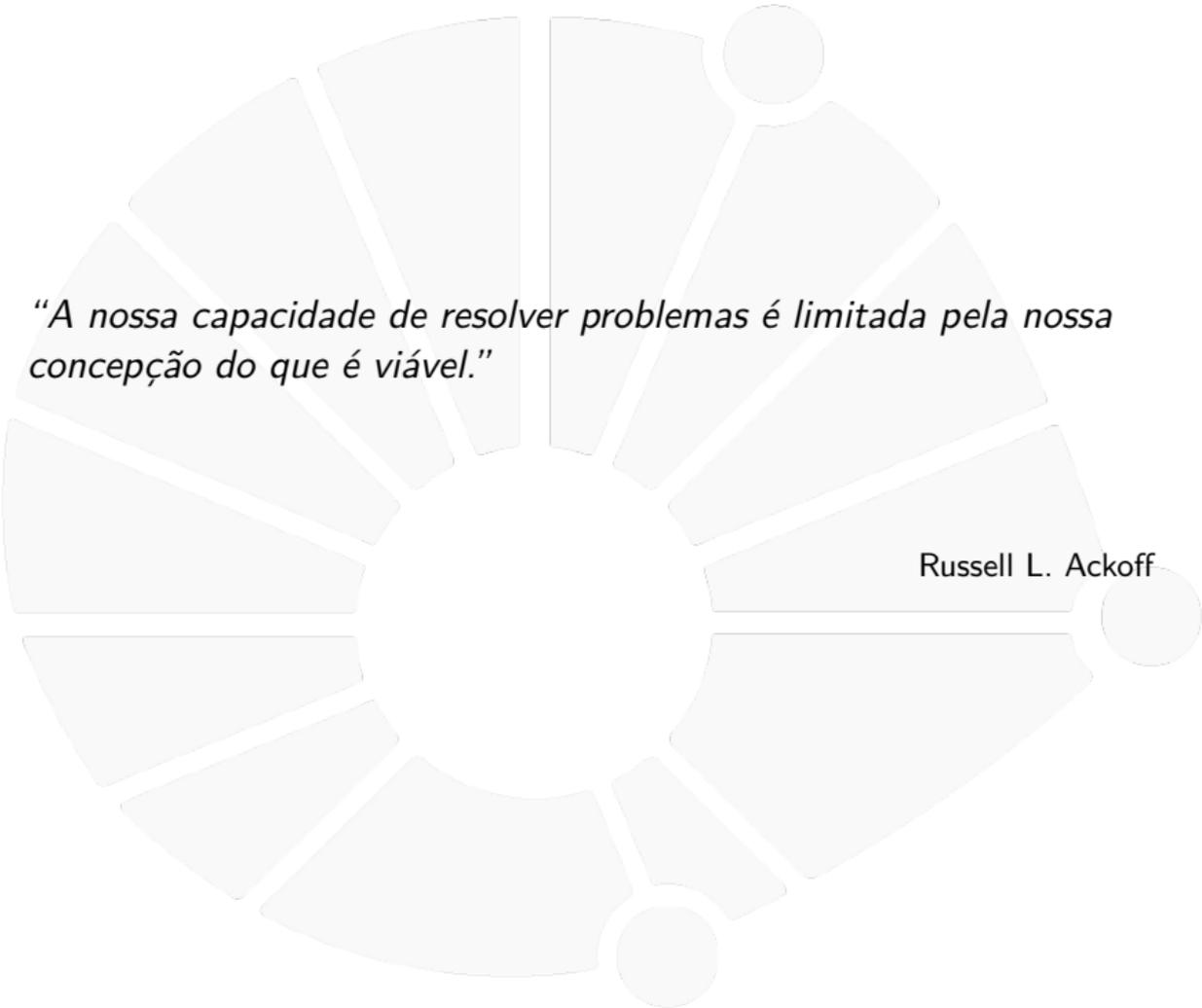
10/24

18



UNICAMP



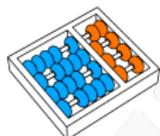


“A nossa capacidade de resolver problemas é limitada pela nossa concepção do que é viável.”

Russell L. Ackoff



ÚLTIMA AULA



Redução

Problema A:

- ▶ Instância: I_A
- ▶ Solução: S_A

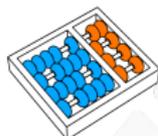
Problema B:

- ▶ Instância: I_B
- ▶ Solução: S_B

Definição

Uma **REDUÇÃO** do problema A ao problema B é um par de sub-rotinas τ_I e τ_S tais que:

- ▶ τ_I transforma uma instância I_A de A em uma instância I_B de B.
- ▶ τ_S transforma uma solução S_B de I_B em uma solução S_A de I_A .



Redução como um algoritmo

Como podemos resolver o problema A ?

1. Suponha que existe um algoritmo ALG_B para o problema B .
2. Podemos usar ALG_B como uma **CAIXA-PRETA**.

Algoritmo: REDUÇÃO(I, A)

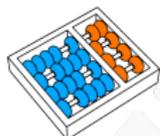
- 1 $I_B \leftarrow \tau_I(I_A)$
 - 2 $S_B \leftarrow ALG_B(I_B)$
 - 3 $S_A \leftarrow \tau_S(I_A, S_B)$
 - 4 **devolva** S_A
-

Em outras palavras:

- ▶ Se sabemos resolver B , então também sei resolver A !
- ▶ A é mais "fácil" que B .
- ▶ Denotamos $A \preceq B$.



Multiplicação de Matrizes para Multiplicação de Matrizes Simétricas



Considerando o caso particular

Considere um caso particular de MMQ:

Problema (Multiplicação de Matrizes Simétricas (MMS))

Entrada: Uma matriz **SIMÉTRICA** quadrada A de ordem m e uma matriz **SIMÉTRICA** quadrada B de ordem m .

Saída: O produto $P = A \times B$.

Claro que $MMS \preceq_{m^2} MMQ$.

- ▶ Portanto, MMQ é pelo menos tão difícil quanto MMS.
- ▶ Será que MMS também é pelo menos tão difícil quanto MMQ?



Reduzindo MMQ \preceq MMS

1. Considere uma instância de MMQ, $I_{MMQ} = (A, B, n)$.
2. Construa uma instância de MMS, $I_{MMS} = (A', B', 2n)$, em que

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B' = \begin{bmatrix} 0 & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix}.$$

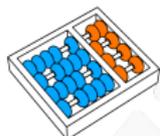
3. A solução de MMS é:

$$P' = A'B' = \begin{bmatrix} AB & 0 \\ 0 & A^T B^T \end{bmatrix}.$$

4. Devolva o primeiro bloco da matriz P' .

Tempo da redução: $O(n^2)$.

- ▶ Construir I_{MMQ} leva tempo $O(n^2)$.
- ▶ Copiar o bloco e P' leva tempo $O(n^2)$.



Interpretando os fatos

- ▶ Suponha que exista um algoritmo para MMS de tempo $O(T(m))$ para algum polinômio $T(m)$.
 - ▶ Lembre que m é a ordem das matrizes A' e B' .
- ▶ Quão pequeno pode ser $T(m)$?
 - ▶ É claro que $T(m) = \Omega(m^2)$, pois é preciso ler a entrada.
 - ▶ Será que pode ser mais rápido que $o(m^{2,3728639})$?

Para responder isso, usamos a redução $MMQ \preceq_{n^2} MMS$:

- ▶ Ela implica em um algoritmo de tempo total $O(T(m) + n^2)$.
- ▶ Como $m = 2n$, tempo é $O(T(2n) + n^2) = O(T(n) + n^2)$.
- ▶ Como $T(n)$ domina n^2 , o tempo é simplesmente $O(T(n))$.

Ou seja: Um algoritmo com complexidade $T(m)$ para MMS implica em um algoritmo com complexidade $T(n)$ para MMQ!



REDUÇÕES PARA
OBTENÇÃO DE COTA
INFERIOR



Uma redução $A \preceq_{f(n)} B$

Suponha que:

- ▶ A tem cota inferior $h(n)$.
- ▶ ALG_B resolve B em tempo $g(n)$.
- ▶ A redução gasta tempo $f(n) \leq \frac{h(n)}{2}$.

Então, um algoritmo baseado na redução $A \preceq_{f(n)} B$ tem tempo:

$$f(n) + g(n) \geq h(n) \Rightarrow g(n) \geq h(n) - f(n) \geq h(n) - \frac{h(n)}{2} = \frac{h(n)}{2}$$

Conclusão: $g(n) \geq \Omega(h(n))$.



Transferindo cotas inferiores

Teorema

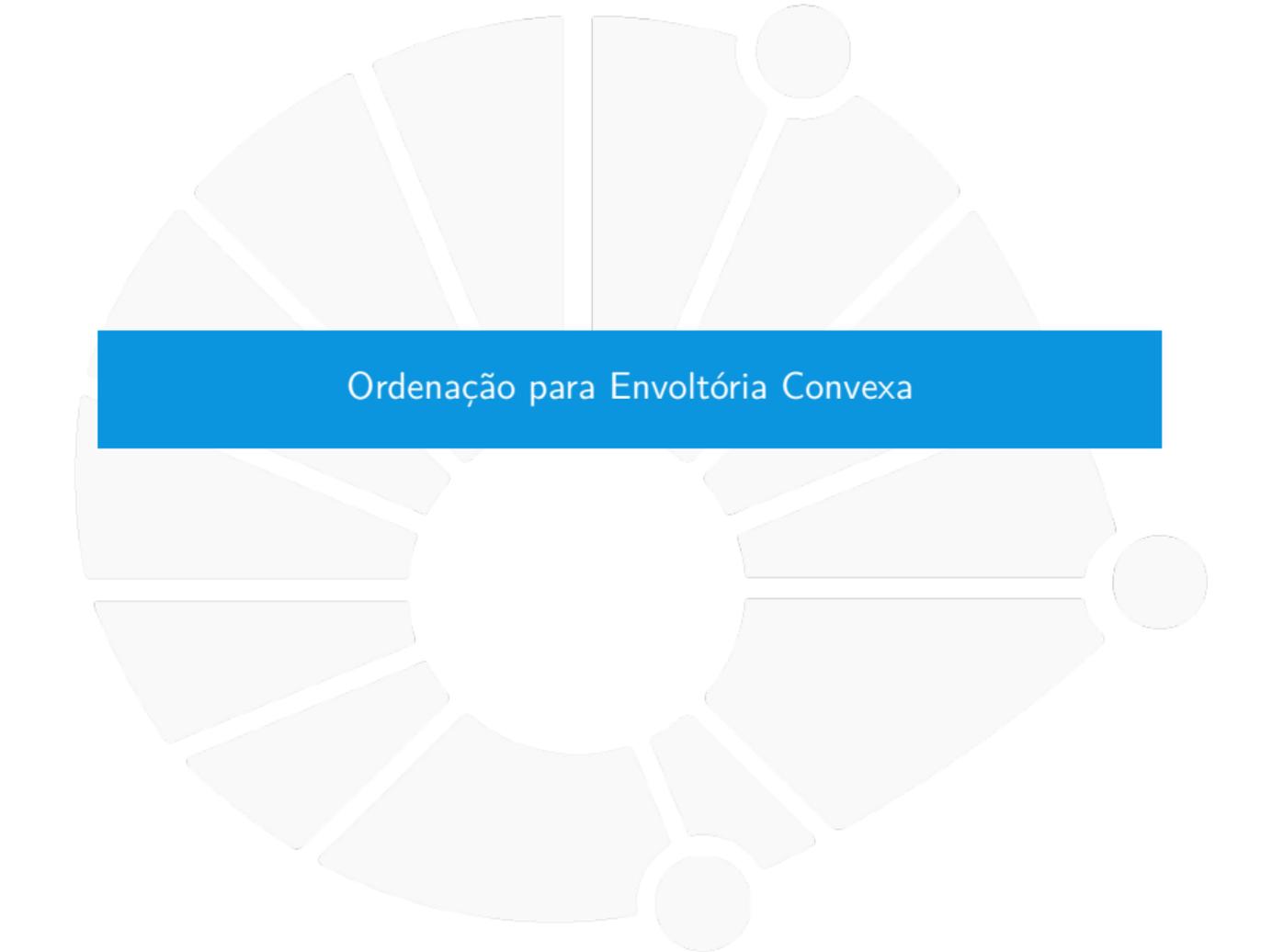
Considere dois problemas A e B e suponha que

1. $h(n)$ é cota inferior para A e
2. $A \preceq_{f(n)} B$,
3. $f(n) = o(h(n))$.

Então $h(n)$ é cota inferior para B .

Observações:

- ▶ A cota inferior depende do **MODELO DE COMPUTAÇÃO**.
- ▶ Supomos o mesmo modelo para ambos problemas.



Ordenação para Envoltória Convexa



Problema de origem

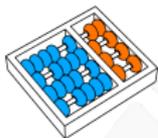
Problema (Ordenação (ORD))

Entrada: Uma sequência $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n elementos comparáveis.

Saída: Uma permutação de X cujos elementos estejam ordenados.

Observações:

- ▶ Só podemos comparar dois elementos por uma sub-rotina caixa-preta de tempo constante (chamada **ORÁCULO**).
- ▶ Esse problema tem cota inferior $\Omega(n \log n)$.

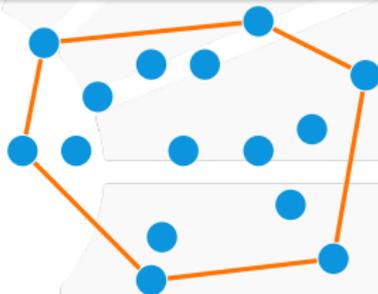
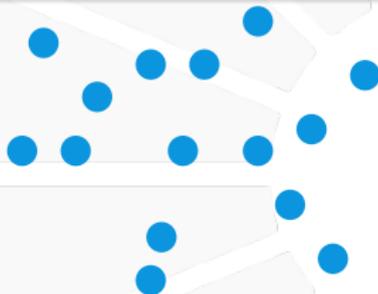


Problema de destino

Problema (Envoltória Convexa (EC))

Entrada: Um conjunto $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ de n pontos no plano.

Saída: **MENOR POLÍGONO CONVEXO** que contém os n pontos.



Observações:

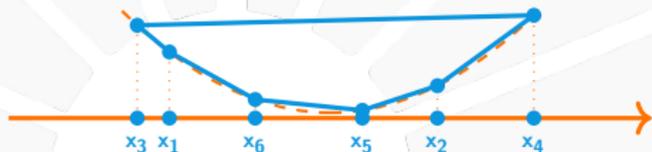
- ▶ Os vértices são representados em ordem anti-horária.
- ▶ Problema clássico de Geometria Computacional.
- ▶ Pode ser resolvido em tempo $O(n \log n)$.



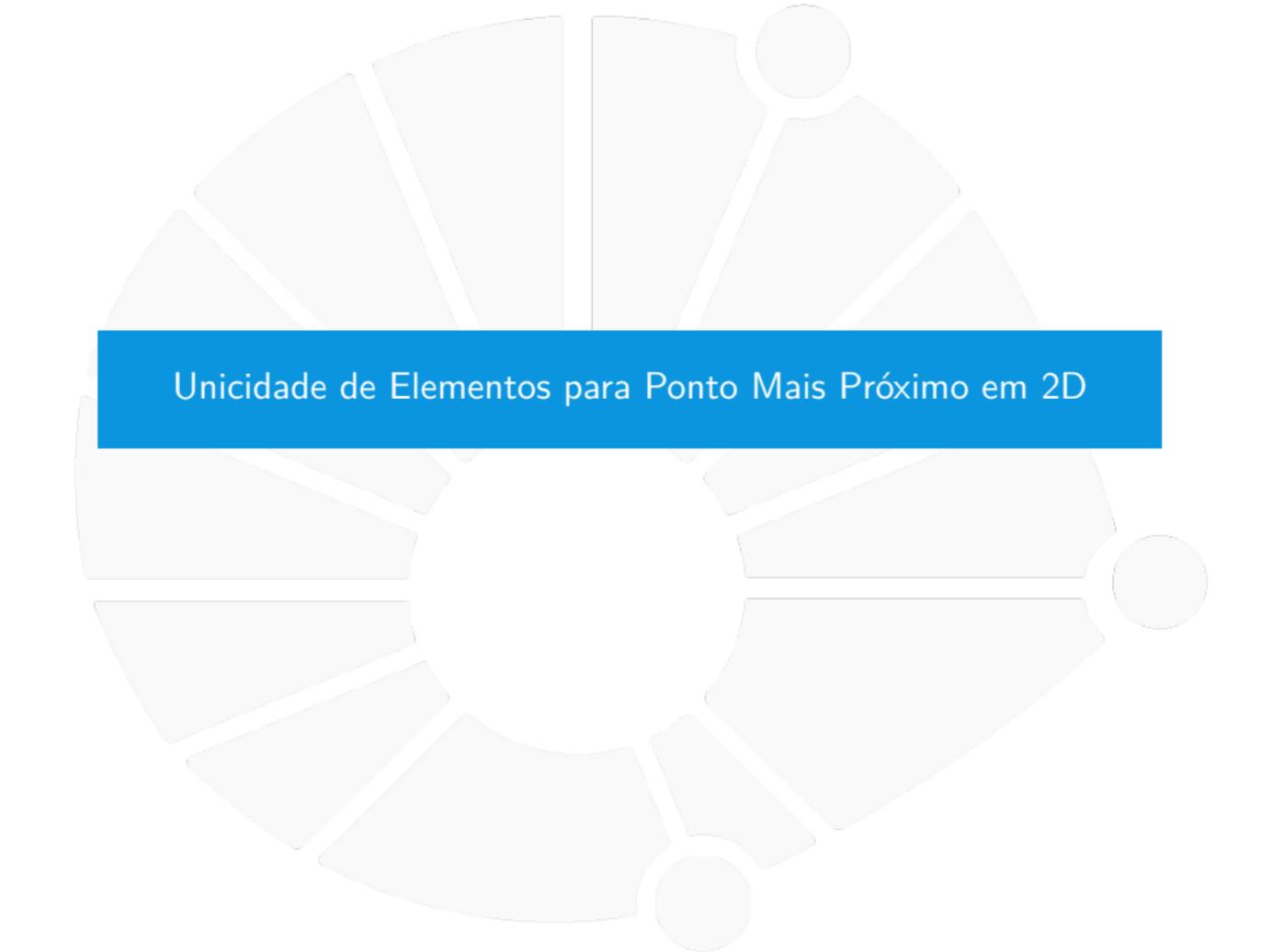
ORD \preceq_n EC

Reduzindo ORD \preceq_n EC:

1. Considere uma instância de $I_{ORD} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.
2. Construa instância $I_{EC} = \{(x_1, x_1^2), (x_2, x_2^2), \dots, (x_n, x_n^2)\}$.



3. Resolva I_{EC} e obtenha solução S_{EC} , que é uma lista **CÍCLICA** dos vértices do polígono.
 4. Determine índice i de S_{EC} do ponto com menor abscissa.
 5. Liste os todos os índices a partir de i .
- ▶ O tempo da redução é $O(n)$.
 - ▶ Portanto $\Omega(n \log n)$ também é **COTA INFERIOR** para EC.



Unicidade de Elementos para Ponto Mais Próximo em 2D



Problema de origem

Problema (Unicidade de Elementos (UE))

Entrada: Uma sequência $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n elementos comparáveis.

Saída: Decidir se os elementos são **TODOS** distintos.

Observações:

- ▶ Só podemos comparar dois elementos por uma sub-rotina caixa-preta de tempo constante (chamada **ORÁCULO**).
- ▶ Esse problema tem cota inferior $\Omega(n \log n)$.
- ▶ O problema pode ser resolvido em tempo $O(n \log n)$ (como?).



Problema de destino

Problema (Par Mais Próximo (PMP))

Entrada: Uma coleção $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ de n pontos no plano.

Saída: Par de pontos i e j que estejam **A MENOR DISTÂNCIA**.



Observação:

- ▶ Pode ser resolvido em tempo $O(n \log n)$



Reduzindo $UE \preceq_n$ PMP

1. Considere instância $I_{UE} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.
2. Construa instância $I_{PMP} = \{(x_1, 0), (x_2, 0), \dots, (x_n, 0)\}$.



3. Resolva I_{PMP} e obtenha par de pontos $(x_i, 0), (x_j, 0)$.
 4. Calcule a **DISTÂNCIA** d entre os pontos:
 - (a) Se $d = 0$, então devolva NAO.
 - (b) Se $d > 0$, devolva SIM.
- ▶ O tempo da redução é $O(n)$.
 - ▶ Portanto $\Omega(n \log n)$ também é **COTA INFERIOR** para PMP.



3-Soma para Colinearidade



Problema de origem

Problema (3-Soma (3SUM))

Entrada: Uma sequência $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n reais.

Saída: Determinar se existem índices distintos i, j e k tais que:

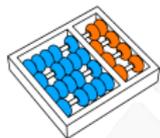
$$x_i + x_j + x_k = 0.$$

Exemplo:

- ▶ Instância $X = (4, -6, 1, 8, 7, -5)$
- ▶ Solução $i = 1, j = 3$ e $k = 6$

Observações:

- ▶ Pode ser resolvido em $O(n^2)$ (como?).
- ▶ Acreditava-se que $\Omega(n^2)$ era **COTA INFERIOR**.
- ▶ Pode ser resolvido em $o(n^2)$ (Grønlund e Pettie, 2014).
- ▶ Ainda se acredita que não dá pra fazer melhor que $n^{2-\Omega(1)}$.



Problema de destino

Problema (Colinearidade Não Horizontal (COL))

Entrada: Um conjunto $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ de n pontos no plano.

Saída: Determinar se três pontos estão em alguma **RETA NÃO HORIZONTAL**.



Observações:

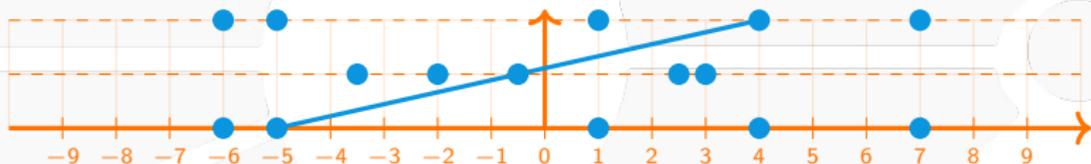
- ▶ Pode ser resolvido em tempo $O(n^2)$.
- ▶ Acredita-se que $\Omega(n^2)$ é **COTA INFERIOR**.



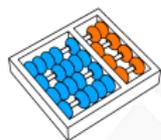
Reduzindo 3SUM \preceq_n COL

1. Considere instância $I_{3SUM} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.
2. Construa instância $I_{COL} = \{(x_i, 0), (-x_i/2, 1), (x_i, 2) : i = 1, 2, \dots, n\}$.

Exemplo: $X = (4, -6, 1, 8, 7, -5)$:



3. Resolva I_{COL} e obtenha S_{COL} .
4. Se a resposta S_{COL} for SIM, responda SIM, e se a resposta S_{COL} for NAO, responda NAO.



3SUM \preceq_n COL (cont)

- ▶ A solução de I_{COL} (se houver) é uma tripla de pontos colineares. Claramente, cada um desses pontos deve estar em um dos eixos horizontais. Ou seja, tem a forma:

$$(x_i, 0), (-x_j/2, 1), (x_k, 2).$$

Portanto, $x_i + x_j + x_k = 0$.

- ▶ Se $x_i + x_j + x_k = 0$, então, os pontos citados são colineares.



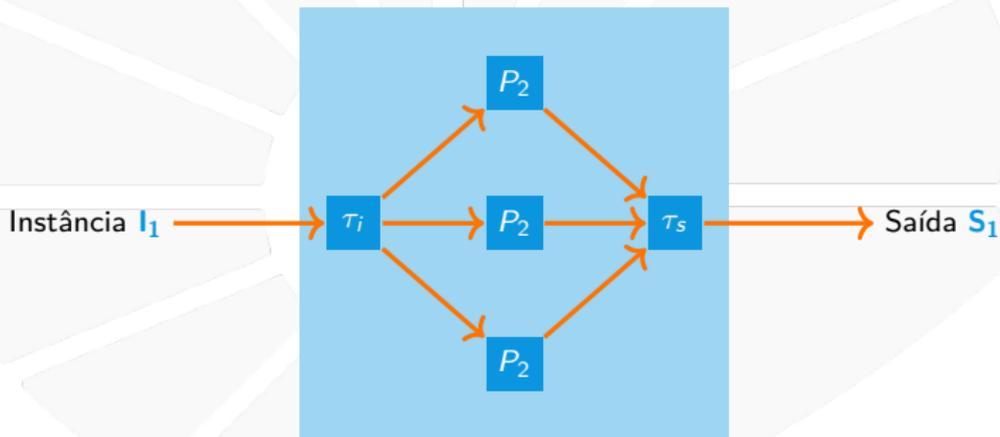
$$3\text{SUM} \preceq_n \text{COL}$$

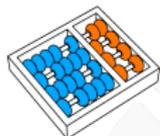
- ▶ É claro que $\Omega(n)$ é uma cota inferior para 3SUM.
- ▶ E **SE** houver cota inferior $\Omega(h(n))$ maior para 3SUM?
 - ▶ A redução gasta tempo $f(n) = O(n)$.
 - ▶ Nesse caso, $f(n) = o(h(n))$.
 - ▶ Então, $\Omega(h(n))$ seria cota inferior para COL
- ▶ Mas só conhecemos a cota trivial $\Omega(n)$ para 3SUM.



Redução de Turing

Podemos reduzir P_1 para P_2 fazendo várias aplicações de P_2 .





Exemplo de redução de Turing

Problema (Multiplicação de Inteiros)

Entrada: Dois inteiros a e b .

Saída: O produto $a \cdot b$.

Problema (Quadrado)

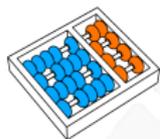
Entrada: Um inteiro x .

Saída: O quadrado x^2 .

Redução:

- ▶ Podemos reduzir Multiplicação de Inteiros para Quadrado.
- ▶ Fazemos apenas um número constante de somas, subtrações e divisão por dois

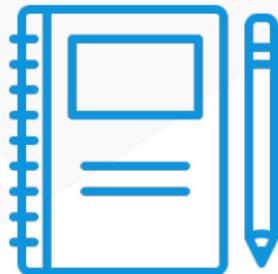
$$a \cdot b = \frac{(a + b)^2 - a^2 - b^2}{2}$$

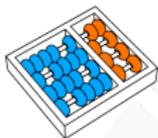


Refletindo sobre reduções e cotas inferiores



Vamos fazer alguns exercícios?

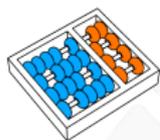




Exercício 1

O problema 3SUMplus consiste em: dados uma sequência $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de reais e um valor real b , determinar se existem três índices distintos i, j e k tais que $x_i + x_j + x_k = b$.

1. Mostre que $3SUM \preceq_n 3SUMplus$.
2. Mostre que $3SUMplus \preceq_n 3SUM$.
3. Suponha que o Professor Sabit Udo descobriu uma **COTA INFERIOR** de $\Omega(n^{1,9})$ para 3SUMplus. Nesse caso, quais das afirmações abaixo são verdadeiras?
 - (i) Não existe algoritmo $O(n^{1,5})$ para 3SUMplus.
 - (ii) Não existe algoritmo $O(n^{1,5})$ para 3SUM.
 - (iii) Existe um algoritmo $O(n^{1,9})$ para 3SUMplus.
 - (iv) Existe um algoritmo $O(n^{1,9})$ para 3SUM.



Exercício 2

Considere os problemas:

Problema (Sistema de Representantes Distintos (SRD))

Entrada: Uma coleção de conjuntos S_1, \dots, S_k .

Saída: Conjunto $R = \{r_1, \dots, r_k\}$ tal que $r_i \in S_i$ para $i = 1, \dots, k$.

Problema (Emparelhamento Máximo (EM))

Entrada: Um grafo bipartido $G = (X \cup Y, E)$ com bipartição X e Y .

Saída: Um subconjunto de arestas M que não compartilham vértices, tal que $|M|$ seja máximo.



Exercício 2

Mostre que $\text{SRD} \preceq \text{EM}$.

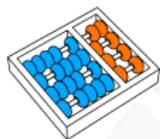
Um fato útil, pode ser o seguinte teorema:

Teorema (Teorema de Hall)

Uma coleção S_1, \dots, S_k tem um SRD se e somente se

$$|\{S_{i_1} \cup \dots \cup S_{i_m}\}| \geq m$$

*para **TODA** coleção $\{i_1, \dots, i_m\} \subseteq \{1, 2, 3, \dots, k\}$.*



Exercício 3

Considere os seguintes problemas:

Problema (Edição de String)

Entrada: Duas strings A e B .

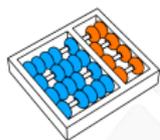
Saída: Menor sequência de operações para transformar A em B , onde as possíveis operações são: **inserção** de um caractere, **remoção** de um caractere, ou **troca** de um caractere por outro.

Problema (Caminho Mínimo)

Entrada: Um grafo direcionado $G(V, E)$, um peso $c_{ij} \geq 0$ para cada aresta $(i, j) \in E$, dois vértices s e t .

Saída: Um caminho de s a t em G de comprimento mínimo.

Mostre como reduzir Edição de String a Caminho Mínimo.



Exercício 4

Considere os seguintes problemas:

Problema (Ordenação)

Entrada: Uma sequência de números naturais distintos

x_1, x_2, \dots, x_n .

Saída: Uma permutação ordenada dos números de entrada.

Problema (Codificação de Huffman)

Entrada: Um alfabeto C e uma tabela de frequências f .

Solução: Uma codificação de comprimento variável que minimize o tamanho do texto codificado.

Mostre como reduzir Ordenação para Codificação de Huffman.

REDUÇÕES E COTAS INFERIORES

MC558 - Projeto e Análise de
Algoritmos II

Santiago Valdés Ravelo
[https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br](https://ic.unicamp.br/~santiago/ravelo@unicamp.br)

10/24

18



UNICAMP

