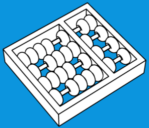
Programa dual e algoritmos para PL

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

10/24

21



Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

UNICAMP

“A dualidade é uma das ideias mais antigas e mais frutíferas da matemática.”

Michael F. Atiyah.

Problema dual

Primal

Considere um programa linear **PRIMAL** de minimização (**PLP**(c, A, b)) composto por dois vetores $c \in \mathbb{Q}^n$ e $b \in \mathbb{Q}^m$, e uma matriz $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ $(m, n \in \mathbb{N})$, formulado como segue:

$$
\begin{array}{ll}
\min & c^T \mathbf{x} \\
\text{s.a:} & \\
& A\mathbf{x} \geq b \\
& \mathbf{x_i} \geq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n \\
& \mathbf{x} \in \mathbb{Q}^n
\end{array}
$$

* Restrições da forma $a^t_{i.}\mathbf{x} = b_i$ podem ser escritas como $a^t_{i.}\mathbf{x} \geq b_i$ e $a^t_{i.}\mathbf{x} \leq b_i$, enquanto as da forma $a^t_{i.}\mathbf{x} \geq b_i$ podem ser escritas como $-a^t_{i.}\mathbf{x} \leq -b_i$.

Dual

Dado um programa linear primal de minimização **PLP**(c, A, b), o programa linear **DUAL** associado **PLD**(c, A, b) é formulado como segue:

$$
\begin{array}{ll}
\max & b^T \mathbf{y} \\
\text{s.a:} & \\
 & A^T \mathbf{y} \leq c \\
 & \mathbf{y_i} \geq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq m \\
 & \mathbf{y} \in \mathbb{Q}^m
\end{array}
$$

Exemplo. Almoço

Minimize o total de gorduras em um almoço que consiste em salda e sopa, considerando a seguinte informação nutricional:

	Vitamina A	Vitamina B	Gorduras
	$80mcg/100g$	$0.4mcg/100g$	$4mg/100g$
	$60mcg/100g$	$0.2mcg/100g$	$6mg/100g$

Os requerimentos nutricionais são: pelo menos **450mcg** de vitamina **A** e **2mcg** de vitamina **B**, além de evitar consumir mais de **700g**.

Exemple. Almoço
Formulação (aula anterior)

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 4x_{\text{salada}} + 6x_{\text{sopa}} \\
s.a: \quad & \\
& 80x_{\text{salada}} + 60x_{\text{sopa}} \geq 450 \\
& 0.4x_{\text{salada}} + 0.2x_{\text{sopa}} \geq 2 \\
& x_{\text{salada}} + x_{\text{sopa}} \leq 7 \\
& x_{\text{salada}}, x_{\text{sopa}} \geq 0
\end{aligned}
$$

Exemplo. Almoço
Formulação como *PLP*

$$\begin{array}{ll} \min & 4x_{salada} + 6x_{sopa} \\ s.a: & \\ & 80x_{salada} + 60x_{sopa} \geq 450 \\ & 0.4x_{salada} + 0.2x_{sopa} \geq 2 \\ & x_{salada} + x_{sopa} \leq 7 \\ & x_{salada}, x_{sopa} \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min & 4x_{salada} + 6x_{sopa} \\ s.a: & \\ & 80x_{salada} + 60x_{sopa} \geq 450 \\ & 0.4x_{salada} + 0.2x_{sopa} \geq 2 \\ & -x_{salada} - x_{sopa} \geq -7 \\ & x_{salada}, x_{sopa} \geq 0 \end{array}$$

Exemplo. Almoço
Primal e dual

$$\begin{aligned}
\min \quad & 4x_{salada} + 6x_{sopa} \\
s.a: \quad & \\
& 80x_{salada} + 60x_{sopa} \geq 450 \\
& 0.4x_{salada} + 0.2x_{sopa} \geq 2 \\
& -x_{salada} - x_{sopa} \geq -7 \\
& x_{salada}, x_{sopa} \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\max \quad & 450y_A + 2y_B - 7y_{peso} \\
s.a: \quad & \\
& 80y_A + 0.4y_B - y_{peso} \leq 4 \\
& 60y_A + 0.2y_B - y_{peso} \leq 6 \\
& y_A, y_B, y_{peso} \geq 0
\end{aligned}$$

Exemplo. Almoço
Interpretação dual

Cada variável é relacionada a um nutriente ou a uma medida e podem ser interpretadas como a quantidade de miligramas de gordura por cada unidade do nutriente/medida no almoço:

$\mathbf{y_A}$, quantidade de miligramas de gordura por unidade de vitamina **A**.

$\mathbf{y_B}$, quantidade de miligramas de gordura por unidade de vitamina **B**.

$\mathbf{y_{peso}}$, quantidade de miligramas de gordura por cada **100g** de comida.

O dual procura uma solução onde a quantidade de gordura por nutriente/medida não seja maior que a quantidade de gordura por prato:

$$\begin{aligned} 80\mathbf{y_A} + 0.4\mathbf{y_B} - \mathbf{y_{peso}} &\leq 4 \\ 60\mathbf{y_A} + 0.2\mathbf{y_B} - \mathbf{y_{peso}} &\leq 6 \end{aligned}$$

Primal e dual

O dual de $\textbf{PLP}(c, A, b)$ é:

$$\textbf{PLD}(b, A^T, c) = \textbf{PLP}(-b, -A^T, -c).$$

O dual de $\textbf{PLP}(-b, -A^T, -c)$ é:

$$\begin{aligned} \textbf{PLD}(-c, (-A^T)^T, -b) &= \textbf{PLD}(-c, -A, -b) \\ &= \textbf{PLP}(-(-c), -(-A), -(-b)) \\ &= \textbf{PLP}(c, A, b). \end{aligned}$$

Portanto, o dual do dual é o primal.

Teoremas de dualidade

Dualidade fraca

Teorema (dualidade fraca)

Se $\mathbf{x}$ *é uma solução viável de* $\boldsymbol{PLP}(c, A, b)$ *e* $\mathbf{y}$ *é uma solução viável de* $\boldsymbol{DLP}(c, A, b)$*, então:*

$$b^T t\mathbf{y} \leq c^T \mathbf{x}.$$

Prova

Como $\mathbf{y}$ é uma solução viável de **DLP**(c, A, b) e $\mathbf{x}$ é uma solução viável de **PLP**(c, A, b), temos que:

$$
\begin{aligned}
& A^T\mathbf{y} \leq c & & (\mathbf{x} \geq 0) \\
\Rightarrow \quad & (A^T\mathbf{y})^T\mathbf{x} \leq c^T\mathbf{x} & & \\
\Rightarrow \quad & \mathbf{y}^T A\mathbf{x} \leq c^T\mathbf{x} & & (A\mathbf{x} \geq b) \\
\Rightarrow \quad & \mathbf{y}^T b \leq c^T\mathbf{x} & & \\
\Rightarrow \quad & b^T\mathbf{y} \leq c^T\mathbf{x}. & &
\end{aligned}
$$

Implicações da dualidade fraca

Se **PLP**(c, A, b) e **DPL**(c, A, b) possuem soluções ótimas, então:

- Dada qualquer solução viável $\mathbf{y}$ do dual, o valor $b^T\mathbf{y}$ é um **LIMITANTE INFERIOR** para o valor ótimo do primal.
- Dada qualquer solução viável $\mathbf{x}$ do primal, o valor $c^T\mathbf{x}$ é um **LIMITANTE SUPERIOR** para o valor ótimo do dual.

Dualidade forte

Teorema (dualidade forte)

$\mathbf{x}^*$ *é uma solução ótima de* ***PLP***(c, A, b) *se e somente se* $\mathbf{y}^*$ *é uma solução ótima de* ***DLP***(c, A, b)*, onde:*

$$c^T \mathbf{x}^* = b^T \mathbf{y}^*.$$

Ideia da prova

- Provar que se existe uma solução ótima $\mathbf{x}^*$ para **PLP**(c, A, b), então existe uma solução viável $\mathbf{y}$ para **DLP**(c, A, b), tal que: $c^T\mathbf{x}^* = b^T\mathbf{y}$. [1]

- A dualidade fraca implica que tal $\mathbf{y}$ é ótimo de **DLP**(c, A, b).

- Como o dual do dual é o primal, então a outra direção é também válida.

[1] A prova pode ser feita através do método Simplex, também uma alternativa pode ser consultando o artigo *"A short note on strong duality: without Simplex and without theorems of alternatives"* de Somdeb Lahiri (2017).

Implicações da dualidade forte

Dados um programa linear primal e seu dual, existem quatro possibilidades:

- O primal e o dual primal são inviáveis.
- O primal é inviável e o dual ilimitado.
- O primal é ilimitado e o dual inviável.
- O primal e o dual são viáveis e o valor de uma solução ótima é o mesmo para os dois.

Folgas complementares

Teorema (folgas complementares)

Dadas uma solução ótima $\mathbf{x}^*$ *de* ***PLP***(c, A, b) *e uma solução ótima* $\mathbf{y}^*$ *de* ***DLP***(c, A, b)*, temos:*

$$(c - A^T\mathbf{y}^*)^T\mathbf{x}^* = 0 \text{ e } (b - A\mathbf{x}^*)^T\mathbf{y}^* = 0.$$

Prova

Qualquer par $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de soluções viáveis do primal e o dual satisfazem:

$$\begin{aligned} & A^T\mathbf{y} \leq c & (\mathbf{x} \geq 0) \\ \Rightarrow \quad & (A^T\mathbf{y})^T\mathbf{x} \leq c^T\mathbf{x} & \\ \Rightarrow \quad & \mathbf{y}^T A\mathbf{x} \leq c^T\mathbf{x} & (A\mathbf{x} \geq b) \\ \Rightarrow \quad & \mathbf{y}^T b \leq \mathbf{y}^T A\mathbf{x} \leq c^T\mathbf{x} & \end{aligned}$$

Como $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ são ótimas (pela dualidade forte):

$$\mathbf{y}^{*T} b = \mathbf{y}^{*T} A\mathbf{x}^* = c^T\mathbf{x}^*$$

$$\mathbf{y}^{*T} b - \mathbf{y}^{*T} A\mathbf{x}^* = 0 \qquad\qquad 0 = c^T\mathbf{x}^* - \mathbf{y}^{*T} A\mathbf{x}^*$$

$$(b - A\mathbf{x}^*)^T\mathbf{y}^* = 0 \qquad\qquad 0 = (c - A^T\mathbf{y}^*)^{T*}\mathbf{x}.$$

Teste de otimalidade via folgas complementares

A solução ($x_{salada} = 3, x_{sopa} = 4$) é ótima para o problema do almoço?

$$\begin{aligned}
\min \quad & 4x_{salada} + 6x_{sopa} \\
s.a: \quad & \\
& 80x_{salada} + 60x_{sopa} \geq 450 \\
& 0.4x_{salada} + 0.2x_{sopa} \geq 2 \\
& -x_{salada} - x_{sopa} \geq -7 \\
& x_{salada}, x_{sopa} \geq 0
\end{aligned}$$

Teste de otimalidade via folgas complementares

Dada a solução ($x_{salada} = 3, x_{sopa} = 4$), para testar sua otimalidade, analisamos as restrições e as variáveis duais:

$$
\begin{aligned}
80x_{salada} + 60x_{sopa} &\geq 450 & (y_A)\\
0.4x_{salada} + 0.2x_{sopa} &\geq 2 & (y_B)\\
-x_{salada} - x_{sopa} &\geq -7 & (y_{peso})
\end{aligned}
$$

Substituímos os valores ($x_{salada} = 3, x_{sopa} = 4$) nas restrições:

$$
\begin{aligned}
80(3) + 60(4) = 480 &> 450 & (y_A = 0)\\
0.4(3) + 0.2(4) &= 2 & (y_B \geq 0)\\
-3 - 4 &= -7 & (y_{peso} \geq 0)
\end{aligned}
$$

Teste de otimalidade via folgas complementares

$$80(\mathbf{3}) + 60(\mathbf{4}) = 480 > 450 \qquad (\mathbf{y_A} = 0)$$
$$0.4(\mathbf{3}) + 0.2(\mathbf{4}) = 2 \qquad (\mathbf{y_B} \geq 0)$$
$$-\mathbf{3} - \mathbf{4} = -7 \qquad (\mathbf{y_{peso}} \geq 0)$$

Analisamos as restrições duais para $(\mathbf{y_A} = 0, \mathbf{y_B}, \mathbf{y_{peso}})$:

$$80(\mathbf{0}) + 0.4\mathbf{y_B} - \mathbf{y_{peso}} \leq 4$$
$$60(\mathbf{0}) + 0.2\mathbf{y_B} - \mathbf{y_{peso}} \leq 6$$

As restrições duais associadas com variáveis primais que não são nulas devem ser satisfeitas na igualdade:

$$80(\mathbf{0}) + 0.4\mathbf{y_B} - \mathbf{y_{peso}} = 4 \qquad (\mathbf{x_{salada}} = 3 \neq 0)$$
$$60(\mathbf{0}) + 0.2\mathbf{y_B} - \mathbf{y_{peso}} = 6 \qquad (\mathbf{x_{sopa}} = 4 \neq 0)$$

Teste de otimalidade via folgas complementares

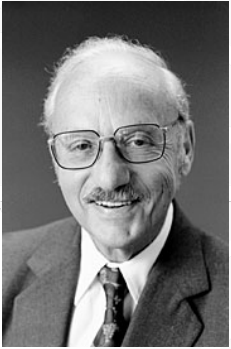
$$80(\mathbf{0}) + 0.4\mathbf{y_B} - \mathbf{y_{peso}} = 4 \qquad (\mathbf{x_{salada}} = 3 \neq 0)$$
$$60(\mathbf{0}) + 0.2\mathbf{y_B} - \mathbf{y_{peso}} = 6 \qquad (\mathbf{x_{sopa}} = 4 \neq 0)$$

A solução do sistema é ($\mathbf{y_A} = 0, \mathbf{y_B} = -10, \mathbf{y_{peso}} = -8$) que não é viável.

Como não há solução viável $\mathbf{y}$ do dual associada com ($\mathbf{x_{salada}} = 3, \mathbf{x_{sopa}} = 4$), temos que essa solução do primal **NÃO PODE SER ÓTIMA**.

Algoritmos para PL

Simplex. George Dantzig



George Bernard Dantzig (8/11/1914 – 13/5/2005, Estados Unidos)

Pesquisa:

- Programação linear.
- Pesquisa operacional.
- Engenharia industrial.

Prêmios:

- **John von Neumann Theory Prize** do *Institute for Operations Research and the Management Sciences* (1975).
- **National Medal of Science** em *Mathematical, Statistical, and Computational Sciences* (1975).
- **Harvey Prize** (1985).
- **Harold Pender Award** (1995).

Simplex. Propriedades

Como as restrições de um programa linear definem um politopo P como região viável, se existe uma solução ótima para o programa linear, então um dos extremos do politopo é ótimo.

Ademais, os extremos do politopo são pontos em que as variáveis não nulas correspondem a colunas linearmente independentes da matriz de restrições. Portanto, se existe um ótimo, então uma solução ótima pode ser obtida considerando uma base da matriz de restrições.

Algoritmo Simplex

Ideia. Começa com uma base B da matriz de restrições A e computa a solução associada (um ponto extremo). A cada iteração, se movimente a um ponto extremo adjacente somente se o valor objetivo pode melhorar. Se existir uma melhora, então esta é obtida aumentando o valor de uma variável $\mathbf{x_i}$ cuja coluna **i** está fora de B ($\mathbf{x_i} = 0$). Nesse caso, substituir uma coluna de B por **i**.

Complexidade. Para garantir eficiência, o algoritmo mantém uma tabela (*tableau*) que atualiza a cada iteração. Essa tabela permite encontrar a variável $\mathbf{x_i}$ e calcular o novo extremo muito rápido. Contudo, no pior caso, o algoritmo precisará enumerar cada extremo, sendo o número de pontos extremos exponencial no número de variáveis do programa linear.

Elipsoides. Leonid Khachiyan

Leonid Genrikhovich Khachiyan (3/5/1952 – 29/4/2005, Rússia)
Pesquisa:

- Programação linear.
- Programação matemática.
- Teoria poliedral.
- Teoria da complexidade e dos grafos.

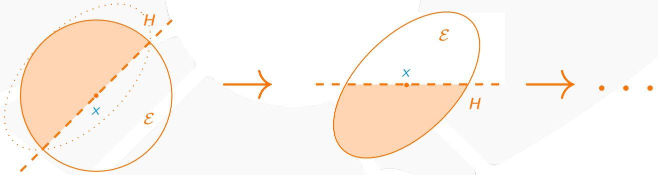
Prêmios:

- **Fulkerson Prize** da *American Mathematical Society & Mathematical Programming Society* (1982).

Método de elipsoides para problemas convexos

Considere um **ORÁCULO SEPARADOR**, ou seja, uma função que recebe um conjunto convexo S e um ponto x, indicando se $x \in S$ ou retornando um hiperplano que separa x de S.

Para determinar se um conjunto convexo S é viável, começamos com um elipsoide $\mathcal{E}$ (grande o suficiente) que contenha S e, a cada iteração, perguntamos ao oráculo se o centro do elipsoide x está em S. Se não estiver, considere que H é um hiperplano que separa x de S e atualize $\mathcal{E}$ para ser o elipsoide de menor volume que contém $\mathcal{E} \cap H^+$. Para se $x \in S$ ou se o volume de $\mathcal{E}$ for menor que certo limite.

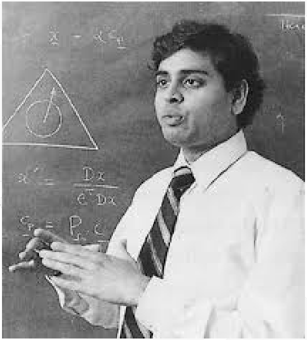


Método dos elipsoides para PL

Foi provado que o método dos elipsoides aplicado a programação linear requer tempo polinomial para solucionar o problema.

Complexidade. $O\left(n^6 \times \langle I \rangle\right)$, onde n é o número de variáveis e $\langle I \rangle$ é o tamanho (em bits) da instância.

Projeções. Narendra Karmarkar



Narendra Krishna Karmarkar (15/11/1955, Índia)
Pesquisa:

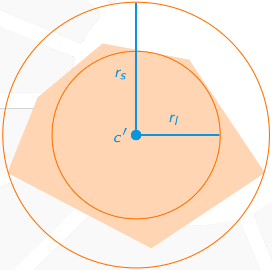
- Programação linear.
- Problemas não-lineares.
- Arquitetura de computadores.

Prêmios:

- **Frederick W. Lanchester Prize** da *Operations Research Society of America* (1984).
- **Fulkerson Prize** da *American Mathematical Society & Mathematical Programming Society* (1988).
- **Paris Kanellakis Award** da *Association for Computing Machinery* (2000).

Propriedade

Dados um politopo P e um ponto interior $c \in P$, existe uma transformação para um politopo P' com ponto interior c', tal que o fator entre o raio (r_s) da menor esfera que contém P' com centro em c' e o raio (r_l) da maior esfera contida em P' com centro em c' é $O(n)$.



$\frac{r_s}{r_l} = O(n)$

Algoritmo

Ideia. Aplicar repetidamente transformações, cada uma seguida por uma otimização da esfera inscrita, para obter uma sequência de pontos que converge a uma solução ótima em tempo polinomial.

Complexidade. $O\left(n^{3.5} \times \langle I \rangle\right)$, onde n é o número de variáveis e $\langle I \rangle$ o tamanho (em bits) da instância.

Resultados mais rápidos

- $O\left((m+n)^{1.5} \times n \times L\right)$. Pravin M. Vaidya. *"Speeding-up linear programming using fast matrix optimization"*. **FOCS**, 1989.
- $O\left(\left(nnz(A)+n^2\right) \times \sqrt{n} \times L\right)$. Yin Tat Lee and Aaron Sidford. *"Efficient inverse maintenance and faster algorithms for linear programming"*. **FOCS**, 2015.
- $O\left(n^{2.166} \times L\right)$. Michael B. Cohen, Yin Tat Lee and Zhao Song. *"Solving linear programs in the current matrix multiplication time"*. **STOC**, 2019.
- $O\left(n^{2.055} \times L\right)$. Shunhua Jiang, Zhao Song, Omri Weinstein and Hengjie Zhang. *"A faster algorithm for solving general LPs"*. **STOC**, 2021.

Famílias de algoritmos para PL

- Troca de base: Simplex, Geração de colunas, Algoritmos criss-cross.
- Métodos de ponto interior: Elipsoides, Projetivos, Multiplicação de matrizes.

Sobre dualidade

Vamos fazer alguns exercícios?

Exercício 1.

Responda as seguintes questões para cada um dos exercícios das aulas anteriores: transporte aéreo, barco de carga, comunicação entre servidores e empresa de chocolate:

a) Apresente uma formulação dual e explique o significado das variáveis.

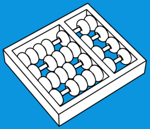
b) Selecione uma solução viável do primal e teste otimalidade via folgas complementares.

Programa dual e algoritmos para PL

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

21

10/24



Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

UNICAMP