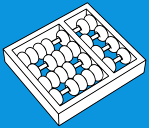
Programação linear

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

10/24

19



Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

"Se o sistema apresentar uma estrutura que possa ser representada por um equivalente matemático, chamado de modelo matemático, e se o objetivo também puder ser quantificado dessa forma, então algum método computacional pode ser desenvolvido para escolher a melhor sequência de ações entre as alternativas."

George B. Dantzig.

Otimizando um portfólio de investimentos

Exemplo

Suponha que:

- Temos 100.000 reais para investir em ações.
- As ações selecionadas e a porcentagem de retorno esperado em um ano são:

Empresa	Retorno (em %)
emp_1 = Petrobrás (petróleo/estatal)	9,0%
emp_2 = Vale do Rio Doce (siderurgia)	10,2%
emp_3 = Votorantim (siderurgia)	6,5%
emp_4 = Texaco (petróleo)	9,5%
emp_5 = Sanasa (água/estatal)	8,5%

Algumas restrições

A recomendação dos especialistas é a seguinte:

- Invista pelo menos 25% e no máximo 55% em estatais.
- *Petrobrás* e *Texaco* são empresas do mesmo setor (petróleo); o investimento nas duas não deve passar de 55%.
- *Vale do Rio Doce* e *Votorantim* são do mesmo setor (siderurgia); o investimento nas duas não deve passar de 45%.
- *Apesar da Vale do Rio Doce* ter a maior taxa de retorno, há boatos que ela pode estar maquiando faturamento. Recomenda-se que a quantidade de investimento nela não passe de 60% do total de investimento feito em empresas de siderurgia.

Escrevendo formalmente

VARIÁVEIS:

- x_1 quantidade de investimento na *Petrobrás*.
- x_2 quantidade de investimento na *Vale do Rio Doce*.
- x_3 quantidade de investimento na *Votorantim*.
- x_4 quantidade de investimento na *Texaco*.
- x_5 quantidade de investimento na *Sanasa*.

FUNÇÃO OBJETIVO:

- Maximizar o lucro esperado:
  maximize $0{,}090x_1 + 0{,}102x_2 + 0{,}065x_3 + 0{,}095x_4 + 0{,}085x_5$.

RESTRIÇÕES:

- As quantidades $x_1, \ldots, x_5$ devem ser valores válidos e devem satisfazer recomendações dos especialistas.

Restrições impostas por especialistas

- Invista pelo menos 25% e no máximo 55% em estatais:
$$x_1 + x_5 \geq 25000$$
$$x_1 + x_5 \leq 55000$$

- *Petrobrás* e *Texaco* são empresas do mesmo setor (petróleo); o investimento nas duas não deve passar de 55%:
$$x_1 + x_4 \leq 55000$$

- *Vale do Rio Doce* e *Votorantim* são do mesmo setor (siderurgia); o investimento nas duas não deve passar de 45%:
$$x_2 + x_3 \leq 45000$$

Restrições impostas por especialistas

- Apesar da *Vale do Rio Doce* ter a maior taxa de retorno, há boatos que ela pode estar maquiando faturamento. Recomenda-se que a quantidade de investimento nela não passe de 60% do total de investimento feito em empresas de siderurgia:

$$x_2 \leq 0{,}6(x_2 + x_3)$$

que o mesmo que

$$-0{,}4x_2 + 0{,}6x_3 \geq 0$$

DEMAIS RESTRIÇÕES:

- Total investido é 100.000:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100000$$

- Nenhuma quantidade pode ser negativa:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0$$

Formulação Linear

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & 0{,}090x_1 + 0{,}102x_2 + 0{,}065x_3 + 0{,}095x_4 + 0{,}085x_5 \\
\text{sujeito a} & \left\{
\begin{array}{rrrrrcl}
x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 + & x_5 & = & 100000 \\
x_1 + & & & & x_5 & \geq & 25000 \\
x_1 + & & & & x_5 & \leq & 55000 \\
x_1 + & & & x_4 & & \leq & 55000 \\
 & x_2 + & x_3 & & & \leq & 45000 \\
 & -0{,}4x_2 + & 0{,}6x_3 & & & \geq & 0 \\
x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0 & x_4 \geq 0 & x_5 \geq 0 & &
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

Resolvendo-se obtemos uma lucro estimado de 9094 reais investindo:

$x_1 = 0$ na *Petrobrás*, $x_2 = 12000$ na *Vale do Rio Doce*,
$x_3 = 8000$ na *Votorantim*, $x_4 = 55000$ na *Texaco* e
$x_5 = 25000$ na *Sanasa*.

Programação linear

Motivação

A programação linear:

- Resolve de forma exata muitos problemas.
- Faz parte dos principais métodos para obter soluções ótimas.
- Faz parte dos principais métodos para obter soluções aproximadas.
- Obtém excelentes delimitantes para soluções ótimas.
- Pode ser resolvida muito rapidamente.
- Há diversos programas livres e comerciais.

Definição

PL

No **PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR** (PL) de minimização (maximização), é dada uma matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, vetores $c = (c_i) \in \mathbb{Q}^n$ e $b = (b_i) \in \mathbb{Q}^m$, e queremos encontrar um vetor $\mathbf{x} = (\mathbf{x_i}) \in \mathbb{Q}^n$ tal que:

$$
\begin{array}{ll}
\min(\max) & c_1\mathbf{x_1} + c_2\mathbf{x_2} + \cdots + c_n\mathbf{x_n} \\
\text{s.a:} & \left\{ \begin{array}{lcl}
a_{11}\mathbf{x_1} + a_{12}\mathbf{x_2} + \cdots + a_{1n}\mathbf{x_n} & \leq & b_1 \\
a_{21}\mathbf{x_1} + a_{22}\mathbf{x_2} + \cdots + a_{2n}\mathbf{x_n} & \geq & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}\mathbf{x_1} + a_{m2}\mathbf{x_2} + \cdots + a_{mn}\mathbf{x_n} & = & b_m \\
\mathbf{x_i} \in \mathbb{Q} & &
\end{array} \right.
\end{array}
$$

ou decidir que não existe um tal vetor.

Exemplo. Almoço

Considere um almoço que consiste em salada e sopa, com as seguintes informações nutricionais:

- Cada $100g$ de salada, há $80mcg$ de vitamina **A**, $0.4mcg$ de vitamina **B** e $4mg$ de gorduras.
- Cada $100g$ de sopa, há $60mcg$ de vitamina **A**, $0.2mcg$ de vitamina **B** e $6mg$ de gorduras.

Os requerimentos nutricionais são de pelo menos $450mcg$ de vitamina **A** e $2mcg$ de vitamina **B**, enquanto se deve evitar o consumo de mais de $700g$ de comida.

Quantas gramas de salada e quantas de sopa devem ser consumidas, visando satisfazer os requerimentos nutricionais e minimizar o total de gorduras consumidas?

Exemplo. Almoço

Tabela de informação nutricional:

	Vitamina A	Vitamina B	Gorduras
	$80mcg/100g$	$0.4mcg/100g$	$4mg/100g$
	$60mcg/100g$	$0.2mcg/100g$	$6mg/100g$

Os requerimentos nutricionais são: pelo menos $450mcg$ de vitamina **A** e $2mcg$ de vitamina **B**, além de evitar consumir mais de $700g$ de comida.

Exemplo. Almoço
Formulação. Variáveis

x_{salada}, quantidade (em $100g$) de salada para o almoço.

x_{sopa}, quantidade (em $100g$) de sopa para o almoço.

Exemplo. Almoço

Formulação. Função objetivo

	Gorduras
	$4mg/100g$
	$6mg/100g$

$$\min \quad 4x_{\text{salada}} + 6x_{\text{sopa}}$$

Exemplo. Almoço
Formulação. Restrições de requerimentos vitamínicos

	Vitamina A	Vitamina B
	$80mcg/100g$	$0.4mcg/100g$
	$60mcg/100g$	$0.2mcg/100g$
Requerido	$450mcg$	$2mcg$

$$80x_{\text{salada}} + 60x_{\text{sopa}} \geq 450$$
$$0.4x_{\text{salada}} + 0.2x_{\text{sopa}} \geq 2$$

Exemplo. Almoço
Formulação. Restrições de peso máximo

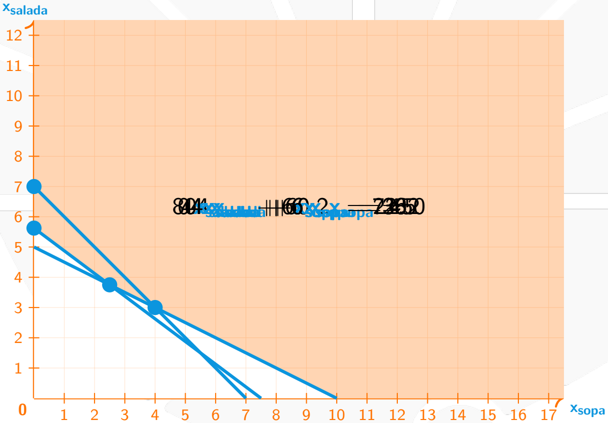
O almoço não deve pesar mais que $700g$:

$$\mathbf{x}_{\mathbf{salada}} + \mathbf{x}_{\mathbf{sopa}} \leq 7$$

Exemplo. Almoço
Formulação

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 4x_{salada} + 6x_{sopa} \\
s.a: \quad & \\
& 80x_{salada} + 60x_{sopa} \geq 450 \\
& 0.4x_{salada} + 0.2x_{sopa} \geq 2 \\
& x_{salada} + x_{sopa} \leq 7 \\
& x_{salada}, x_{sopa} \geq 0
\end{aligned}
$$

Exemplo. Interpretação gráfica



$x_{salada}, x_{sopa} \geq 0$

$x_{salada} + x_{sopa} \leq 7$

$0.4x_{salada} + 0.2x_{sopa} \geq 2$

$80x_{salada} + 60x_{sopa} \geq 450$

Função objetivo:

$\min \quad 4x_{salada} + 6x_{sopa}$

Exemplo. Almoço generalizado

Suponha que há m pratos e n nutrientes, onde cada $100g$ do i-**ésimo** prato, há $\eta_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$ unidades do j-**ésimo** nutriente e $\mathbf{f_i}$ miligramas de gordura. Considere que é necessário o consumo de pelo menos $\mathbf{N_i}$ unidades do i-**ésimo** nutriente e que o peso total do almoço não pode ser maior que W gramas.

Quantas gramas de cada prato devem ser consumidas de forma que se satisfaçam os requerimentos alimentares e se minimize o consumo de gorduras?

Exemplo. Formulação

Variáveis:
$\mathbf{x_i}$, quantidade (em $100g$) do i-**ésimo** prato para o almoço.

Programa linear:

$$
\begin{array}{rll}
\min & \sum_{i=1}^{m} f_i \mathbf{x_i} & \\
s.a: & & \\
& \sum_{i=1}^{m} \eta_{i,j} \mathbf{x_i} \geq N_j & \forall 1 \leq j \leq n \\
& \sum_{i=1}^{m} \mathbf{x_i} \leq \frac{W}{100} & \\
& \mathbf{x_i} \geq 0 & \forall 1 \leq i \leq m
\end{array}
$$

Classificação

Dado um programa linear, temos três possibilidades:

- O problema ié **INVIÁVEL**, ou seja, o conjunto de soluções viáveis é vazio.
- O problema é **ILIMITADO**, ou seja, o conjunto de soluções viáveis não é vazio e, para qualquer solução viável x, existe uma solução viável x' tal que $c^t\mathbf{x'}$ é estritamente melhor que $c^t\mathbf{x}$.
- O problema é **SOLÚVEL**, ou seja, existe pelo menos uma solução ótima x^*.

Equivalências algébricas

Existência da forma padrão

Para todo programa linear:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T \mathbf{x} \\ \text{s.a:} & \left\{ \begin{array}{lll} A_1\mathbf{x} & \leq & b_1 \\ A_2\mathbf{x} & \geq & b_2 \\ A_3\mathbf{x} & = & b_3 \\ \mathbf{x} \in \mathbb{Q} & & \end{array} \right. \end{array}$$

Existe um equivalente em **forma padrão**:

$$\begin{array}{ll} \max & c'^T \mathbf{x} \\ \text{s.a:} & \left\{ \begin{array}{lll} A'\mathbf{x} & \leq & b' \\ \mathbf{x} \in \mathbb{Q}_+ & & \end{array} \right. \end{array}$$

Função objetivo

$$\min \; c^T \mathbf{x} \quad \equiv \quad \max \; -c^T \mathbf{x}$$

Restrições de desigualdade

Cara restrição da forma $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{x_j} \geq b_i$ é equivalente a $\sum_{j=1}^{n} -a_{ij}\mathbf{x_j} \leq -b_i$:

$$A\mathbf{x} \geq b \qquad \equiv \qquad -A\mathbf{x} \leq -b$$

Restrições de igualdade

Cada restrição da forma $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{x_j} = b_i$ é equivalente a $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{x_j} \leq b_i$ e $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{x_j} \geq b_i$:

$$A\mathbf{x} = b \qquad \equiv \qquad \begin{array}{l} A\mathbf{x} \leq b \\ A\mathbf{x} \geq b \end{array}$$

Transformando em restrições de igualdade

A cada restrição da forma $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{x_j} \geq b_i$ podemos adicionar uma nova variável $\mathbf{y_i} \in \mathbb{Q}_+$ e obter a restrição equivalente $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{x_j} - \mathbf{y_i} = b_i$:

$$A\mathbf{x} \geq b \qquad \equiv \qquad (A, -I)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = b$$

Transformando em restrições de igualdade

A cada restrição da forma $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{x_j} \leq b_i$ podemos adicionar uma nova variável $\mathbf{y_i} \in \mathbb{Q}_+$ e obter a restrição equivalente $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{x_j} + \mathbf{y_i} = b_i$:

$$A\mathbf{x} \geq b \qquad \equiv \qquad (A, I)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = b$$

Domínio das variáveis

Se, para algum $1 \leq i \leq n$, x_i não precisa ser maior ou igual que zero, então cada ocorrência de x_i pode ser substituída por $\mathbf{x_i'} - \mathbf{x_i''}$, onde $\mathbf{x_i'}, \mathbf{x_i''} \in \mathbb{Q}_+$ são duas novas variáveis não negativas.

Sobre formulações

Vamos fazer alguns exercícios?

Exercício 1. Transporte aéreo

Home Run é uma companhia de transporte que assinou um contrato para transportar munições, armas e medicamentos em dois aviões, um **Airbus** e um **Boeing**. O cliente aceitou receber todo o que a companhia conseguisse transportar, assim **Home Run** deseja maximizar o lucro atendendo às seguintes restrições:

	Densidade (kg/m^3)	Lucro ($\$/kg$)
Munições	30	\$20.00
Armas	40	\$30.00
Medicamentos	20	\$10.00

	Peso máximo	Capacidade máxima
Airbus	$15t$	$80m^3$
Boeing	$25t$	$160m^3$

No máximo $100kg$ de medicamentos podem ser transportados em cada envio (combinando os dois aviões)

Exercício 1. Transporte aéreo

(a) Proponha um programa linear para o problema, explique o significado das variáveis e das restrições.

(b) Escreva um programa linear equivalente em forma padrão.

(c) Generalize a sua formulação para m produtos diferentes e serem transportador em n aviões.

Exercício 2. Barco de carga

Um barco de carga possui três seções para estocar mercadorias: frente, meio e fundo. No barco o peso das mercadorias deve estar distribuído na mesma proporção que os limites de peso para cada seção. Os limites de peso e espaço das seções e do barco são dados a seguir:

	Weight	Space
Front	$12t$	$90m^3$
Middle	$18t$	$110m^3$
Tail	$10t$	$60m^3$

	m^3/t	$\$/t$
Product 1	6	280
Product 2	9	360
Product 3	7.5	320

Considere três mercadorias: **Mercadoria 1**, **Mercadoria 2** e **Mercadoria 3** com limites respectivos: $20t$, $16t$ e $25t$. Se o objetivo é maximizar o lucro:

Exercício 2. Barco de carga

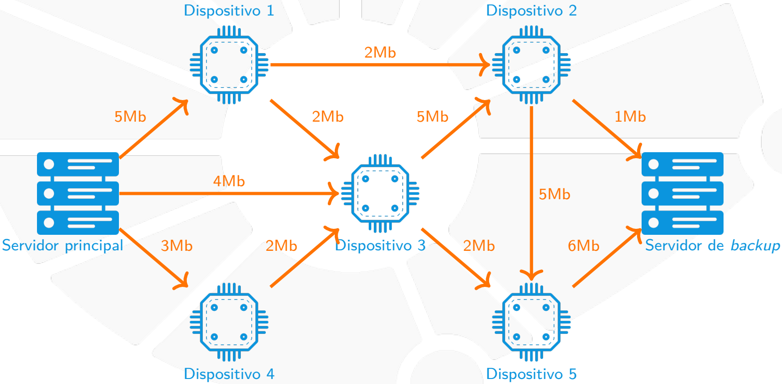
(a) Proponha um programa linear para o problema, explique o significado das variáveis e das restrições.

(b) Escreva um programa linear equivalente em forma padrão.

(c) Generalize a sua formulação considerando m mercadorias diferentes.

Exercício 3. Comunicação entre servidores

A empresa **Melancia** tem uma rede conectando um servidor principal a um de *backup*. Os valores associados às conexões indicam suas capacidades para envio de dados e os dispositivos podem dividir e juntar pacotes de forma a não perder informação. Qual o tamanho do maior pacote que pode ser enviado do servidor principal ao de *backup*?



Exercício 3. Comunicação entre servidores

(a) Proponha um programa linear para o problema, explique o significado das variáveis e das restrições.

(b) Escreva um programa linear equivalente em forma padrão.

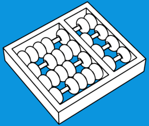
(c) Generalize a sua formulação considerando m dispositivos.

Programação linear

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

10/24

19



Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br