NP-completude

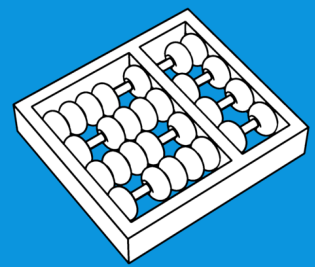
MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

11/24

25

Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

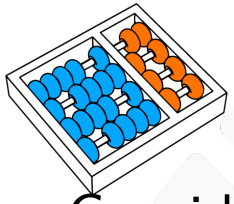
UNICAMP



"Se $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$ *então o mundo seria um lugar profundamente diferente do que normalmente assumimos. Não haveria valor especial em "saltos criativos", nenhuma lacuna fundamental entre resolver um problema e reconhecer a solução assim que ela fosse encontrada. Qualquer pessoa que pudesse apreciar uma sinfonia seria Mozart; qualquer um que pudesse acompanhar um argumento passo a passo seria Gauss; qualquer pessoa que pudesse reconhecer uma boa estratégia de investimento seria Warren Buffett."*

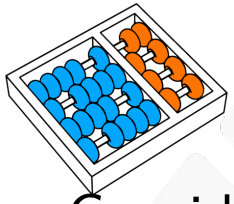
Scott Aaronson.

Classes NP e co-NP



Certificado

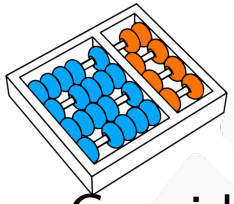
Considere uma linguagem L:



Certificado

Considere uma linguagem L:

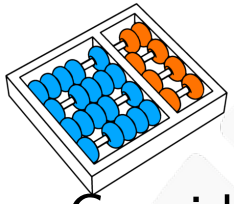
- Tome uma instância x do problema correspondente.



Certificado

Considere uma linguagem L:

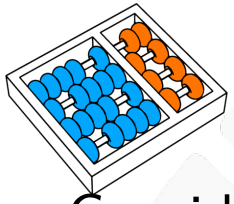
- Tome uma instância x do problema correspondente.
- Queremos encontrar uma sequência de bits $y \in \{0,1\}^*$.



Certificado

Considere uma linguagem L:

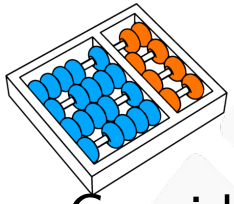
- Tome uma instância x do problema correspondente.
- Queremos encontrar uma sequência de bits $y \in \{0,1\}^*$.
- De forma que verificar y permite concluir que $x \in L$.



Certificado

Considere uma linguagem L:

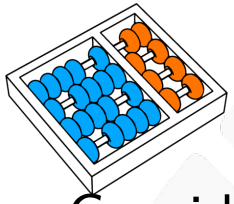
- Tome uma instância x do problema correspondente.
- Queremos encontrar uma sequência de bits $y \in \{0,1\}^*$.
- De forma que verificar y permite concluir que $x \in L$.
- Normalmente y é a codificação de uma solução para x.



Certificado

Considere uma linguagem L:

- Tome uma instância x do problema correspondente.
- Queremos encontrar uma sequência de bits $y \in \{0,1\}^*$.
- De forma que verificar y permite concluir que $x \in L$.
- Normalmente y é a codificação de uma solução para x.
- Chamamos y de **CERTIFICADO** para x.

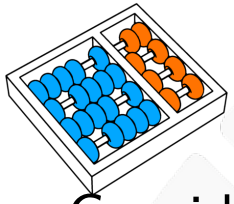


Certificado

Considere uma linguagem L:

- Tome uma instância x do problema correspondente.
- Queremos encontrar uma sequência de bits $y \in \{0,1\}^*$.
- De forma que verificar y permite concluir que $x \in L$.
- Normalmente y é a codificação de uma solução para x.
- Chamamos y de **CERTIFICADO** para x.

Problema (Certificado para PATH)



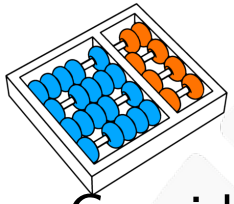
Certificado

Considere uma linguagem L:

- Tome uma instância x do problema correspondente.
- Queremos encontrar uma sequência de bits $y \in \{0,1\}^*$.
- De forma que verificar y permite concluir que $x \in L$.
- Normalmente y é a codificação de uma solução para x.
- Chamamos y de **CERTIFICADO** para x.

Problema (Certificado para PATH)

- *Tome uma instância* $x = \langle G, u, v, k \rangle$ *de PATH*



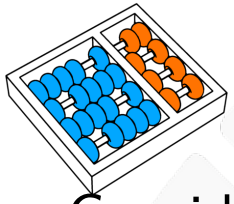
Certificado

Considere uma linguagem L:

- Tome uma instância x do problema correspondente.
- Queremos encontrar uma sequência de bits $y \in \{0,1\}^*$.
- De forma que verificar y permite concluir que $x \in L$.
- Normalmente y é a codificação de uma solução para x.
- Chamamos y de **CERTIFICADO** para x.

Problema (Certificado para PATH)

- *Tome uma instância* $x = \langle G, u, v, k \rangle$ *de PATH*
  1. *Se* x *é* SIM, ***EXISTE*** *caminho* P *de* u *a* v *com até* k *arestas.*



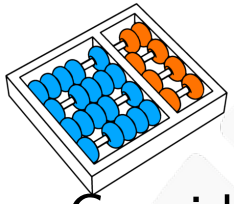
Certificado

Considere uma linguagem L:

- Tome uma instância x do problema correspondente.
- Queremos encontrar uma sequência de bits $y \in \{0,1\}^*$.
- De forma que verificar y permite concluir que $x \in L$.
- Normalmente y é a codificação de uma solução para x.
- Chamamos y de **CERTIFICADO** para x.

Problema (Certificado para PATH)

- *Tome uma instância $x = \langle G, u, v, k \rangle$ de PATH*
  1. *Se x é* SIM, ***EXISTE*** *caminho P de u a v com até k arestas.*
  2. *Se x é* NAO, ***NÃO EXISTE*** *caminho de u a v com até k arestas.*



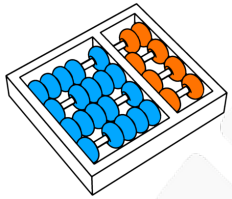
Certificado

Considere uma linguagem L:

- Tome uma instância x do problema correspondente.
- Queremos encontrar uma sequência de bits $y \in \{0,1\}^*$.
- De forma que verificar y permite concluir que $x \in L$.
- Normalmente y é a codificação de uma solução para x.
- Chamamos y de **CERTIFICADO** para x.

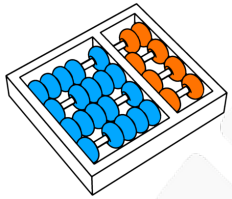
Problema (Certificado para PATH)

- *Tome uma instância $x = \langle G, u, v, k \rangle$ de PATH*
  1. *Se x é* SIM, ***EXISTE*** *caminho P de u a v com até k arestas.*
  2. *Se x é* NAO, ***NÃO EXISTE*** *caminho de u a v com até k arestas.*
- *No primeiro caso, $y = \langle P \rangle$ é um certificado de que $x \in PATH$.*



Verificador

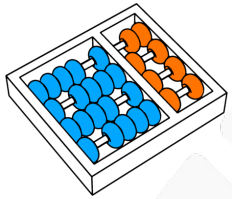
Um **VERIFICADOR** para uma linguagem L é um algoritmo que recebe uma instância x e um sequência de bits y tal que:



Verificador

Um **VERIFICADOR** para uma linguagem L é um algoritmo que recebe uma instância x e um sequência de bits y tal que:

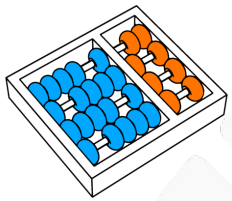
- Se $x \in L$, ele devolve SIM para algum certificado y.



Verificador

Um **VERIFICADOR** para uma linguagem L é um algoritmo que recebe uma instância x e um sequência de bits y tal que:

- Se $x \in L$, ele devolve SIM para algum certificado y.
- Se $x \notin L$, ele devolve NAO independentemente de y.



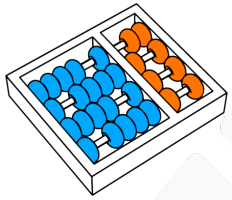
Verificador

Um **VERIFICADOR** para uma linguagem L é um algoritmo que recebe uma instância x e um sequência de bits y tal que:

- Se $x \in L$, ele devolve SIM para algum certificado y.
- Se $x \notin L$, ele devolve NAO independentemente de y.

Algoritmo: VERIFICA-PATH$(\langle G, u, v, k\rangle, \langle P\rangle)$

```
1 se ⟨P⟩ não é codificação de um caminho de G
2     devolva NAO
3 se P tem mais que k arestas
4     devolva NAO
5 se P não sai de u e chega em v
6     devolva NAO
7 devolva SIM
```



Verificador

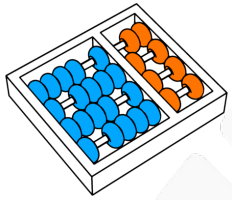
Um **VERIFICADOR** para uma linguagem L é um algoritmo que recebe uma instância x e um sequência de bits y tal que:

- Se $x \in L$, ele devolve SIM para algum certificado y.
- Se $x \notin L$, ele devolve NAO independentemente de y.

Algoritmo: VERIFICA-PATH$(\langle G, u, v, k\rangle, \langle P\rangle)$

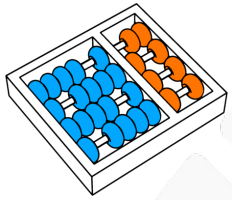
```
1 se ⟨P⟩ não é codificação de um caminho de G
2     devolva NAO
3 se P tem mais que k arestas
4     devolva NAO
5 se P não sai de u e chega em v
6     devolva NAO
7 devolva SIM
```

- Normalmente, omitimos o passo que valida a codificação.



Tempo de verificação

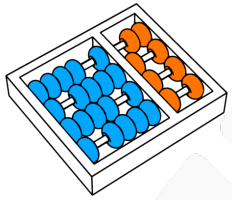
Queremos executar o verificador em tempo polinomial:



Tempo de verificação

Queremos executar o verificador em tempo polinomial:

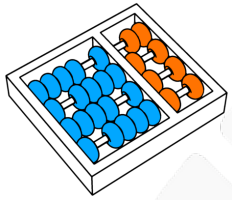
1. O **TEMPO DO VERIFICADOR** deve ser polinomial em $|x|$ e $|y|$.



Tempo de verificação

Queremos executar o verificador em tempo polinomial:

1. O **TEMPO DO VERIFICADOR** deve ser polinomial em $|x|$ e $|y|$.
2. o **TAMANHO DO CERTIFICADO** $|y|$ deve ser polinomial em $|x|$.

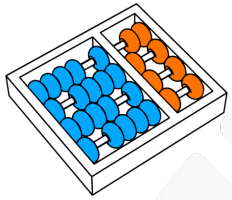


Tempo de verificação

Queremos executar o verificador em tempo polinomial:

1. O **TEMPO DO VERIFICADOR** deve ser polinomial em $|x|$ e $|y|$.
2. o **TAMANHO DO CERTIFICADO** $|y|$ deve ser polinomial em $|x|$.

Por quê?



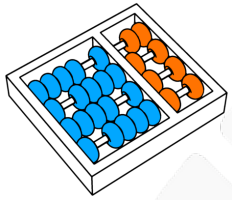
Tempo de verificação

Queremos executar o verificador em tempo polinomial:

1. O **TEMPO DO VERIFICADOR** deve ser polinomial em $|x|$ e $|y|$.
2. o **TAMANHO DO CERTIFICADO** $|y|$ deve ser polinomial em $|x|$.

Por quê?

- Queremos diferenciar as tarefas de decidir e verificar.



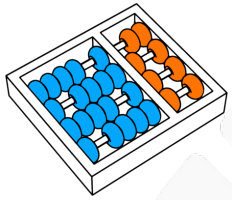
Tempo de verificação

Queremos executar o verificador em tempo polinomial:

1. O **TEMPO DO VERIFICADOR** deve ser polinomial em $|x|$ e $|y|$.
2. o **TAMANHO DO CERTIFICADO** $|y|$ deve ser polinomial em $|x|$.

Por quê?

- Queremos diferenciar as tarefas de decidir e verificar.
- Para certos problemas, **DECIDIR** uma instância é difícil.



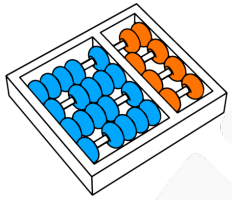
Tempo de verificação

Queremos executar o verificador em tempo polinomial:

1. O **TEMPO DO VERIFICADOR** deve ser polinomial em $|x|$ e $|y|$.
2. o **TAMANHO DO CERTIFICADO** $|y|$ deve ser polinomial em $|x|$.

Por quê?

- Queremos diferenciar as tarefas de decidir e verificar.
- Para certos problemas, **DECIDIR** uma instância é difícil.
- Mas pode ser que **VERIFICAR** uma solução seja fácil.



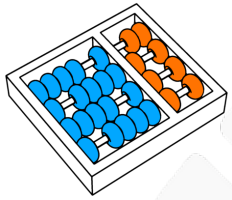
Tempo de verificação

Queremos executar o verificador em tempo polinomial:

1. O **TEMPO DO VERIFICADOR** deve ser polinomial em $|x|$ e $|y|$.
2. o **TAMANHO DO CERTIFICADO** $|y|$ deve ser polinomial em $|x|$.

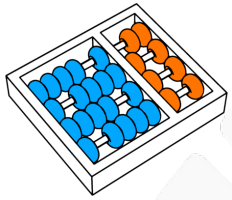
Por quê?

- Queremos diferenciar as tarefas de decidir e verificar.
- Para certos problemas, **DECIDIR** uma instância é difícil.
- Mas pode ser que **VERIFICAR** uma solução seja fácil.
- Veremos um exemplo em seguida.



Ciclo hamiltoniano

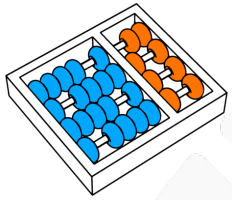
Um **CICLO HAMILTONIANO** em um grafo G é um ciclo que passa por todos os vértices.



Ciclo hamiltoniano

Um **CICLO HAMILTONIANO** em um grafo G é um ciclo que passa por todos os vértices.

- Se houver esse ciclo, dizemos que G é hamiltoniano.



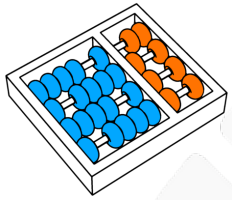
Ciclo hamiltoniano

Um **CICLO HAMILTONIANO** em um grafo G é um ciclo que passa por todos os vértices.

- Se houver esse ciclo, dizemos que G é hamiltoniano.

Problema (Ciclo hamiltoniano)

$$\mathit{HAM\text{-}CYCLE} = \{\langle G \rangle : G \text{ é um grafo hamiltoniano } \}$$



Ciclo hamiltoniano

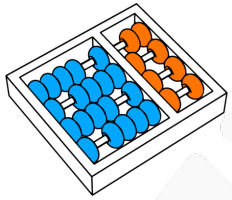
Um **CICLO HAMILTONIANO** em um grafo G é um ciclo que passa por todos os vértices.

- Se houver esse ciclo, dizemos que G é hamiltoniano.

Problema (Ciclo hamiltoniano)

$$\mathit{HAM\text{-}CYCLE} = \{\langle G \rangle : G \text{ é um grafo hamiltoniano } \}$$

Escolhas para certificado:



Ciclo hamiltoniano

Um **CICLO HAMILTONIANO** em um grafo G é um ciclo que passa por todos os vértices.

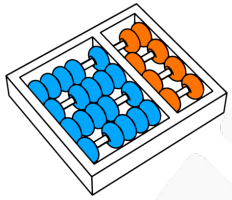
- Se houver esse ciclo, dizemos que G é hamiltoniano.

Problema (Ciclo hamiltoniano)

$$\mathit{HAM\text{-}CYCLE} = \{\langle G \rangle : G \text{ é um grafo hamiltoniano } \}$$

Escolhas para certificado:

- Um ciclo hamiltoniano de G.



Ciclo hamiltoniano

Um **CICLO HAMILTONIANO** em um grafo G é um ciclo que passa por todos os vértices.

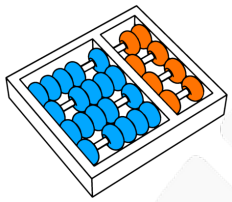
- Se houver esse ciclo, dizemos que G é hamiltoniano.

Problema (Ciclo hamiltoniano)

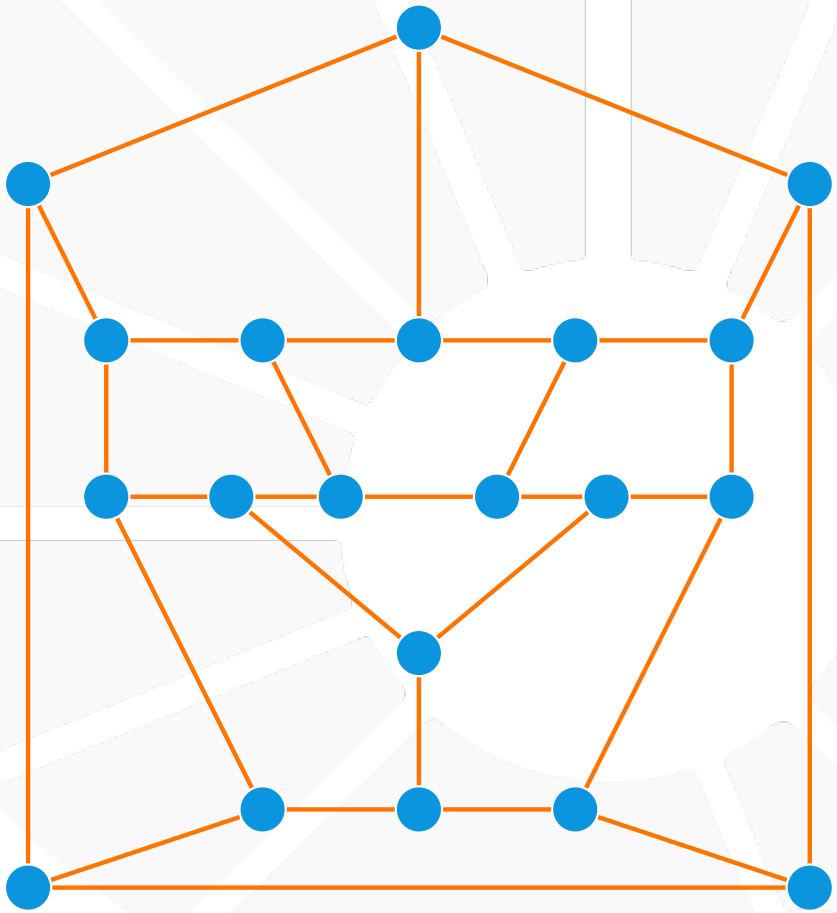
$$\mathit{HAM\text{-}CYCLE} = \{\langle G \rangle : G \text{ é um grafo hamiltoniano } \}$$

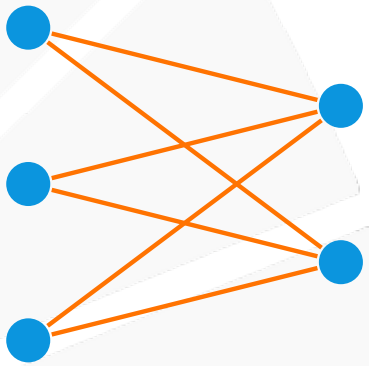
Escolhas para certificado:

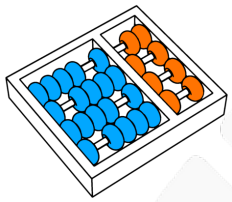
- Um ciclo hamiltoniano de G.
- Uma sequência de vértices de G.



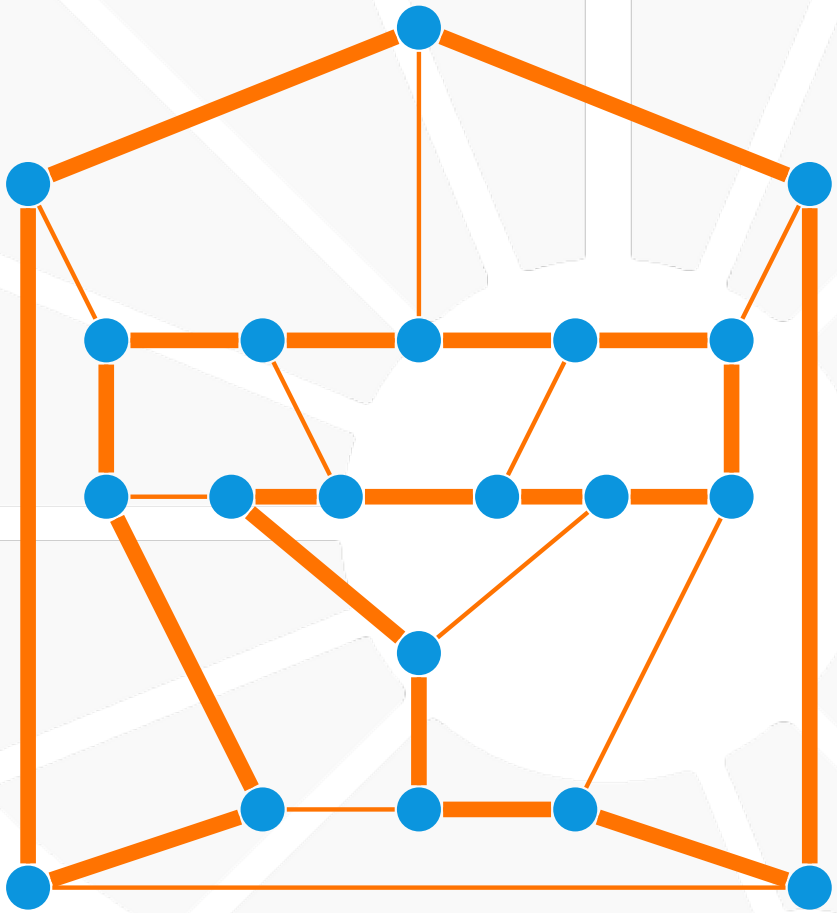
Exemplo de ciclo hamiltoniano

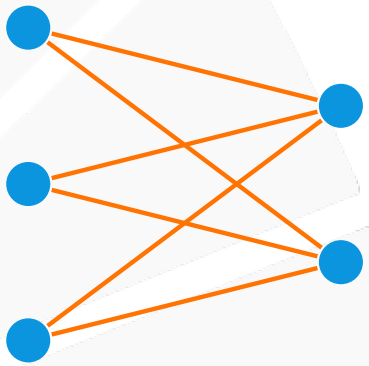




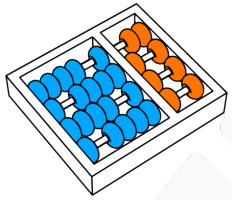


Exemplo de ciclo hamiltoniano



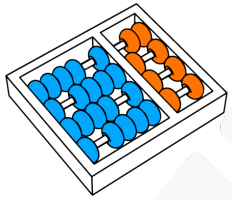


O grafo da direita não tem ciclo hamiltoniano!



Procurando um ciclo hamiltoniano

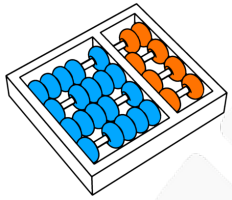
Podemos **DECIDIR** se há um ciclo hamiltoniano:



Procurando um ciclo hamiltoniano

Podemos **DECIDIR** se há um ciclo hamiltoniano:

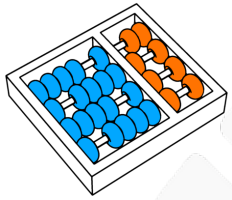
- O algoritmo trivial gasta tempo $O(V!)$.



Procurando um ciclo hamiltoniano

Podemos **DECIDIR** se há um ciclo hamiltoniano:

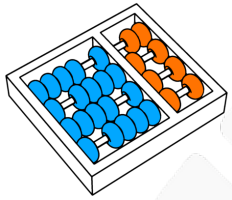
- O algoritmo trivial gasta tempo $O(V!)$.
- Os melhores algoritmos têm tempo $O(n^2 2^n)$.



Procurando um ciclo hamiltoniano

Podemos **DECIDIR** se há um ciclo hamiltoniano:

- O algoritmo trivial gasta tempo $O(V!)$.
- Os melhores algoritmos têm tempo $O(n^2 2^n)$.
- Esses algoritmos são determinísticos.

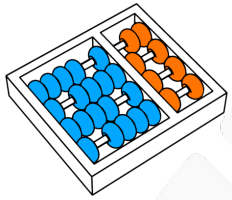


Procurando um ciclo hamiltoniano

Podemos **DECIDIR** se há um ciclo hamiltoniano:

- O algoritmo trivial gasta tempo $O(V!)$.
- Os melhores algoritmos têm tempo $O(n^2 2^n)$.
- Esses algoritmos são determinísticos.

Mas se **SORTEARMOS** um ciclo C:



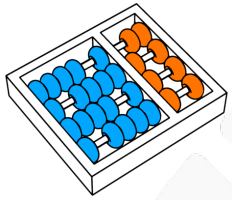
Procurando um ciclo hamiltoniano

Podemos **DECIDIR** se há um ciclo hamiltoniano:

- O algoritmo trivial gasta tempo $O(V!)$.
- Os melhores algoritmos têm tempo $O(n^2 2^n)$.
- Esses algoritmos são determinísticos.

Mas se **SORTEARMOS** um ciclo C:

- É fácil verificar se ele é hamiltoniano em tempo linear.



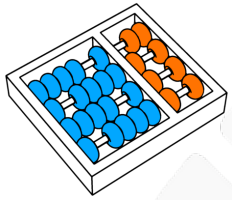
Procurando um ciclo hamiltoniano

Podemos **DECIDIR** se há um ciclo hamiltoniano:

- O algoritmo trivial gasta tempo $O(V!)$.
- Os melhores algoritmos têm tempo $O(n^2 2^n)$.
- Esses algoritmos são determinísticos.

Mas se **SORTEARMOS** um ciclo C:

- É fácil verificar se ele é hamiltoniano em tempo linear.
- Basta sortear uma sequência S de $|V|$ vértices.



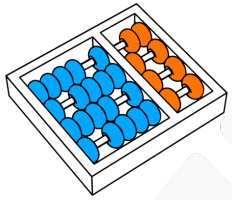
Procurando um ciclo hamiltoniano

Podemos **DECIDIR** se há um ciclo hamiltoniano:

- O algoritmo trivial gasta tempo $O(V!)$.
- Os melhores algoritmos têm tempo $O(n^2 2^n)$.
- Esses algoritmos são determinísticos.

Mas se **SORTEARMOS** um ciclo C:

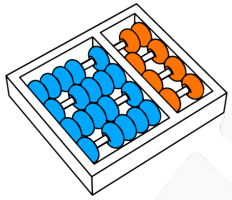
- É fácil verificar se ele é hamiltoniano em tempo linear.
- Basta sortear uma sequência S de $|V|$ vértices.
- O sorteio do ciclo é um processo não determinístico.



Verificando um ciclo

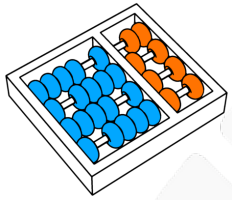
Algoritmo: VERIFICA-HAMCICLO($\langle G \rangle, \langle S \rangle$)

```
1  se S não contém todos os vértices de G
2      devolva NAO
3  n ← |S|
4  S[n + 1] ← S[1]
5  para cada i = 1, 2, ..., |S|
6      u ← S[i]
7      v ← S[i + 1]
8      se (u, v) não é aresta de G
9          devolva NAO
10 devolva SIM
```



Linguagem verificada

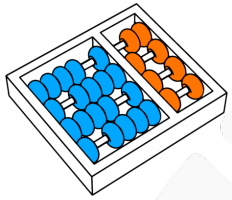
Um algoritmo V **VERIFICA** uma linguagem L se:



Linguagem verificada

Um algoritmo V **VERIFICA** uma linguagem L se:

$$L = \{x \in \{0,1\}^* \ : \ \text{existe } y \in \{0,1\}^* \text{ tal que } V(x,y) = 1\}$$

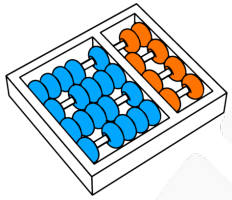


Linguagem verificada

Um algoritmo V **VERIFICA** uma linguagem L se:

$$L = \{x \in \{0,1\}^* \ : \ \text{existe } y \in \{0,1\}^* \text{ tal que } V(x,y) = 1\}$$

Em outras palavras:



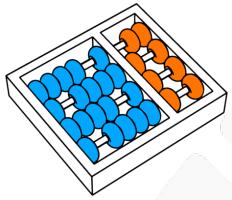
Linguagem verificada

Um algoritmo V **VERIFICA** uma linguagem L se:

$$L = \{x \in \{0,1\}^* \ : \ \text{existe } y \in \{0,1\}^* \text{ tal que } V(x,y) = 1\}$$

Em outras palavras:

1. Se $x \in L$, então **EXISTE** certificado y tal que $V(x,y) = 1$.



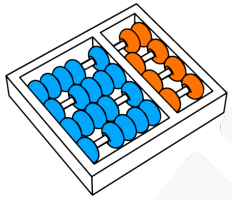
Linguagem verificada

Um algoritmo V **VERIFICA** uma linguagem L se:

$$L = \{x \in \{0,1\}^* \ : \ \text{existe } y \in \{0,1\}^* \text{ tal que } V(x,y) = 1\}$$

Em outras palavras:

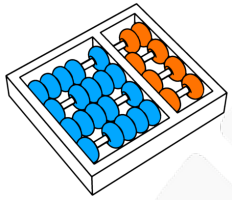
1. Se $x \in L$, então **EXISTE** certificado y tal que $V(x,y) = 1$.
2. Se $x \notin L$, então **NÃO EXISTE** certificado y tal que $V(x,y) = 1$.



A classe NP

Definição

*A **CLASSE** NP é o conjunto de linguagens $L \subseteq \{0,1\}^*$ para as quais existe algoritmo V que verifica L em tempo polinomial.*

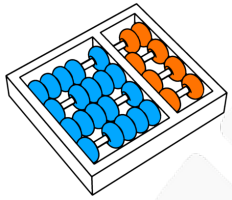


A classe NP

Definição

*A **CLASSE** NP é o conjunto de linguagens $L \subseteq \{0,1\}^*$ para as quais existe algoritmo V que verifica L em tempo polinomial.*

Em outras palavras, se $L \in$ NP, então:



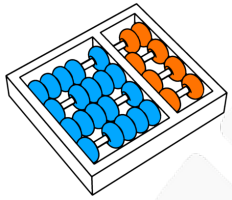
A classe NP

Definição

*A **CLASSE** NP é o conjunto de linguagens $L \subseteq \{0,1\}^*$ para as quais existe algoritmo V que verifica L em tempo polinomial.*

Em outras palavras, se $L \in$ NP, então:

1. Existe algoritmo $V(x, y)$ que verifica L.



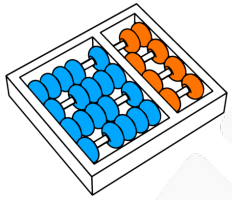
A classe NP

Definição

*A **CLASSE** NP é o conjunto de linguagens $L \subseteq \{0,1\}^*$ para as quais existe algoritmo V que verifica L em tempo polinomial.*

Em outras palavras, se $L \in$ NP, então:

1. Existe algoritmo $V(x, y)$ que verifica L.
2. Esse algoritmo executa em tempo polinomial em $|x|$ e $|y|$.



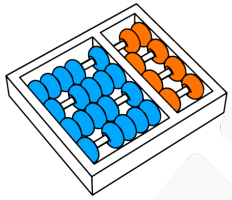
A classe NP

Definição

*A **CLASSE** NP é o conjunto de linguagens $L \subseteq \{0,1\}^*$ para as quais existe algoritmo V que verifica L em tempo polinomial.*

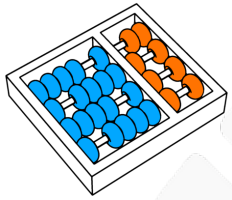
Em outras palavras, se $L \in$ NP, então:

1. Existe algoritmo $V(x, y)$ que verifica L.
2. Esse algoritmo executa em tempo polinomial em $|x|$ e $|y|$.
3. Para cada $x \in L$, existe certificado y polinomial em $|x|$.



Determinando se problema é NP

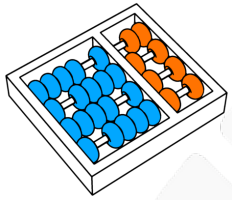
Dado problema L, devemos seguir esses passos:



Determinando se problema é NP

Dado problema L, devemos seguir esses passos:

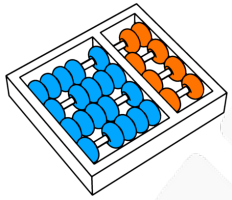
1. Identifique um **CERTIFICADO** de tamanho polinomial para L.



Determinando se problema é NP

Dado problema L, devemos seguir esses passos:

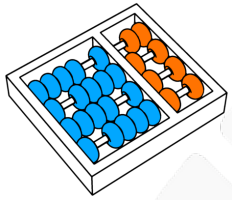
1. Identifique um **CERTIFICADO** de tamanho polinomial para L.
2. Construa um **ALGORITMO VERIFICADOR** $V(x, y)$ polinomial.



Determinando se problema é NP

Dado problema L, devemos seguir esses passos:

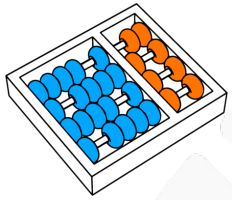
1. Identifique um **CERTIFICADO** de tamanho polinomial para L.
2. Construa um **ALGORITMO VERIFICADOR** $V(x, y)$ polinomial.
3. Demonstre que:



Determinando se problema é NP

Dado problema L, devemos seguir esses passos:

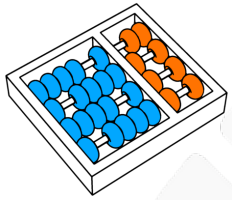
1. Identifique um **CERTIFICADO** de tamanho polinomial para L.
2. Construa um **ALGORITMO VERIFICADOR** $V(x, y)$ polinomial.
3. Demonstre que:
   - Se $x \in L$, então **existe** y tal que $V(x, y) = 1$.



Determinando se problema é NP

Dado problema L, devemos seguir esses passos:

1. Identifique um **CERTIFICADO** de tamanho polinomial para L.
2. Construa um **ALGORITMO VERIFICADOR** $V(x, y)$ polinomial.
3. Demonstre que:
   - Se $x \in L$, então **existe** y tal que $V(x, y) = 1$.
   - Se $x \notin L$, então para **qualquer** y, vale $V(x, y) = 0$.

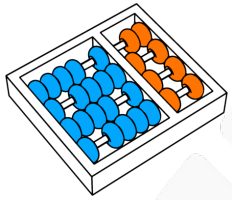


Determinando se problema é NP

Dado problema L, devemos seguir esses passos:

1. Identifique um **CERTIFICADO** de tamanho polinomial para L.
2. Construa um **ALGORITMO VERIFICADOR** $V(x, y)$ polinomial.
3. Demonstre que:
   - Se $x \in L$, então **existe** y tal que $V(x, y) = 1$.
   - Se $x \notin L$, então para **qualquer** y, vale $V(x, y) = 0$.

Exemplos:



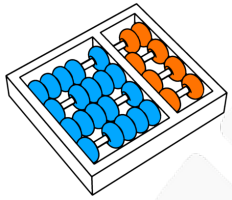
Determinando se problema é NP

Dado problema L, devemos seguir esses passos:

1. Identifique um **CERTIFICADO** de tamanho polinomial para L.
2. Construa um **ALGORITMO VERIFICADOR** $V(x, y)$ polinomial.
3. Demonstre que:
   - Se $x \in L$, então **existe** y tal que $V(x, y) = 1$.
   - Se $x \notin L$, então para **qualquer** y, vale $V(x, y) = 0$.

Exemplos:

- VERIFICA-PATH é um verificador para PATH.



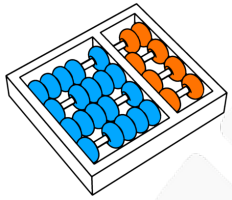
Determinando se problema é NP

Dado problema L, devemos seguir esses passos:

1. Identifique um **CERTIFICADO** de tamanho polinomial para L.
2. Construa um **ALGORITMO VERIFICADOR** $V(x, y)$ polinomial.
3. Demonstre que:
   - Se $x \in L$, então **existe** y tal que $V(x, y) = 1$.
   - Se $x \notin L$, então para **qualquer** y, vale $V(x, y) = 0$.

Exemplos:

- VERIFICA-PATH é um verificador para PATH.
- VERIFICA-HAMCICLO é um verificador para HAM-CYCLE.



Determinando se problema é NP

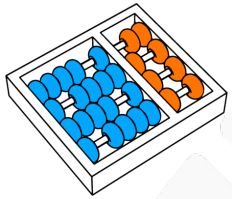
Dado problema L, devemos seguir esses passos:

1. Identifique um **CERTIFICADO** de tamanho polinomial para L.
2. Construa um **ALGORITMO VERIFICADOR** $V(x, y)$ polinomial.
3. Demonstre que:
   - Se $x \in L$, então **existe** y tal que $V(x, y) = 1$.
   - Se $x \notin L$, então para **qualquer** y, vale $V(x, y) = 0$.

Exemplos:

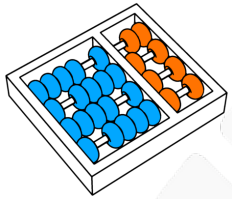
- VERIFICA-PATH é um verificador para PATH.
- VERIFICA-HAMCICLO é um verificador para HAM-CYCLE.

Portanto, PATH e HAM-CYCLE estão em NP.



NP contém P

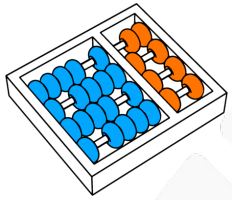
Seja $L \in \mathrm{P}$:



NP contém P

Seja $L \in$ P:

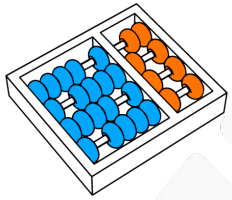
- Exite algoritmo A que decide L.



NP contém P

Seja $L \in \mathrm{P}$:

- Exite algoritmo A que decide L.
- Vamos construir um verificador para L.



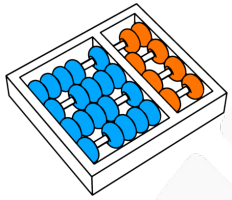
NP contém P

Seja $L \in \mathrm{P}$:

- Exite algoritmo A que decide L.
- Vamos construir um verificador para L.

Algoritmo: $\textsc{Verifica-L}(x, y)$:

1 **devolva** $A(x)$



NP contém P

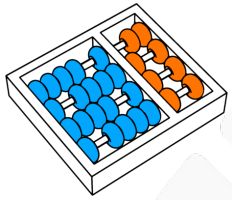
Seja $L \in \mathrm{P}$:

- Exite algoritmo A que decide L.
- Vamos construir um verificador para L.

Algoritmo: $\textsc{Verifica-L}(x, y)$:

1 **devolva** $A(x)$

- O verificador só precisa ignorar o argumento y.



NP contém P

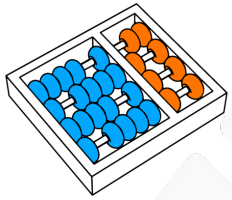
Seja $L \in \mathrm{P}$:

- Exite algoritmo A que decide L.
- Vamos construir um verificador para L.

Algoritmo: $\textsc{Verifica-L}(x, y)$:

1 **devolva** $A(x)$

- O verificador só precisa ignorar o argumento y.
- Podemos escolher qualquer certificado (e.g. $y = \varepsilon$).



NP contém P

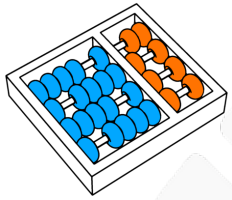
Seja $L \in \mathrm{P}$:

- Exite algoritmo A que decide L.
- Vamos construir um verificador para L.

Algoritmo: $\textsc{Verifica-L}(x, y)$:

1 **devolva** $A(x)$

- O verificador só precisa ignorar o argumento y.
- Podemos escolher qualquer certificado (e.g. $y = \varepsilon$).
- Analisamos:



NP contém P

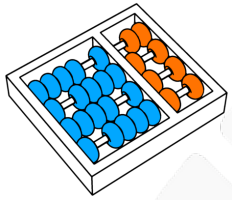
Seja $L \in \mathrm{P}$:

- Exite algoritmo A que decide L.
- Vamos construir um verificador para L.

Algoritmo: $\textsc{Verifica-L}(x, y)$:

1 **devolva** $A(x)$

- O verificador só precisa ignorar o argumento y.
- Podemos escolher qualquer certificado (e.g. $y = \varepsilon$).
- Analisamos:
  - Se $x \in L$, então $A(x) = 1$, daí $\textsc{Verifica-L}(x, \varepsilon) = 1$.



NP contém P

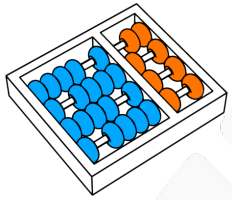
Seja $L \in \mathrm{P}$:

- Exite algoritmo A que decide L.
- Vamos construir um verificador para L.

Algoritmo: $\textsc{Verifica-L}(x, y)$:

1 **devolva** $A(x)$

- O verificador só precisa ignorar o argumento y.
- Podemos escolher qualquer certificado (e.g. $y = \varepsilon$).
- Analisamos:
  - Se $x \in L$, então $A(x) = 1$, daí $\textsc{Verifica-L}(x, \varepsilon) = 1$.
  - Se $x \notin L$, então $A(x) = 0$, daí $\textsc{Verifica-L}(x, y) = 0$ para todo y.



NP contém P

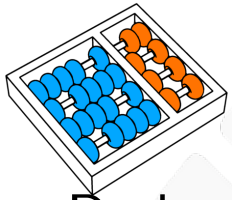
Seja $L \in \mathrm{P}$:

- Exite algoritmo A que decide L.
- Vamos construir um verificador para L.

Algoritmo: $\textsc{Verifica-L}(x, y)$:

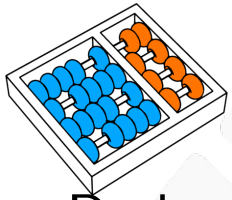
1 **devolva** $A(x)$

- O verificador só precisa ignorar o argumento y.
- Podemos escolher qualquer certificado (e.g. $y = \varepsilon$).
- Analisamos:
  - Se $x \in L$, então $A(x) = 1$, daí $\textsc{Verifica-L}(x, \varepsilon) = 1$.
  - Se $x \notin L$, então $A(x) = 0$, daí $\textsc{Verifica-L}(x, y) = 0$ para todo y.
- Assim $L \in \mathrm{NP}$ e concluímos que $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$.



O problema complementar

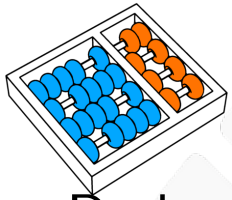
Dada uma linguagem L, o seu complementar é $\overline{L} = \{0,1\}^* \setminus L$.



O problema complementar

Dada uma linguagem L, o seu complementar é $\overline{L} = \{0,1\}^* \setminus L$.

- $\overline{L}$ é o conjunto de instâncias de L com resposta NAO.



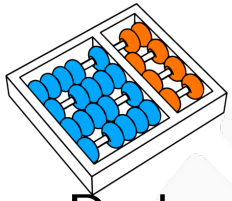
O problema complementar

Dada uma linguagem L, o seu complementar é $\overline{L} = \{0,1\}^* \setminus L$.

- $\overline{L}$ é o conjunto de instâncias de L com resposta NAO.
- Exemplo:

$$\text{HAM-CYCLE} = \{\langle G \rangle : G \text{ possui ciclo hamiltoniano}\}$$

$$\overline{\text{HAM-CYCLE}} = \{\langle G \rangle : G \textbf{ NÃO} \text{ possui ciclo hamiltoniano}\}$$



O problema complementar

Dada uma linguagem L, o seu complementar é $\overline{L} = \{0,1\}^* \setminus L$.

- $\overline{L}$ é o conjunto de instâncias de L com resposta NAO.
- Exemplo:

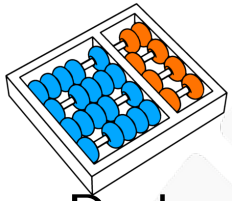
$$\text{HAM-CYCLE} = \{\langle G \rangle : G \text{ possui ciclo hamiltoniano}\}$$

$$\overline{\text{HAM-CYCLE}} = \{\langle G \rangle : G \textbf{ NÃO} \text{ possui ciclo hamiltoniano}\}$$

Definição

A classe complementar de NP *é o conjunto de linguagens*

$$\text{co-NP} = \{L \subseteq \Sigma^* : \overline{L} \in \text{NP}\}$$



O problema complementar

Dada uma linguagem L, o seu complementar é $\overline{L} = \{0,1\}^* \setminus L$.

- $\overline{L}$ é o conjunto de instâncias de L com resposta NAO.
- Exemplo:

$$\text{HAM-CYCLE} = \{\langle G \rangle : G \text{ possui ciclo hamiltoniano}\}$$

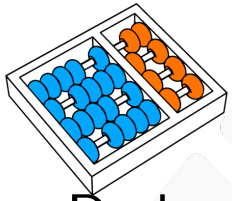
$$\overline{\text{HAM-CYCLE}} = \{\langle G \rangle : G \textbf{ NÃO} \text{ possui ciclo hamiltoniano}\}$$

Definição

A classe complementar de NP *é o conjunto de linguagens*

$$\text{co-NP} = \{L \subseteq \Sigma^* : \overline{L} \in \text{NP}\}$$

Exemplos:



O problema complementar

Dada uma linguagem L, o seu complementar é $\overline{L} = \{0,1\}^* \setminus L$.

- $\overline{L}$ é o conjunto de instâncias de L com resposta NAO.
- Exemplo:

$$\text{HAM-CYCLE} = \{\langle G \rangle : G \text{ possui ciclo hamiltoniano}\}$$

$$\overline{\text{HAM-CYCLE}} = \{\langle G \rangle : G \textbf{ NÃO} \text{ possui ciclo hamiltoniano}\}$$

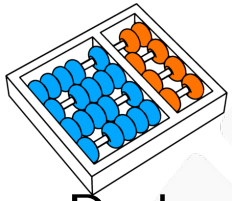
Definição

A classe complementar de NP *é o conjunto de linguagens*

$$\text{co-NP} = \{L \subseteq \Sigma^* : \overline{L} \in \text{NP}\}$$

Exemplos:

- $\overline{\text{HAM-CYCLE}} \in$ co-NP



O problema complementar

Dada uma linguagem L, o seu complementar é $\overline{L} = \{0,1\}^* \setminus L$.

- $\overline{L}$ é o conjunto de instâncias de L com resposta NAO.
- Exemplo:

$$\text{HAM-CYCLE} = \{\langle G \rangle : G \text{ possui ciclo hamiltoniano}\}$$

$$\overline{\text{HAM-CYCLE}} = \{\langle G \rangle : G \textbf{ NÃO} \text{ possui ciclo hamiltoniano}\}$$

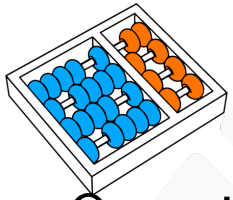
Definição

A classe complementar de NP *é o conjunto de linguagens*

$$\text{co-NP} = \{L \subseteq \Sigma^* : \overline{L} \in \text{NP}\}$$

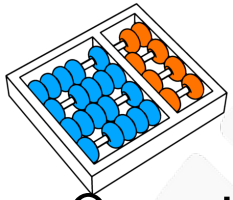
Exemplos:

- $\overline{\text{HAM-CYCLE}} \in$ co-NP
- P $\subseteq$ co-NP



Outro exemplo: tautologia

O conjunto co-NP contém as linguagens que possuem um certificado curto para a resposta NAO.

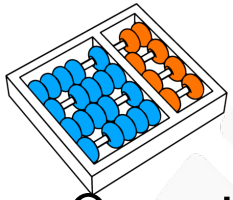


Outro exemplo: tautologia

O conjunto co-NP contém as linguagens que possuem um certificado curto para a resposta NAO.

Problema (Tautologia)

Dada uma fórmula booleana com um conjunto de n variáveis e operadores $\wedge$, $\vee$, $\neg$ etc, ela é verdadeira para toda atribuição de variáveis?



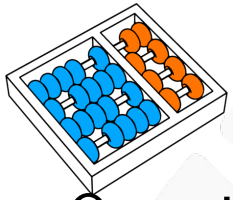
Outro exemplo: tautologia

O conjunto co-NP contém as linguagens que possuem um certificado curto para a resposta NAO.

Problema (Tautologia)

Dada uma fórmula booleana com um conjunto de n variáveis e operadores $\wedge$, $\vee$, $\neg$ etc, ela é verdadeira para toda atribuição de variáveis?

- $p \vee \neg p$, $((z \wedge y) \vee \neg x \vee (x \wedge \neg y)) \vee (\neg z \wedge y)$ são tautologias.



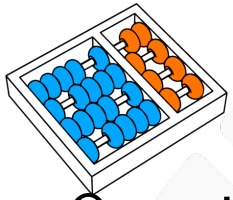
Outro exemplo: tautologia

O conjunto co-NP contém as linguagens que possuem um certificado curto para a resposta NAO.

Problema (Tautologia)

Dada uma fórmula booleana com um conjunto de n variáveis e operadores $\wedge$, $\vee$, $\neg$ etc, ela é verdadeira para toda atribuição de variáveis?

- $p \vee \neg p$, $((z \wedge y) \vee \neg x \vee (x \wedge \neg y)) \vee (\neg z \wedge y)$ são tautologias.
- p, $(\neg y \vee x) \wedge (y \vee \neg x)$ **NÃO** são tautologias.



Outro exemplo: tautologia

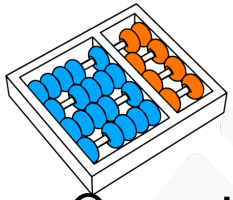
O conjunto co-NP contém as linguagens que possuem um certificado curto para a resposta NAO.

Problema (Tautologia)

Dada uma fórmula booleana com um conjunto de n variáveis e operadores $\wedge$, $\vee$, $\neg$ etc, ela é verdadeira para toda atribuição de variáveis?

- $p \vee \neg p$, $((z \wedge y) \vee \neg x \vee (x \wedge \neg y)) \vee (\neg z \wedge y)$ são tautologias.
- p, $(\neg y \vee x) \wedge (y \vee \neg x)$ **NÃO** são tautologias.

- Certificado curto para instâncias NAO: $x = 0, y = 1$.



Outro exemplo: tautologia

O conjunto co-NP contém as linguagens que possuem um certificado curto para a resposta NAO.

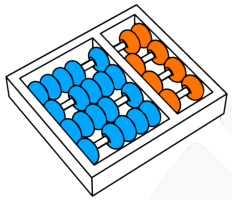
Problema (Tautologia)

Dada uma fórmula booleana com um conjunto de n variáveis e operadores $\wedge$, $\vee$, $\neg$ etc, ela é verdadeira para toda atribuição de variáveis?

- $p \vee \neg p$, $((z \wedge y) \vee \neg x \vee (x \wedge \neg y)) \vee (\neg z \wedge y)$ são tautologias.
- p, $(\neg y \vee x) \wedge (y \vee \neg x)$ **NÃO** são tautologias.

- Certificado curto para instâncias NAO: $x = 0, y = 1$.
- Não conhecemos certificado curto para instâncias SIM.

NP-completude

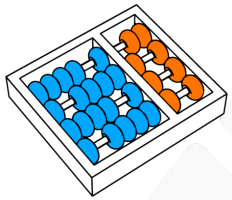


Resumo das classes até agora

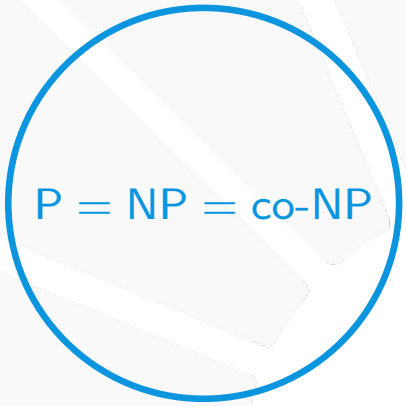
$$\mathrm{P} = \{L \subseteq \Sigma^* : \text{há algoritmo que } \textbf{DECIDE } L \text{ em tempo polinomial}\}$$

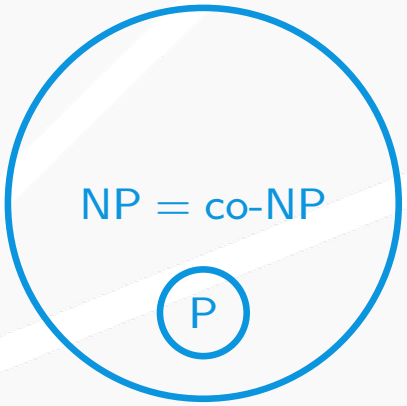
$$\mathrm{NP} = \{L \subseteq \Sigma^* : \text{há algoritmo que } \textbf{VERIFICA } L \text{ em tempo polinomial}\}$$

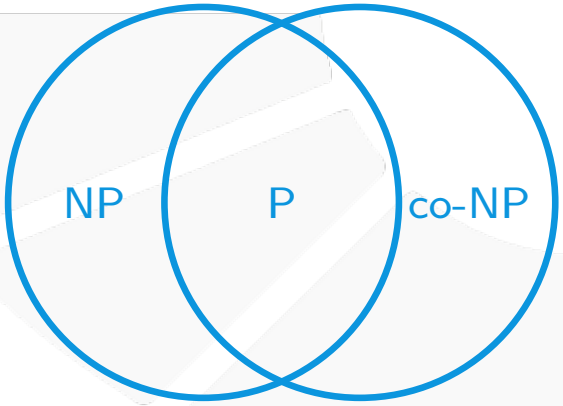
$$\text{co-NP} = \{L \subseteq \Sigma^* : \text{há algoritmo que } \textbf{VERIFICA } \overline{L} \text{ em tempo polinomial}\}$$

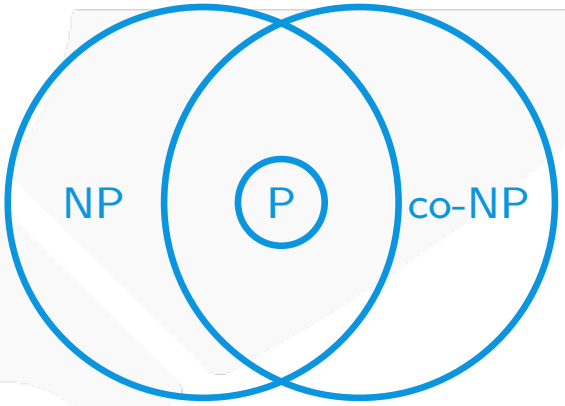


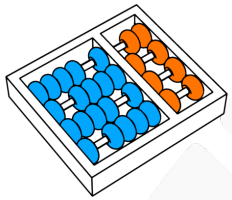
Possíveis configurações dessas classes





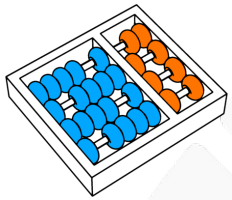






Refletindo sobre o que vimos

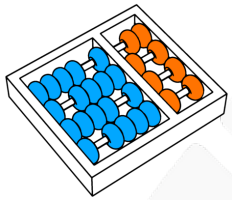
Vimos alguns exemplos de problemas que:



Refletindo sobre o que vimos

Vimos alguns exemplos de problemas que:

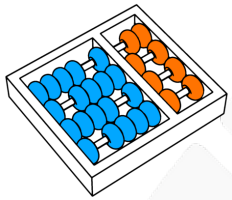
- Podemos **DECIDIR** em tempo polinomial: PATH.



Refletindo sobre o que vimos

Vimos alguns exemplos de problemas que:

- Podemos **DECIDIR** em tempo polinomial: PATH.
- Só sabemos **VERIFICAR** em tempo polinomial: HAM-CYCLE.

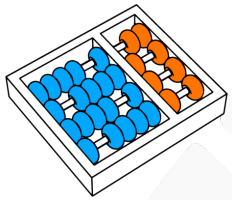


Refletindo sobre o que vimos

Vimos alguns exemplos de problemas que:

- Podemos **DECIDIR** em tempo polinomial: PATH.
- Só sabemos **VERIFICAR** em tempo polinomial: HAM-CYCLE.

Por que não conhecemos algoritmo rápido para HAM-CYCLE?



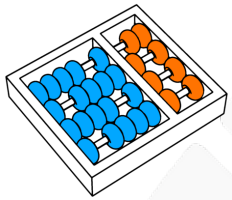
Refletindo sobre o que vimos

Vimos alguns exemplos de problemas que:

- Podemos **DECIDIR** em tempo polinomial: PATH.
- Só sabemos **VERIFICAR** em tempo polinomial: HAM-CYCLE.

Por que não conhecemos algoritmo rápido para HAM-CYCLE?

- Será que HAM-CYCLE é mais difícil do que PATH?



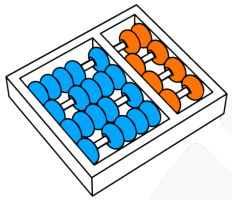
Refletindo sobre o que vimos

Vimos alguns exemplos de problemas que:

- Podemos **DECIDIR** em tempo polinomial: PATH.
- Só sabemos **VERIFICAR** em tempo polinomial: HAM-CYCLE.

Por que não conhecemos algoritmo rápido para HAM-CYCLE?

- Será que HAM-CYCLE é mais difícil do que PATH?
- Será que HAM-CYCLE é mais difícil que qualquer um em P?



Refletindo sobre o que vimos

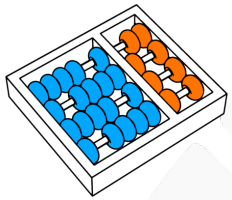
Vimos alguns exemplos de problemas que:

- Podemos **DECIDIR** em tempo polinomial: PATH.
- Só sabemos **VERIFICAR** em tempo polinomial: HAM-CYCLE.

Por que não conhecemos algoritmo rápido para HAM-CYCLE?

- Será que HAM-CYCLE é mais difícil do que PATH?
- Será que HAM-CYCLE é mais difícil que qualquer um em P?

HAM-CYCLE é NP-**DIFÍCIL**:



Refletindo sobre o que vimos

Vimos alguns exemplos de problemas que:

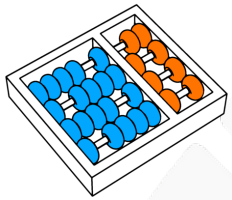
- Podemos **DECIDIR** em tempo polinomial: PATH.
- Só sabemos **VERIFICAR** em tempo polinomial: HAM-CYCLE.

Por que não conhecemos algoritmo rápido para HAM-CYCLE?

- Será que HAM-CYCLE é mais difícil do que PATH?
- Será que HAM-CYCLE é mais difícil que qualquer um em P?

HAM-CYCLE é NP-**DIFÍCIL**:

- Não sabemos se é mais difícil do que algum problema P.



Refletindo sobre o que vimos

Vimos alguns exemplos de problemas que:

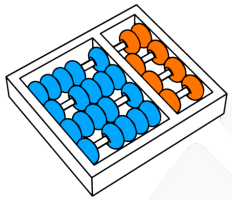
- Podemos **DECIDIR** em tempo polinomial: PATH.
- Só sabemos **VERIFICAR** em tempo polinomial: HAM-CYCLE.

Por que não conhecemos algoritmo rápido para HAM-CYCLE?

- Será que HAM-CYCLE é mais difícil do que PATH?
- Será que HAM-CYCLE é mais difícil que qualquer um em P?

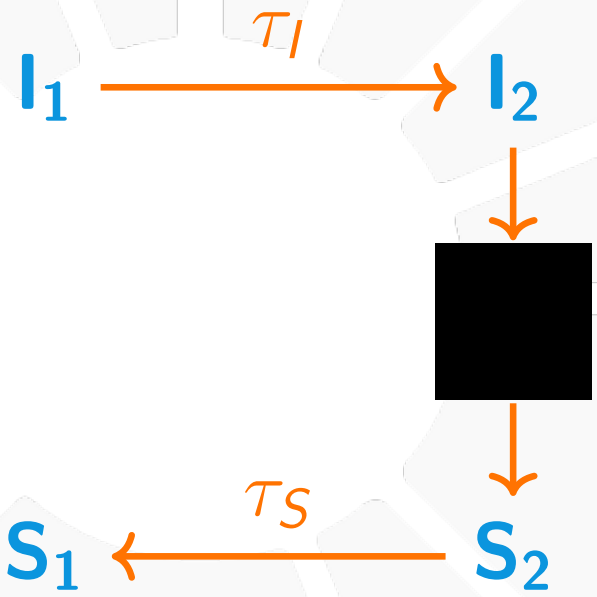
HAM-CYCLE é NP-**DIFÍCIL**:

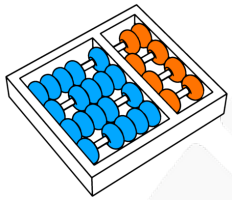
- Não sabemos se é mais difícil do que algum problema P.
- Mas sabemos que é **TÃO DIFÍCIL QUANTO** qualquer problema NP.



Como comparar problemas?

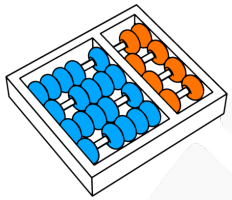
A ferramenta adequada para comparar problemas são as reduções





Reduções de Karp

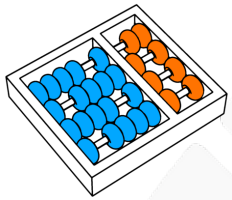
Estamos interessados em reduções em que:



Reduções de Karp

Estamos interessados em reduções em que:

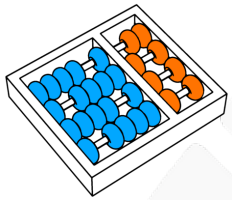
1. A transformação de entrada τ_I leva tempo polinomial.



Reduções de Karp

Estamos interessados em reduções em que:

1. A transformação de entrada τ_I leva tempo polinomial.
2. **NÃO** há transformação de saída τ_S.



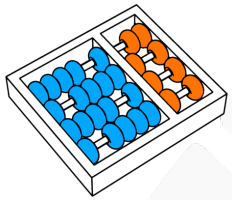
Reduções de Karp

Estamos interessados em reduções em que:

1. A transformação de entrada τ_I leva tempo polinomial.
2. **NÃO** há transformação de saída τ_S.

Definição (Redução de Karp)

*A linguagem L_1 é **REDUTÍVEL EM TEMPO POLINOMIAL** para L_2 se:*



Reduções de Karp

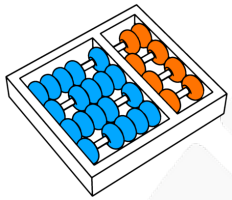
Estamos interessados em reduções em que:

1. A transformação de entrada τ_I leva tempo polinomial.
2. **NÃO** há transformação de saída τ_S.

Definição (Redução de Karp)

*A linguagem L_1 é **REDUTÍVEL EM TEMPO POLINOMIAL** para L_2 se:*

- *Existe algoritmo $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$,*



Reduções de Karp

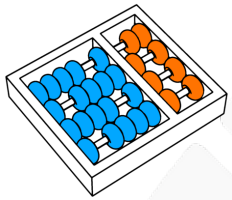
Estamos interessados em reduções em que:

1. A transformação de entrada τ_I leva tempo polinomial.
2. **NÃO** há transformação de saída τ_S.

Definição (Redução de Karp)

*A linguagem L_1 é **REDUTÍVEL EM TEMPO POLINOMIAL** para L_2 se:*

- *Existe algoritmo $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$,*
- *$f(x)$ leva tempo polinomial em $|x|$,*



Reduções de Karp

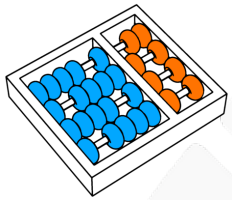
Estamos interessados em reduções em que:

1. A transformação de entrada τ_I leva tempo polinomial.
2. **NÃO** há transformação de saída τ_S.

Definição (Redução de Karp)

*A linguagem L_1 é **REDUTÍVEL EM TEMPO POLINOMIAL** para L_2 se:*

- *Existe algoritmo $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$,*
- *$f(x)$ leva tempo polinomial em $|x|$,*
- *$x \in L_1$ se e somente se $f(x) \in L_2$.*



Reduções de Karp

Estamos interessados em reduções em que:

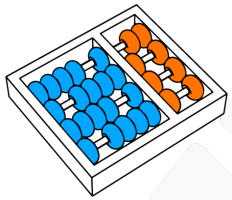
1. A transformação de entrada τ_I leva tempo polinomial.
2. **NÃO** há transformação de saída τ_S.

Definição (Redução de Karp)

*A linguagem L_1 é **REDUTÍVEL EM TEMPO POLINOMIAL** para L_2 se:*

- *Existe algoritmo $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$,*
- *$f(x)$ leva tempo polinomial em $|x|$,*
- *$x \in L_1$ se e somente se $f(x) \in L_2$.*

- Escrevemos $L_1 \preccurlyeq_p L_2$.



Reduções de Karp

Estamos interessados em reduções em que:

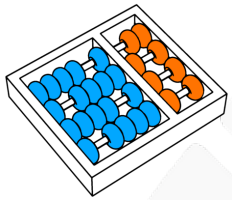
1. A transformação de entrada τ_I leva tempo polinomial.
2. **NÃO** há transformação de saída τ_S.

Definição (Redução de Karp)

*A linguagem L_1 é **REDUTÍVEL EM TEMPO POLINOMIAL** para L_2 se:*

- *Existe algoritmo $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$,*
- *$f(x)$ leva tempo polinomial em $|x|$,*
- *$x \in L_1$ se e somente se $f(x) \in L_2$.*

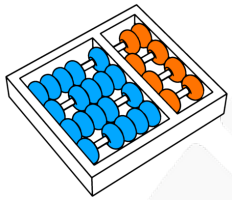
- Escrevemos $L_1 \preccurlyeq_p L_2$.
- Dizemos que f reduz L_1 para L_2.



Reduções de tempo polinomial

Teorema

Considere linguagens $L_1, L_2 \subseteq \{0,1\}^*$ *tais que* $L_1 \preccurlyeq_p L_2$.
Se $L_2 \in \mathrm{P}$, *então* $L_1 \in \mathrm{P}$.

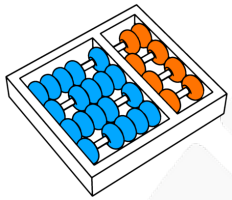


Reduções de tempo polinomial

Teorema

Considere linguagens $L_1, L_2 \subseteq \{0,1\}^*$ *tais que* $L_1 \preccurlyeq_p L_2$.
Se $L_2 \in \mathrm{P}$, *então* $L_1 \in \mathrm{P}$.

Demonstração:



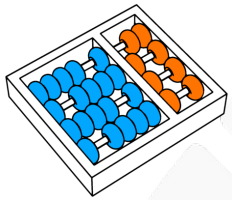
Reduções de tempo polinomial

Teorema

Considere linguagens $L_1, L_2 \subseteq \{0,1\}^*$ *tais que* $L_1 \preccurlyeq_p L_2$.
Se $L_2 \in \mathrm{P}$, *então* $L_1 \in \mathrm{P}$.

Demonstração:

- Suponha que $L_2 \in \mathrm{P}$.



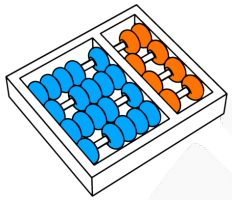
Reduções de tempo polinomial

Teorema

Considere linguagens $L_1, L_2 \subseteq \{0,1\}^*$ *tais que* $L_1 \preccurlyeq_p L_2$.
Se $L_2 \in \mathrm{P}$, *então* $L_1 \in \mathrm{P}$.

Demonstração:

- Suponha que $L_2 \in \mathrm{P}$.
- Seja A_2 um algoritmo que decide L_2 em tempo polinomial.



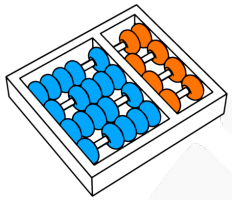
Reduções de tempo polinomial

Teorema

Considere linguagens $L_1, L_2 \subseteq \{0,1\}^*$ *tais que* $L_1 \preccurlyeq_p L_2$.
Se $L_2 \in \mathrm{P}$, *então* $L_1 \in \mathrm{P}$.

Demonstração:

- Suponha que $L_2 \in \mathrm{P}$.
- Seja A_2 um algoritmo que decide L_2 em tempo polinomial.
- Seja f um algoritmo polinomial que reduz L_1 a L_2.



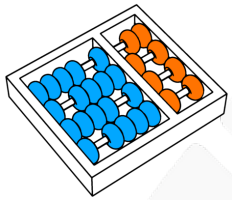
Reduções de tempo polinomial

Teorema

Considere linguagens $L_1, L_2 \subseteq \{0,1\}^*$ *tais que* $L_1 \preccurlyeq_p L_2$.
Se $L_2 \in \mathrm{P}$, *então* $L_1 \in \mathrm{P}$.

Demonstração:

- Suponha que $L_2 \in \mathrm{P}$.
- Seja A_2 um algoritmo que decide L_2 em tempo polinomial.
- Seja f um algoritmo polinomial que reduz L_1 a L_2.
- Crie um algoritmo A_1 fazendo $A_1(x) = A_2(f(x))$.



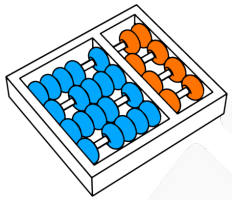
Reduções de tempo polinomial

Teorema

Considere linguagens $L_1, L_2 \subseteq \{0,1\}^*$ *tais que* $L_1 \preccurlyeq_p L_2$.
Se $L_2 \in \mathrm{P}$, *então* $L_1 \in \mathrm{P}$.

Demonstração:

- Suponha que $L_2 \in \mathrm{P}$.
- Seja A_2 um algoritmo que decide L_2 em tempo polinomial.
- Seja f um algoritmo polinomial que reduz L_1 a L_2.
- Crie um algoritmo A_1 fazendo $A_1(x) = A_2(f(x))$.
- Já que f é uma redução, obtemos:



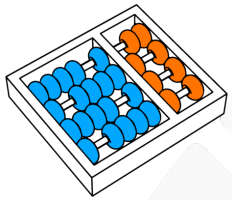
Reduções de tempo polinomial

Teorema

Considere linguagens $L_1, L_2 \subseteq \{0,1\}^*$ *tais que* $L_1 \preccurlyeq_p L_2$.
Se $L_2 \in \mathrm{P}$, *então* $L_1 \in \mathrm{P}$.

Demonstração:

- Suponha que $L_2 \in \mathrm{P}$.
- Seja A_2 um algoritmo que decide L_2 em tempo polinomial.
- Seja f um algoritmo polinomial que reduz L_1 a L_2.
- Crie um algoritmo A_1 fazendo $A_1(x) = A_2(f(x))$.
- Já que f é uma redução, obtemos:
  - Se $x \in L_1$, então $f(x) \in L_2$ e $A_2(f(x)) = 1$, daí $A_1(x) = 1$.



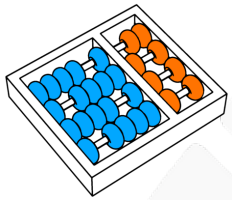
Reduções de tempo polinomial

Teorema

Considere linguagens $L_1, L_2 \subseteq \{0,1\}^*$ *tais que* $L_1 \preccurlyeq_p L_2$.
Se $L_2 \in \mathrm{P}$, *então* $L_1 \in \mathrm{P}$.

Demonstração:

- Suponha que $L_2 \in \mathrm{P}$.
- Seja A_2 um algoritmo que decide L_2 em tempo polinomial.
- Seja f um algoritmo polinomial que reduz L_1 a L_2.
- Crie um algoritmo A_1 fazendo $A_1(x) = A_2(f(x))$.
- Já que f é uma redução, obtemos:
  - Se $x \in L_1$, então $f(x) \in L_2$ e $A_2(f(x)) = 1$, daí $A_1(x) = 1$.
  - Se $x \notin L_1$, então $f(x) \notin L_2$ e $A_2(f(x)) = 0$, daí $A_1(x) = 0$.



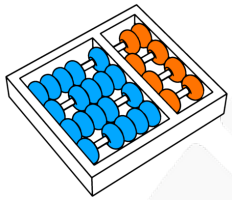
Reduções de tempo polinomial

Teorema

Considere linguagens $L_1, L_2 \subseteq \{0,1\}^*$ *tais que* $L_1 \preccurlyeq_p L_2$.
Se $L_2 \in \mathrm{P}$, *então* $L_1 \in \mathrm{P}$.

Demonstração:

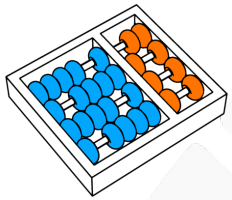
- Suponha que $L_2 \in \mathrm{P}$.
- Seja A_2 um algoritmo que decide L_2 em tempo polinomial.
- Seja f um algoritmo polinomial que reduz L_1 a L_2.
- Crie um algoritmo A_1 fazendo $A_1(x) = A_2(f(x))$.
- Já que f é uma redução, obtemos:
  - Se $x \in L_1$, então $f(x) \in L_2$ e $A_2(f(x)) = 1$, daí $A_1(x) = 1$.
  - Se $x \notin L_1$, então $f(x) \notin L_2$ e $A_2(f(x)) = 0$, daí $A_1(x) = 0$.
- Assim, A_1 decide L_1 em tempo polinomial.



Classe NP-completo

Definição

*A **CLASSE** NP-**COMPLETO** é o conjunto de linguagens $L \subseteq \{0,1\}^*$ tais que:*

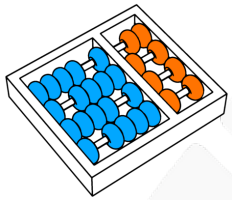


Classe NP-completo

Definição

*A **CLASSE** NP-**COMPLETO** é o conjunto de linguagens $L \subseteq \{0,1\}^*$ tais que:*

1. $L \in \text{NP}$.

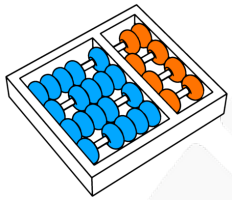


Classe NP-completo

Definição

*A **CLASSE** NP-**COMPLETO** é o conjunto de linguagens $L \subseteq \{0,1\}^*$ tais que:*

1. $L \in \text{NP}$.
2. $L' \preccurlyeq_p L$ *para todo* $L' \in \text{NP}$.



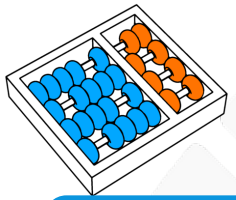
Classe NP-completo

Definição

*A **CLASSE** NP-**COMPLETO** é o conjunto de linguagens $L \subseteq \{0,1\}^*$ tais que:*

1. $L \in \text{NP}$.
2. $L' \preccurlyeq_p L$ *para todo* $L' \in \text{NP}$.

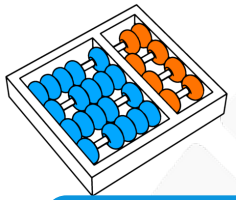
- Se apenas 2 for satisfeita, dizemos que L é NP-**DIFÍCIL**.



Condição para NP = NP

Teorema

Se existe algoritmo que decide $L \in$ NP*-completo em tempo polinomial, então* P = NP*.*

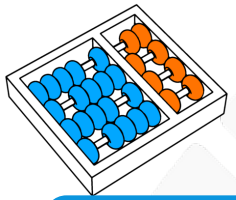


Condição para NP = NP

Teorema

Se existe algoritmo que decide $L \in$ NP*-completo em tempo polinomial, então* P = NP*.*

Demonstração:



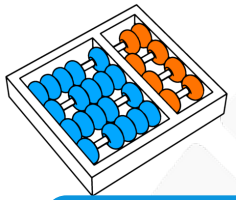
Condição para NP = NP

Teorema

Se existe algoritmo que decide $L \in$ NP*-completo em tempo polinomial, então* P = NP*.*

Demonstração:

- Suponha que existe $L \in \mathrm{P} \cap$ NP-completo.



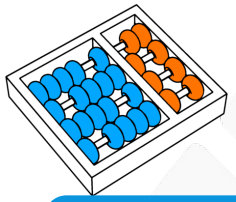
Condição para NP = NP

Teorema

Se existe algoritmo que decide $L \in$ NP*-completo em tempo polinomial, então* P = NP*.*

Demonstração:

- Suponha que existe $L \in \mathrm{P} \cap$ NP-completo.
- Como $L \in$ NP-completo, para toda $L' \in$ NP, temos $L' \preccurlyeq_p L$.



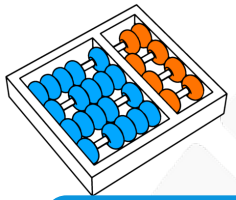
Condição para NP = NP

Teorema

Se existe algoritmo que decide $L \in$ NP*-completo em tempo polinomial, então* P = NP*.*

Demonstração:

- Suponha que existe $L \in \mathrm{P} \cap$ NP-completo.
- Como $L \in$ NP-completo, para toda $L' \in$ NP, temos $L' \preccurlyeq_p L$.
- Mas como $L \in$ P, isso implica $L' \in$ P pelo teorema anterior.



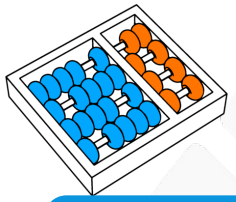
Condição para NP = NP

Teorema

Se existe algoritmo que decide $L \in$ NP-completo em tempo polinomial, então $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$.

Demonstração:

- Suponha que existe $L \in \mathrm{P} \cap$ NP-completo.
- Como $L \in$ NP-completo, para toda $L' \in \mathrm{NP}$, temos $L' \preccurlyeq_p L$.
- Mas como $L \in \mathrm{P}$, isso implica $L' \in \mathrm{P}$ pelo teorema anterior.
- Então, $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{P}$ e, portanto, $\mathrm{NP} = \mathrm{P}$.



Condição para NP = NP

Teorema

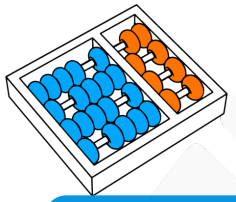
Se existe algoritmo que decide $L \in$ NP*-completo em tempo polinomial, então* P = NP*.*

Demonstração:

- Suponha que existe $L \in \mathrm{P} \cap$ NP-completo.
- Como $L \in$ NP-completo, para toda $L' \in$ NP, temos $L' \preccurlyeq_p L$.
- Mas como $L \in$ P, isso implica $L' \in$ P pelo teorema anterior.
- Então, NP $\subseteq$ P e, portanto, NP = P.

Teorema

Se existe uma linguagem $L \in$ NP *tal que* $L \notin$ P*, então* NP*-completo* $\cap$ P $= \emptyset$*.*



Condição para NP = NP

Teorema

Se existe algoritmo que decide $L \in$ NP-completo em tempo polinomial, então $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$.

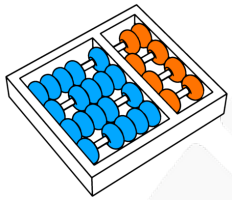
Demonstração:

- Suponha que existe $L \in \mathrm{P} \cap$ NP-completo.
- Como $L \in$ NP-completo, para toda $L' \in \mathrm{NP}$, temos $L' \preccurlyeq_p L$.
- Mas como $L \in \mathrm{P}$, isso implica $L' \in \mathrm{P}$ pelo teorema anterior.
- Então, $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{P}$ e, portanto, $\mathrm{NP} = \mathrm{P}$.

Teorema

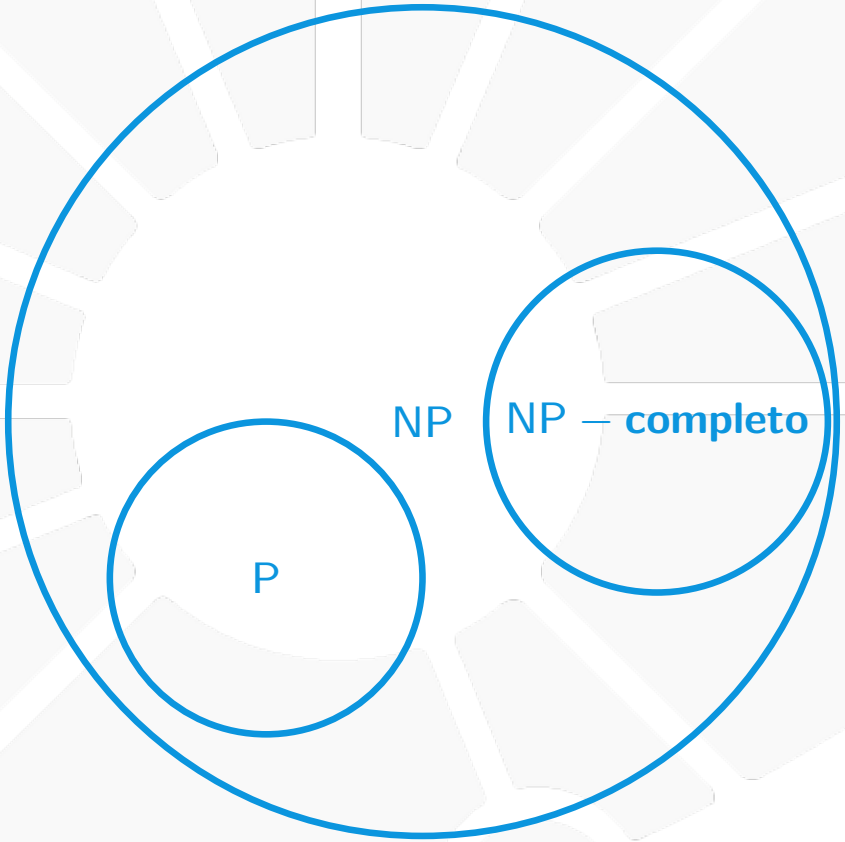
Se existe uma linguagem $L \in \mathrm{NP}$ tal que $L \notin \mathrm{P}$, então NP-*completo* $\cap \mathrm{P} = \emptyset$.

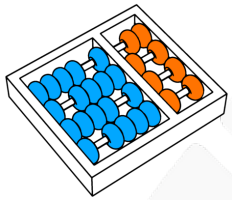
- Exercício.



Possível configuração de NP-completo

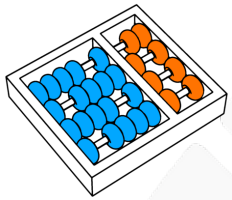
Como acreditamos que é a relação das classes:





A classe NP-completo não é vazia

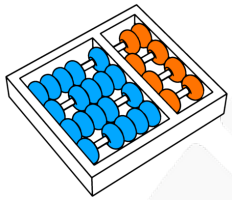
Mas será que a classe NP-completo é vazia?



A classe NP-completo não é vazia

Mas será que a classe NP-completo é vazia?

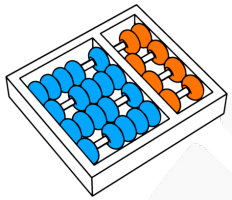
- Cook e Levin responderam que **NÃO** (independentemente).



A classe NP-completo não é vazia

Mas será que a classe NP-completo é vazia?

- Cook e Levin responderam que **NÃO** (independentemente).
- Mostraram que SAT $\in$ NP-completo.



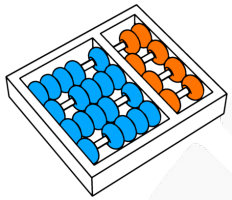
A classe NP-completo não é vazia

Mas será que a classe NP-completo é vazia?

- Cook e Levin responderam que **NÃO** (independentemente).
- Mostraram que SAT $\in$ NP-completo.

Teorema (Cook-Levin)

SAT é NP*-completo.*



A classe NP-completo não é vazia

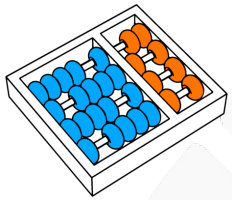
Mas será que a classe NP-completo é vazia?

- Cook e Levin responderam que **NÃO** (independentemente).
- Mostraram que SAT $\in$ NP-completo.

Teorema (Cook-Levin)

SAT é NP*-completo.*

- SAT é o problema da satisfatibilidade.



A classe NP-completo não é vazia

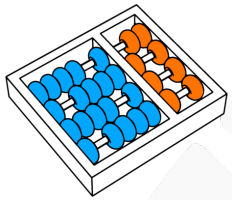
Mas será que a classe NP-completo é vazia?

- Cook e Levin responderam que **NÃO** (independentemente).
- Mostraram que SAT $\in$ NP-completo.

Teorema (Cook-Levin)

SAT é NP*-completo.*

- SAT é o problema da satisfatibilidade.
- Não vamos demonstrar esse teorema.



A classe NP-completo não é vazia

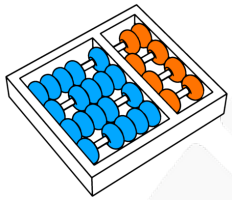
Mas será que a classe NP-completo é vazia?

- Cook e Levin responderam que **NÃO** (independentemente).
- Mostraram que SAT $\in$ NP-completo.

Teorema (Cook-Levin)

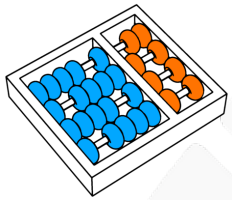
SAT é NP*-completo.*

- SAT é o problema da satisfatibilidade.
- Não vamos demonstrar esse teorema.
- Mas veremos um rascunho para um problema parecido.



Satisfatibilidade

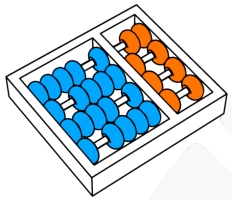
Considere uma **FÓRMULA BOOLEANA**:



Satisfatibilidade

Considere uma **FÓRMULA BOOLEANA**:

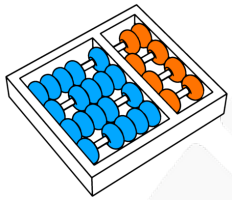
- Contém um conjuntos de variáveis booleanas.



Satisfatibilidade

Considere uma **FÓRMULA BOOLEANA**:

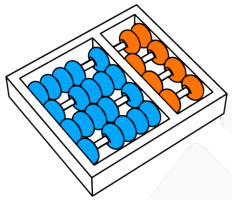
- Contém um conjuntos de variáveis booleanas.
- É escrita usando os seguintes operadores:



Satisfatibilidade

Considere uma **FÓRMULA BOOLEANA**:

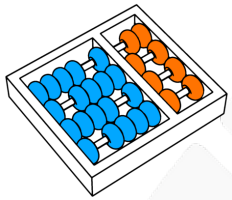
- Contém um conjuntos de variáveis booleanas.
- É escrita usando os seguintes operadores:
  1. Negação ($\neg$).



Satisfatibilidade

Considere uma **FÓRMULA BOOLEANA**:

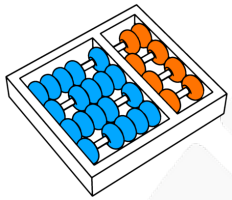
- Contém um conjuntos de variáveis booleanas.
- É escrita usando os seguintes operadores:
  1. Negação ($\neg$).
  2. Conjunção ($\wedge$).



Satisfatibilidade

Considere uma **FÓRMULA BOOLEANA**:

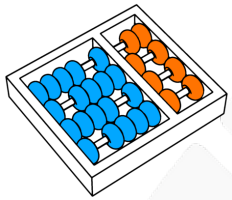
- Contém um conjuntos de variáveis booleanas.
- É escrita usando os seguintes operadores:
  1. Negação ($\neg$).
  2. Conjunção ($\wedge$).
  3. Disjunção ($\vee$).



Satisfatibilidade

Considere uma **FÓRMULA BOOLEANA**:

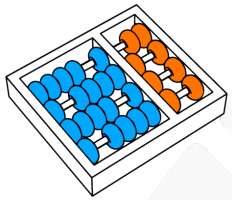
- Contém um conjuntos de variáveis booleanas.
- É escrita usando os seguintes operadores:
  1. Negação ($\neg$).
  2. Conjunção ($\wedge$).
  3. Disjunção ($\vee$).
  4. Implicação ($\rightarrow$).



Satisfatibilidade

Considere uma **FÓRMULA BOOLEANA**:

- Contém um conjuntos de variáveis booleanas.
- É escrita usando os seguintes operadores:
  1. Negação ($\neg$).
  2. Conjunção ($\wedge$).
  3. Disjunção ($\vee$).
  4. Implicação ($\rightarrow$).
  5. Equivalência ($\leftrightarrow$).

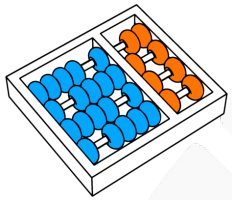


Satisfatibilidade

Considere uma **FÓRMULA BOOLEANA**:

- Contém um conjuntos de variáveis booleanas.
- É escrita usando os seguintes operadores:
  1. Negação ($\neg$).
  2. Conjunção ($\wedge$).
  3. Disjunção ($\vee$).
  4. Implicação ($\rightarrow$).
  5. Equivalência ($\leftrightarrow$).

Problema (Satisfatibilidade (SAT))



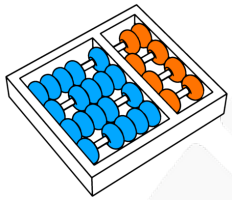
Satisfatibilidade

Considere uma **FÓRMULA BOOLEANA**:

- Contém um conjuntos de variáveis booleanas.
- É escrita usando os seguintes operadores:
  1. Negação ($\neg$).
  2. Conjunção ($\wedge$).
  3. Disjunção ($\vee$).
  4. Implicação ($\rightarrow$).
  5. Equivalência ($\leftrightarrow$).

Problema (Satisfatibilidade (SAT))

- ***Entrada:*** *Uma fórmula booleana.*



Satisfatibilidade

Considere uma **FÓRMULA BOOLEANA**:

- Contém um conjuntos de variáveis booleanas.
- É escrita usando os seguintes operadores:
  1. Negação ($\neg$).
  2. Conjunção ($\wedge$).
  3. Disjunção ($\vee$).
  4. Implicação ($\rightarrow$).
  5. Equivalência ($\leftrightarrow$).

Problema (Satisfatibilidade (SAT))

- ***Entrada:*** *Uma fórmula booleana.*
- ***Saída:*** *Decidir se existe atribuição de variáveis booleana para a qual a avaliação da fórmula é verdadeira.*

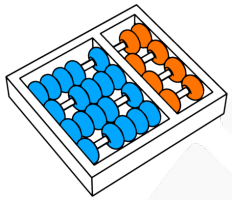
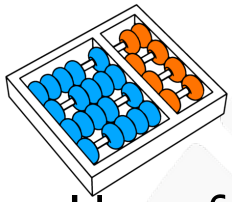


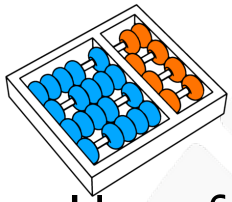
Tabela de operadores

a	b	$\neg a$	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \rightarrow b$	$a \leftrightarrow b$
F	F	V	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V	F
V	F	F	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V



Fórmula satisfazível

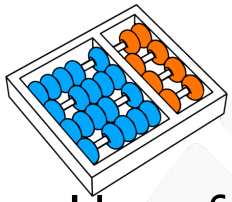
Uma formula é **SATISFAZÍVEL** se houver atribuição das variáveis para a qual a avaliação é verdadeira.



Fórmula satisfazível

Uma formula é **SATISFAZÍVEL** se houver atribuição das variáveis para a qual a avaliação é verdadeira.

Exemplo:

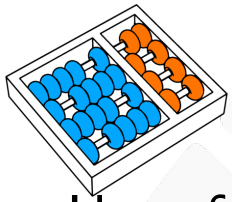


Fórmula satisfazível

Uma formula é **SATISFAZÍVEL** se houver atribuição das variáveis para a qual a avaliação é verdadeira.

Exemplo:

- Fórmula: $f = ((x_1 \rightarrow x_2) \vee \neg((\neg x_1 \leftrightarrow x_3) \vee x_4)) \wedge \neg x_2$.

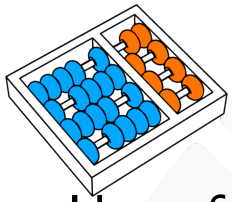


Fórmula satisfazível

Uma formula é **SATISFAZÍVEL** se houver atribuição das variáveis para a qual a avaliação é verdadeira.

Exemplo:

- Fórmula: $f = ((x_1 \rightarrow x_2) \vee \neg((\neg x_1 \leftrightarrow x_3) \vee x_4)) \wedge \neg x_2$.
- Atribuição: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1$

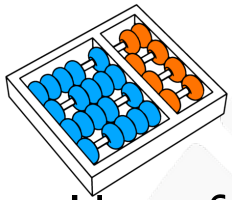


Fórmula satisfazível

Uma formula é **SATISFAZÍVEL** se houver atribuição das variáveis para a qual a avaliação é verdadeira.

Exemplo:

- Fórmula: $f = ((x_1 \rightarrow x_2) \vee \neg((\neg x_1 \leftrightarrow x_3) \vee x_4)) \wedge \neg x_2$.
- Atribuição: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1$
- Avaliação:



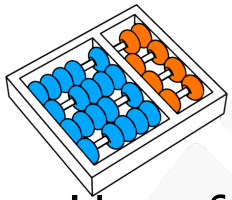
Fórmula satisfazível

Uma formula é **SATISFAZÍVEL** se houver atribuição das variáveis para a qual a avaliação é verdadeira.

Exemplo:

- Fórmula: $f = ((x_1 \rightarrow x_2) \vee \neg((\neg x_1 \leftrightarrow x_3) \vee x_4)) \wedge \neg x_2$.
- Atribuição: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1$
- Avaliação:

$$f = ((0 \rightarrow 0) \vee \neg((\neg 0 \leftrightarrow 1) \vee 1)) \wedge \neg 0$$



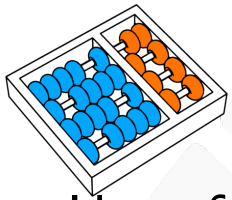
Fórmula satisfazível

Uma formula é **SATISFAZÍVEL** se houver atribuição das variáveis para a qual a avaliação é verdadeira.

Exemplo:

- Fórmula: $f = ((x_1 \rightarrow x_2) \vee \neg((\neg x_1 \leftrightarrow x_3) \vee x_4)) \wedge \neg x_2$.
- Atribuição: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1$
- Avaliação:

$$\begin{aligned} f &= ((0 \rightarrow 0) \vee \neg((\neg 0 \leftrightarrow 1) \vee 1)) \wedge \neg 0 \\ &= (1 \vee \neg((1 \leftrightarrow 1) \vee 1)) \wedge 1 \end{aligned}$$



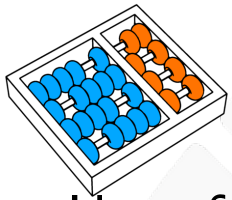
Fórmula satisfazível

Uma formula é **SATISFAZÍVEL** se houver atribuição das variáveis para a qual a avaliação é verdadeira.

Exemplo:

- Fórmula: $f = ((x_1 \rightarrow x_2) \vee \neg((\neg x_1 \leftrightarrow x_3) \vee x_4)) \wedge \neg x_2$.
- Atribuição: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1$
- Avaliação:

$$\begin{aligned} f &= ((0 \rightarrow 0) \vee \neg((\neg 0 \leftrightarrow 1) \vee 1)) \wedge \neg 0 \\ &= (1 \vee \neg((1 \leftrightarrow 1) \vee 1)) \wedge 1 \\ &= (1 \vee \neg(1 \vee 1)) \wedge 1 \end{aligned}$$



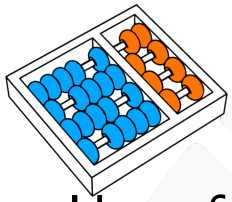
Fórmula satisfazível

Uma formula é **SATISFAZÍVEL** se houver atribuição das variáveis para a qual a avaliação é verdadeira.

Exemplo:

- Fórmula: $f = ((x_1 \rightarrow x_2) \vee \neg((\neg x_1 \leftrightarrow x_3) \vee x_4)) \wedge \neg x_2$.
- Atribuição: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1$
- Avaliação:

$$\begin{aligned} f &= ((0 \rightarrow 0) \vee \neg((\neg 0 \leftrightarrow 1) \vee 1)) \wedge \neg 0 \\ &= (1 \vee \neg((1 \leftrightarrow 1) \vee 1)) \wedge 1 \\ &= (1 \vee \neg(1 \vee 1)) \wedge 1 \\ &= (1 \vee 0) \wedge 1 \end{aligned}$$



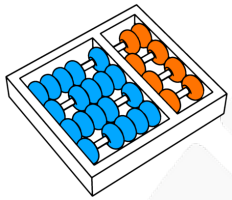
Fórmula satisfazível

Uma formula é **SATISFAZÍVEL** se houver atribuição das variáveis para a qual a avaliação é verdadeira.

Exemplo:

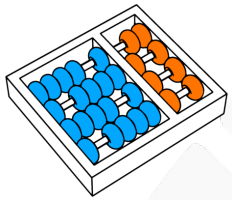
- Fórmula: $f = ((x_1 \rightarrow x_2) \vee \neg((\neg x_1 \leftrightarrow x_3) \vee x_4)) \wedge \neg x_2$.
- Atribuição: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1$
- Avaliação:

$$
\begin{aligned}
f &= ((0 \rightarrow 0) \vee \neg((\neg 0 \leftrightarrow 1) \vee 1)) \wedge \neg 0 \\
&= (1 \vee \neg((1 \leftrightarrow 1) \vee 1)) \wedge 1 \\
&= (1 \vee \neg(1 \vee 1)) \wedge 1 \\
&= (1 \vee 0) \wedge 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$



Linguagem correspondente

A linguagem SAT é aquela que contém fórmulas booleanas com uma atribuição verdadeira.

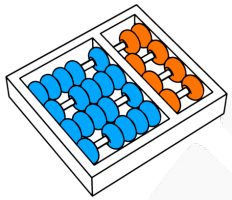


Linguagem correspondente

A linguagem SAT é aquela que contém fórmulas booleanas com uma atribuição verdadeira.

Problema (Satisfatibilidade)

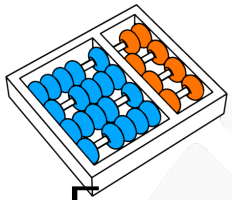
$$SAT = \{\langle f \rangle : f \text{ é uma fórmula booleana satisfazível}\}$$



É fácil verificar

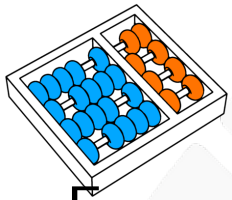
Lema

SAT está em NP*.*



Prova

Escrevemos um algoritmo verificador:

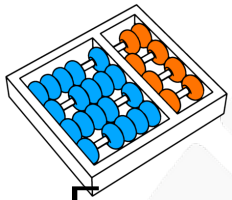


Prova

Escrevemos um algoritmo verificador:

Algoritmo: VERIFICA-SAT($\langle f \rangle, \langle y \rangle$)

```
1 se f(y) = 1
2     devolva SIM
3 senão
4     devolva NAO
```



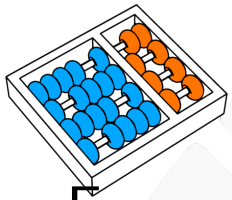
Prova

Escrevemos um algoritmo verificador:

Algoritmo: $\textsc{Verifica-SAT}(\langle f \rangle, \langle y \rangle)$

```
1 se f(y) = 1
2     devolva SIM
3 senão
4     devolva NAO
```

Observe que o algoritmo verifica SAT em tempo polinomial:



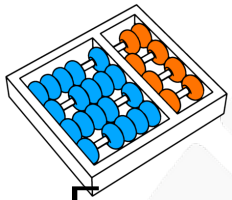
Prova

Escrevemos um algoritmo verificador:

Algoritmo: $\textsc{Verifica-SAT}(\langle f \rangle, \langle y \rangle)$

```
1 se f(y) = 1
2     devolva SIM
3 senão
4     devolva NAO
```

Observe que o algoritmo verifica SAT em tempo polinomial:



Prova

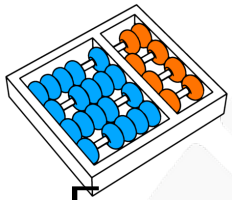
Escrevemos um algoritmo verificador:

Algoritmo: $\textsc{Verifica-SAT}(\langle f \rangle, \langle y \rangle)$

```
1 se f(y) = 1
2     devolva SIM
3 senão
4     devolva NAO
```

Observe que o algoritmo verifica SAT em tempo polinomial:

1. ▶ Se $\langle f \rangle \in \text{SAT}$, então f é satisfazível.



Prova

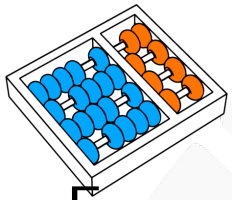
Escrevemos um algoritmo verificador:

Algoritmo: $\textsc{Verifica-SAT}(\langle f \rangle, \langle y \rangle)$

```
1 se f(y) = 1
2     devolva SIM
3 senão
4     devolva NAO
```

Observe que o algoritmo verifica SAT em tempo polinomial:

1.
   - Se $\langle f \rangle \in \text{SAT}$, então f é satisfazível.
   - Portanto, existe uma atribuição y das variáveis que faz f verdadeira.



Prova

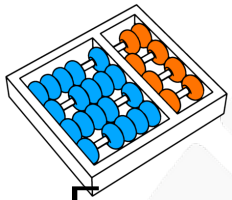
Escrevemos um algoritmo verificador:

Algoritmo: VERIFICA-SAT($\langle f \rangle, \langle y \rangle$)

```
1 se f(y) = 1
2     devolva SIM
3 senão
4     devolva NAO
```

Observe que o algoritmo verifica SAT em tempo polinomial:

1.
   - Se $\langle f \rangle \in$ SAT, então f é satisfazível.
   - Portanto, existe uma atribuição y das variáveis que faz f verdadeira.
   - Logo, VERIFICA-SAT($\langle f \rangle, \langle y \rangle$) devolve SIM.



Prova

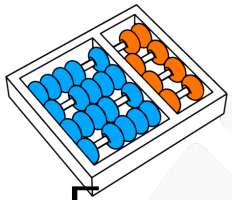
Escrevemos um algoritmo verificador:

Algoritmo: VERIFICA-SAT($\langle f \rangle, \langle y \rangle$)

```
1 se f(y) = 1
2     devolva SIM
3 senão
4     devolva NAO
```

Observe que o algoritmo verifica SAT em tempo polinomial:

1.
   - Se $\langle f \rangle \in$ SAT, então f é satisfazível.
   - Portanto, existe uma atribuição y das variáveis que faz f verdadeira.
   - Logo, VERIFICA-SAT($\langle f \rangle, \langle y \rangle$) devolve SIM.



Prova

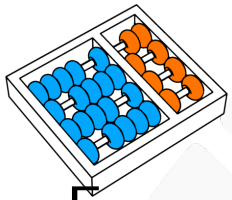
Escrevemos um algoritmo verificador:

Algoritmo: VERIFICA-SAT($\langle f \rangle, \langle y \rangle$)

```
1 se f(y) = 1
2     devolva SIM
3 senão
4     devolva NAO
```

Observe que o algoritmo verifica SAT em tempo polinomial:

1.
   - Se $\langle f \rangle \in$ SAT, então f é satisfazível.
   - Portanto, existe uma atribuição y das variáveis que faz f verdadeira.
   - Logo, VERIFICA-SAT($\langle f \rangle, \langle y \rangle$) devolve SIM.
2.
   - Suponha VERIFICA-SAT($\langle f \rangle, \langle y \rangle$) devolve SIM.



Prova

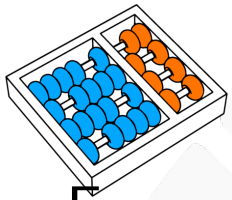
Escrevemos um algoritmo verificador:

Algoritmo: VERIFICA-SAT($\langle f \rangle, \langle y \rangle$)

```
1 se f(y) = 1
2     devolva SIM
3 senão
4     devolva NAO
```

Observe que o algoritmo verifica SAT em tempo polinomial:

1.
   - Se $\langle f \rangle \in$ SAT, então f é satisfazível.
   - Portanto, existe uma atribuição y das variáveis que faz f verdadeira.
   - Logo, VERIFICA-SAT($\langle f \rangle, \langle y \rangle$) devolve SIM.
2.
   - Suponha VERIFICA-SAT($\langle f \rangle, \langle y \rangle$) devolve SIM.
   - Então, y é uma atribuição verdadeira para a fórmula.



Prova

Escrevemos um algoritmo verificador:

Algoritmo: VERIFICA-SAT($\langle f \rangle, \langle y \rangle$)

```
1 se f(y) = 1
2     devolva SIM
3 senão
4     devolva NAO
```

Observe que o algoritmo verifica SAT em tempo polinomial:

1.
   - Se $\langle f \rangle \in$ SAT, então f é satisfazível.
   - Portanto, existe uma atribuição y das variáveis que faz f verdadeira.
   - Logo, VERIFICA-SAT($\langle f \rangle, \langle y \rangle$) devolve SIM.
2.
   - Suponha VERIFICA-SAT($\langle f \rangle, \langle y \rangle$) devolve SIM.
   - Então, y é uma atribuição verdadeira para a fórmula.
   - Portanto, f é satisfazível e $\langle f \rangle \in$ SAT.

NP-completude

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

11/24

25

Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

UNICAMP