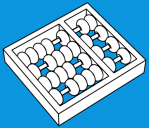
Uma condição suficiente para soluções inteiras de PL

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

20

10/24



Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

UNICAMP

"Os números inteiros são a fonte de toda a matemática."

David M. Burton.

Um problema ecológico

Limpando o planeta

A empresa química **100Canudos** desenvolveu uma substância capaz de eliminar o plástico desperdiçado. A reação entre o plástico desperdiçado e a substância aumenta as distâncias entre as moléculas do plástico, expandindo o espaço ocupado pelo plástico sete vezes; no entanto, as moléculas da substância atraem as moléculas do plástico, de modo que o volume é reduzido subtraindo três vezes o volume da substância. Como a reação ocorre em um espaço de $20000gal$, o volume total ocupado pela reação é limitado por esse espaço. Além disso, a reação só é bem-sucedida se o volume de plástico não for $2000gal$ a mais que o volume da substância. Por razões de segurança, a diferença entre 16 vezes o volume de plástico menos 10 vezes o volume da substância deve ser de pelo menos $19000gal$.

A companhia não pode produzir menos que $500gal$ da substância por cada reação e por cada $1000gal$ de plástico eliminado, o lucro é de \$50.00, enquanto o custo de produzir $1000gal$ da substância é \$20.00.

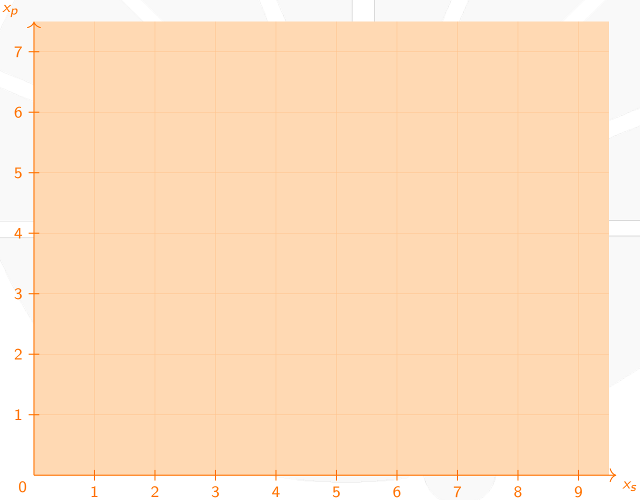
Qual deve ser o volume de plástico e de substância por reação, de modo a maximizar os ganhos?

Limpando o planeta

x_p, volume (em 1000gal) de plástico por reação.
x_s, volume (em 1000gal) da substância por reação.

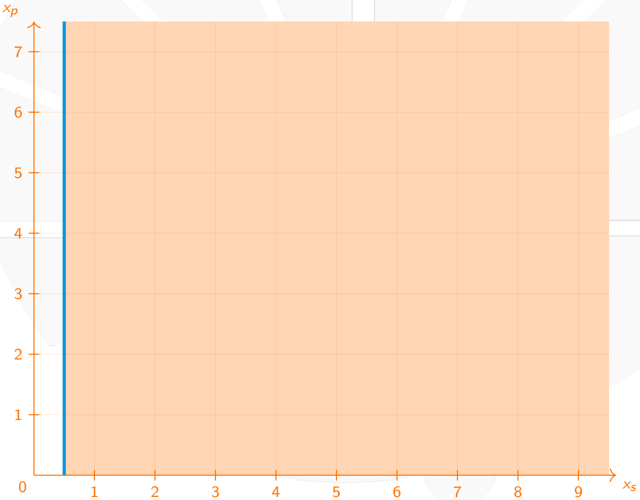
$$
\begin{array}{ll}
\max & 50\mathbf{x_p} - 20\mathbf{x_s} \\
s.a: & \\
 & 7\mathbf{x_p} - 3\mathbf{x_s} \leq 20 \\
 & \mathbf{x_p} - \mathbf{x_s} \leq 2 \\
 & 16\mathbf{x_p} - 10\mathbf{x_s} \geq 19 \\
 & \mathbf{x_s} \geq 0.5 \\
 & \mathbf{x_s}, \mathbf{x_p} \geq 0
\end{array}
$$

Limpando o planeta



$\mathbf{x_p}, \mathbf{x_s} \geq 0$

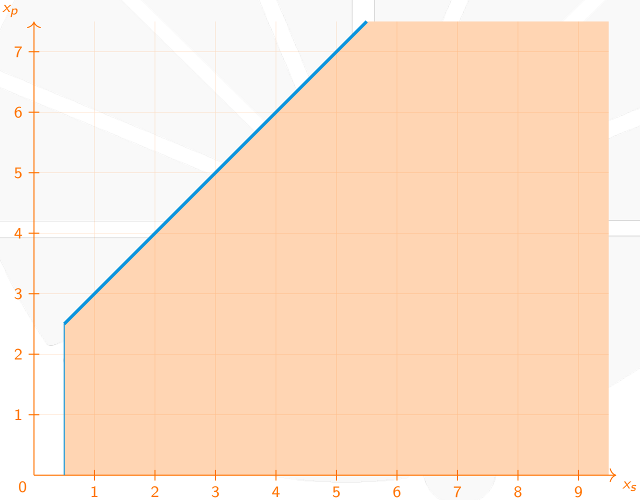
Limpando o planeta



$\mathbf{x_p}, \mathbf{x_s} \geq 0$

$\mathbf{x_s} \geq 0.5$

Limpando o planeta

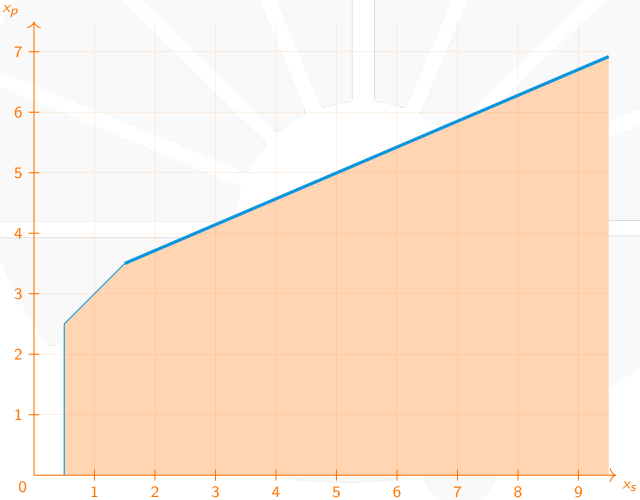


$x_p, x_s \geq 0$

$x_s \geq 0.5$

$x_p - x_s \leq 2$

Limpando o planeta



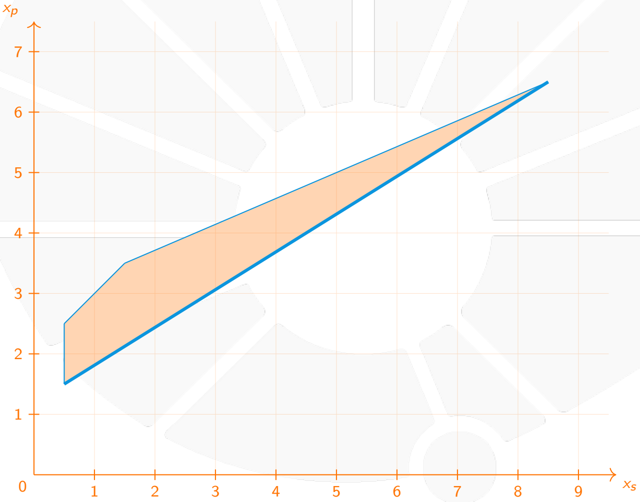
$x_p, x_s \geq 0$

$x_s \geq 0.5$

$x_p - x_s \leq 2$

$7x_p - 3x_s \leq 20$

Limpando o planeta



$$\mathbf{x_p}, \mathbf{x_s} \geq 0$$

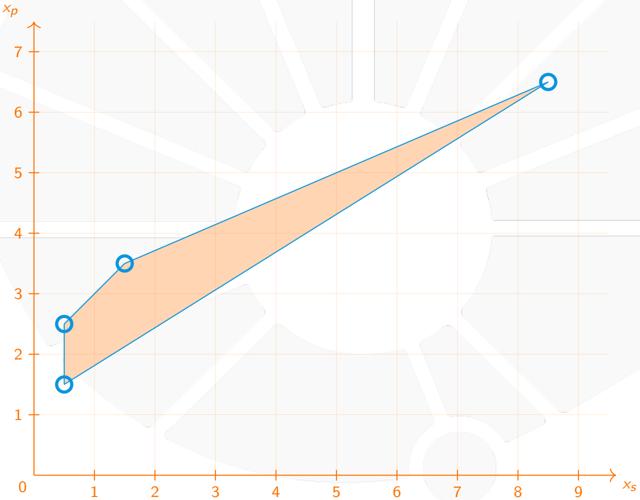
$$\mathbf{x_s} \geq 0.5$$

$$\mathbf{x_p} - \mathbf{x_s} \leq 2$$

$$7\mathbf{x_p} - 3\mathbf{x_s} \leq 20$$

$$16\mathbf{x_p} - 10\mathbf{x_s} \geq 19$$

Limpando o planeta



$x_p, x_s \geq 0$

$x_s \geq 0.5$

$x_p - x_s \leq 2$

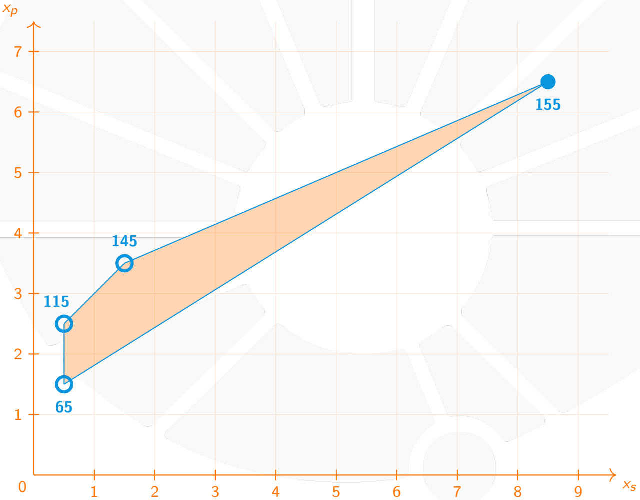
$7x_p - 3x_s \leq 20$

$16x_p - 10x_s \geq 19$

Função objetivo:

max $\quad 50x_p - 20x_s$

Limpando o planeta



$$x_p, x_s \geq 0$$

$$x_s \geq 0.5$$

$$x_p - x_s \leq 2$$

$$7x_p - 3x_s \leq 20$$

$$16x_p - 10x_s \geq 19$$

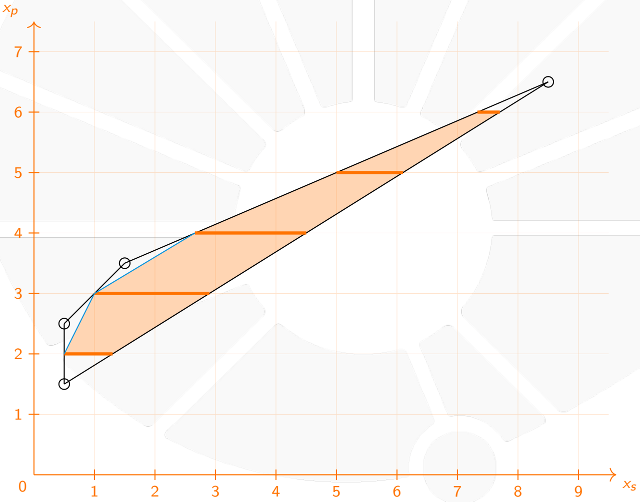
Função objetivo:

$$\max \quad 50x_p - 20x_s$$

Limpando o planeta

Se o plástico desperdiçado for previamente processado e fornecido em blocos de $1000gal$ que não podem ser divididos, o que acontece com a região factível e as soluções fornecidas pelo programa linear?

Limpando o planeta



$x_p \in \mathbb{Z}, x_s \in \mathbb{Q}$

$x_p, x_s \geq 0$

$x_s \geq 0.5$

$x_p - x_s \leq 2$

$7x_p - 3x_s \leq 20$

$16x_p - 10x_s \geq 19$

Função objetivo:

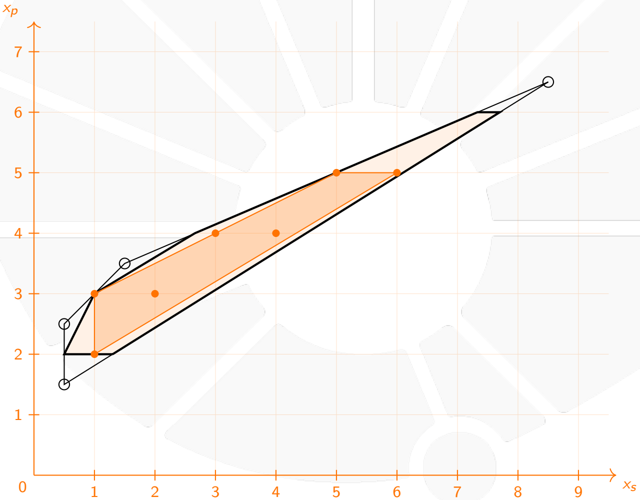
$\max \quad 50x_p - 20x_s$

Limpando o planeta

Se o plástico desperdiçado for previamente processado e fornecido em blocos de $1000gal$ que não podem ser divididos, o que acontece com a região factível e as soluções fornecidas pelo programa linear?

O que acontece se a substância também for produzida em contêineres de $1000gal$ que não podem ser divididos?

Limpando o planeta



$x_p\,,\,x_s \in \mathbb{Z}$

$x_p\,,\,x_s \geq 0$

$x_s \geq 0.5$

$x_p - x_s \leq 2$

$7x_p - 3x_s \leq 20$

$16x_p - 10x_s \geq 19$

Função objetivo:

$\max \quad 50x_p - 20x_s$

Pergunta

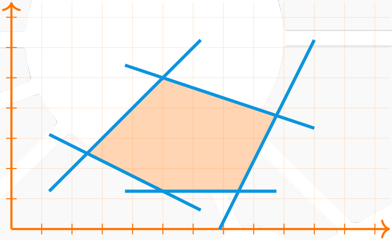
Como saber se um programa linear tem soluções inteiras?

Definições

Politopo

Um **POLITOPO**[1] é um conjunto de pontos da forma:

$$P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{Q}^n : \begin{array}{rcl} a_{11}\mathbf{x_1} + a_{12}\mathbf{x_2} + \cdots + a_{1m}\mathbf{x_n} & \leq & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}\mathbf{x_1} + a_{n2}\mathbf{x_2} + \cdots + a_{nm}\mathbf{x_n} & \geq & b_n \end{array} \right\}.$$

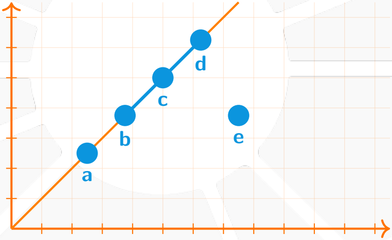


[1] Quando $n = 3$, o politopo também é chamado de poliedro.

Combinação convexa

Dado um conjunto de pontos $\mathbf{S} = \{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}\}$, dizemos que y é uma **COMBINAÇÃO CONVEXA** dos pontos de S se

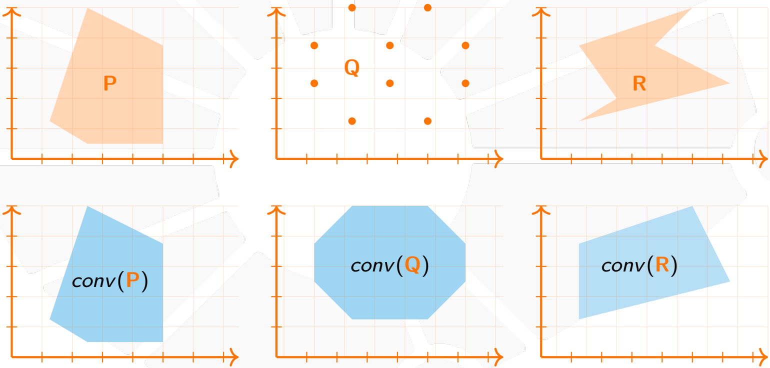
- $y = \alpha_1 \mathbf{x_1} + \alpha_2 \mathbf{x_2} + \cdots + \alpha_n \mathbf{x_n}$, onde $\alpha_i \geq 0$ e
- $\sum_i \alpha_i = 1$.



c é combinação convexa de **b** e **d**, mas **a** e **e** não são.

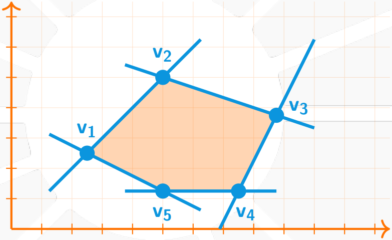
Fecho convexo

O **FECHO CONVEXO** de S, denotado por $conv(S)$ é o conjunto dos pontos que são combinação convexa dos pontos de S.



Vértices do politopo

Os **VÉRTICES** ou **PONTOS EXTREMAIS** de um politopo P são os pontos de P que não podem ser escritos como combinação convexa de outros pontos de P.



Note que um vértice do poliedro é o único ponto que satisfaz um determinado conjunto de igualdades simultaneamente.

Determinantes e resolução de sistemas lineares

Dada matriz quadrada A de ordem n e coluna j, podemos calcular o **DETERMINANTE** pela fórmula de Laplace:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} |A^{i,j}|,$$

onde $A^{i,j}$ é a submatriz obtida ao se remover a linha i e a coluna j.

Método de Cramer

Se $|A| \neq 0$, então podemos revolver o sistema de equações $Ax = b$ obtendo x da seguinte forma:

$$x_i = \frac{|A_b^j|}{|A|},$$

onde A_b^j é a matriz A com a coluna j trocada pelo vetor b.

Matriz totalmente unimodular

Politopo inteiro e matriz totalmente unimodular

Uma submatriz de A é uma matriz obtida removendo linhas e colunas de A.

Teorema

Todo vértice y do politopo definido por uma matriz A é determinado por uma submatriz não singular A' de A tal que $A' \cdot y = b'$, onde b' contém os elementos de b das linhas correspondentes de A'.

- Um **POLITOPO É INTEIRO** se todos os seus vértices contêm apenas componentes inteiras.
- Uma matriz A é chamada de **TOTALMENTE UNIMODULAR** (TU) se o determinante de toda submatriz quadrada A' está em $\{-1, 0, +1\}$.

Teorema

Se A é totalmente unimodular, então para todo vetor inteiro b o politopo $P = \{x : Ax \leq b\}$ é inteiro.

Propriedades de matrizes TU

Lema

Se A é uma matriz TU, então também são TU as seguintes:

1. *Matriz obtida de A removendo uma linha (coluna)*
2. *Matriz obtida de A duplicando uma linha (coluna)*
3. *Matriz obtida de A trocando duas linhas (colunas)*
4. A^T
5. $-A$
6. $(\,A \,|\, I\,)$
7. $(\,A \,|\, -A\,)$

Explicação:

- **1, 2 e 3.** Seguem da definição matriz TU.
- **4.** Determinante da transposta é igual ao da original.
- **5.** Multiplicar linhas por -1 inverte sinal do determinante.
- **6.** Permutar as linhas de submatriz A' para a forma $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$. B é submatriz de A e $|A'| = |B|$.
- **7.** Duplicar colunas e trocar sinal da coluna mantém TU.

Aplicando em politopos

Teorema

Se A é TU e b e u são vetores inteiros, então os seguintes politopos são inteiros:

1. $\{\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq b\}$
2. $\{\mathbf{x} : A\mathbf{x} \leq b,\ \mathbf{x} \geq 0\}$
3. $\{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = b,\ \mathbf{x} \geq 0\}$
4. $\{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = b,\ 0 \leq \mathbf{x} \leq u\}$

Observações:

- Note que $\{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = b\}$ e $\{\mathbf{x} : A\mathbf{x} \leq b,\ A\mathbf{x} \geq b\}$ são iguais.
- Podemos reescrever o politopo do item 4 usando uma matriz TU da forma:

$$\begin{pmatrix} A \\ -A \\ I \\ -I \end{pmatrix}.$$

Condição para TU

Lema

Se A é uma matriz formada por elementos em $\{-1, 0, 1\}$ e cada coluna tem no máximo uma ocorrência de -1 e no máximo uma ocorrência de 1, então A é TU.

Demonstração: Por indução na ordem da submatriz.

- Para ordem 1, note que a matriz é um número -1, 0 ou 1.
- Agora seja B uma submatriz quadrada de A.
  1. Se há coluna de elementos nulos, o determinante de B é 0.
  2. Se toda coluna tem -1 e $+1$, então a soma de todas as linhas é nula e o determinante é nulo.
  3. Caso contrário, há coluna com exatamente um elemento não nulo $t \in \{-1, +1\}$. Logo, o determinante é $+t$ ou $-t$ vezes a submatriz removendo a linha e coluna de t (regra de Laplace).

Matriz de incidência

A **MATRIZ DE INCIDÊNCIA** de um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é uma matriz bidimensional com uma linha para cada um dos vértices do grafo e uma coluna para cada aresta. A linha **u** e coluna **e** tem valor $\mathbf{1}$ se a aresta **e** incide no vértice **u**, em outro caso o valor é $\mathbf{0}$.

Em grafos direcionados o valor é $\mathbf{1}$ se **u** for cauda de **e** e $-\mathbf{1}$ se for cabeça.

Matriz de incidência

Lema

Se A é a matriz de incidência de ***GRAFO DIRECIONADO****, então A é TU.*

Demonstração: Segue do lema anterior.

Lema

Se A é a matriz de incidência de um ***GRAFO BIPARTIDO*** *G, com partes* ***X, Y****, então A é TU.*

Demonstração:

- Multiplique por -1 todas as linhas de A correspondentes aos vértices de **Y**.
- Obtemos a matriz de incidência de um grafo direcionado, que é TU.
- Com só multiplicamos por -1 algumas linhas de A, o determinando de cada submatriz só pode mudar de sinal.

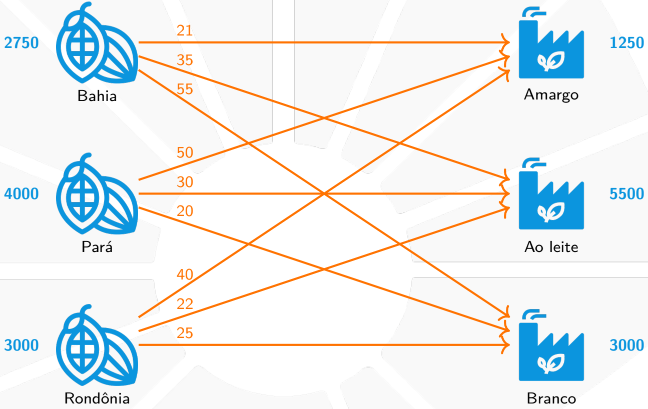
Problema de Fluxo de Custo Mínimo

Um problema de transporte

Lliwy Konwa é dono da **Espetacular Empresa de Chocolate**, que possui três fazendas de cacau: uma em Bahia, outra em Pará e outra em Rondônia, além de três fábricas de produção de chocolate: amargo, ao leite e branco. O Lliwy está organizando a logística da colheita da cacau para esse ano.

O transporte do cacau das fazendas para as fábricas é terceirizado. O custo do quilômetro rodado por tonelada transportada que é fixo pela transportadora independente do trajeto realizado. A produção das fazendas e a capacidade de processamento das fábricas, são dadas em toneladas, assim como as distâncias em quilômetros entre as fazendas e as fábricas.

Cadeia de fornecimento de Lliwy Konwa



Qual deve ser a quantidade de cacau transportada de cada fazenda para cada usina de modo a **MINIMIZAR** o custo total do transporte?

Formulação

- Variáveis:

$$x_{ij} = \begin{cases} \text{quantidade de cacau transportada} \\ \text{da fazenda } i \text{ para a usina } j \end{cases}$$

Onde, $i \in \{b, p, r\}$ e $j \in \{a, l, b\}$.

- Função objetivo:

$$\min 21x_{ba} + 35x_{bl} + 55x_{bb} + 50x_{pa} + 30x_{pl} + 20x_{pb} + 40x_{ra} + 22x_{rl} + 25x_{rb}$$

- Restrições de capacidades das fábricas:

$$x_{ba} + x_{pa} + x_{ra} \leq 1250 \quad \text{(fábrica de chocolate amargo)}$$
$$x_{bl} + x_{pl} + x_{rl} \leq 5500 \quad \text{(fábrica de chocolate ao leite)}$$
$$x_{bb} + x_{pb} + x_{rb} \leq 3000 \quad \text{(fábrica de chocolate branco)}$$

- Escoamento da produção das fazendas:

$$x_{ba} + x_{bl} + x_{bb} = 2750 \quad \text{(fazenda na Bahia)}$$
$$x_{pa} + x_{pl} + x_{pb} = 4000 \quad \text{(fazenda no Pará)}$$
$$x_{ra} + x_{rl} + x_{rb} = 3000 \quad \text{(fazenda em Rondônia)}$$

- Não negatividade:

$$x_{ba}, x_{bl}, x_{bb}, x_{pa}, x_{pl}, x_{pb}, x_{ra}, x_{rl}, x_{rb} \geq 0$$

Problema do Fluxo de Custo Mínimo

O problema de fluxo de modela um sistema de produção de bens onde há centros consumidores e produtores:

- **Todos** os itens produzidos devem ser consumidos.
- Itens produzidos chegam até os consumidores por **rotas**.
- Uma rota tem **capacidades máxima** de escoamento.
- Uma rota tem **custo por unidade** para transportar um item.

Objetivo: transportar itens de produtores para consumidores minimizando custo total de transporte.

Algumas outras aplicações: detecção de "gargalos" da rede na transferência, projeto de vias de tráfego urbano, etc.

Definição

Sejam $G = (V, E)$ um grafo direcionado, capacidades $c : E \to \mathbb{Q}_+$, demandas $b : V \to \mathbb{Q}$ e custos $w : E \to \mathbb{Q}_+$.

- Um vértice $v \in V$ com $b_v < 0$ é chamado de **consumidor**.
- Um vértice $v \in V$ com $b_v > 0$ é chamado de **produtor**.

Fluxo

Uma função $x : E \to \mathbb{Q}_+$ é um **fluxo** em G se

$$\sum_{e \in \delta^+(v)} x_e - \sum_{e \in \delta^-(v)} x_e = b_v \qquad \forall v \in V \qquad \text{e}$$

$$0 \leq x_e \leq c_e \qquad \forall e \in E.$$

Problema do Fluxo de Custo Mínimo

Dado um fluxo $x : E \to \mathbb{Q}_+$ o **CUSTO DO FLUXO** x é $\sum_{e \in E} w_e x_e$.

Problema do Fluxo de Custo Mínimo

Dados grafo direcionado $G = (V, E)$, capacidades $c : E \to \mathbb{Q}_+$, demandas $b : V \to \mathbb{Q}_+$ e função de custo $w : E \to \mathbb{Q}_+$ encontre fluxo $x : E \to \mathbb{Q}_+$ que

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{e \in E} w_e x_e \\ \text{sujeito a} & \left\{ \begin{array}{rl} \displaystyle\sum_{e \in \delta^+(v)} x_e - \sum_{e \in \delta^-(v)} x_e = b_v & \forall v \in V, \\ 0 \leq x_e \leq c_e & \forall e \in E. \end{array} \right. \end{array}$$

Integralidade do politopo

Teorema

Se as capacidades nas arestas e as demandas dos vértices são inteiros (i.e., $c : E \to \mathbb{Z}_+ \quad e \quad b : V \to \mathbb{Z}_+$) então os vértices do politopo do fluxo são inteiros.

Demonstração:

- Segue do fato que a matriz de incidência de um grafo direcionado ser TU.

Subproblemas

- Fluxo máximo de um vértice s a um vértice t (fluxo-st).
- Problema do corte de capacidade mínima.
- Problema do caminho mínimo (com pesos não negativos).
- Emparelhamento de peso máximo em grafos bipartidos.

Refletindo sobre integralidade

Vamos fazer alguns exercícios?

Exercício 1. Comunicação entre servidores

Se no problema da empresa **Melancia** (exercício 3 da aula anterior) as capacidades das conexões são todas inteiras, então há garantias de uma solução ótima inteira?

Exercício 2. Espetacular empresa de chocolate

Considere o problema de transporte visto em aula, da Espetacular Empresa de Chocolate:

1. Generalize a formulação considerando m fazendas e n fábricas.

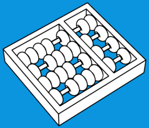
2. Reformule o problema considerando que além dos custos pela distância, os arcos tem capacidade e pode haver paradas intermediárias (vértices) onde as cargas de cacau podem ser redistribuídas (sem perda de cacau).

3. Se a produção das fazendas e as capacidades das fábricas são inteiros, então há solução ótima inteira?

Uma condição suficiente para soluções inteiras de PL

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

10/24



Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

UNICAMP